

01含参函数的单调性讨论练习题

一、含参函数单调性问题

1. 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 - x - 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调函数, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, +\infty)$ B. $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
C. $(-\infty, -\sqrt{3}] \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ D. $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

【答案】 B

【解析】 $f'(x) = -3x^2 + 2ax - 1, x \in \mathbf{R}$.

显然 $f'(x)$ 为开口向下的二次函数, 不可能恒正, 故有 $f'(x) \leq 0$ 恒成立.

即 $\Delta = 4a^2 - 12 \leq 0$, 解得: $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}$.

【标注】 【知识点】 利用公式和四则运算法则求导

2. 若函数 $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x}$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 是增函数, 则 a 的取值范围是 ().

- A. $[-1, 0]$ B. $[-1, +\infty)$ C. $[0, 3]$ D. $[3, +\infty)$

【答案】 D

【解析】 求导 $f'(x) = 2x + a - \frac{1}{x^2}$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = x^2 + ax + \frac{1}{x}$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 是增函数,

$\therefore f'(x) = 2x + a - \frac{1}{x^2} \geq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{x^2} - 2x$,

令 $h(x) = \frac{1}{x^2} - 2x$, $h'(x) = -2\frac{1}{x^3} - 2 = -2\frac{1+x^3}{x^3}$

令 $h'(x) > 0 \Rightarrow x < -1$,

则函数 $h(x) = \frac{1}{x^2} - 2x$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

$a \geq h(x)_{\max} = h(\frac{1}{2}) = 4 - 1 = 3$.

【标注】 【知识点】 已知单调性求参数的取值范围

3. 已知函数 $f(x) = x^2 + \ln x - ax$ 在 $(1, 2)$ 内不是单调函数, 则实数 a 的取值范围是 ().

- A. $[2\sqrt{2}, 3)$ B. $[2\sqrt{2}, \frac{9}{2})$ C. $[3, \frac{9}{2}]$ D. $(3, \frac{9}{2})$

【答案】D

【解析】①若 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 单调递增, 则 $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} - a \geq 0$,

$$\text{即 } a \leq \left(2x + \frac{1}{x}\right)_{\min}, \quad x \in (1, 2),$$

解得 $a \leq 3$.

②若 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 单调递减, 则 $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} - a \leq 0$,

$$\text{即 } a \geq \left(2x + \frac{1}{x}\right)_{\max}, \quad x \in (1, 2),$$

解得 $a \geq \frac{9}{2}$,

若 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 不单调, 需取补集得 $a \in \left(3, \frac{9}{2}\right)$.

故选D.

【标注】【知识点】区间上不单调

4. 已知函数 $f(x) = \ln x + (x - b)^2 (b \in \mathbf{R})$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上存在单调递增区间, 则实数 b 的取值范围是 () .

A. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

B. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right)$

C. $(-\infty, 3)$

D. $(-\infty, \sqrt{2})$

【答案】B

【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上存在单调增区间,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 上存在子区间使得不等式 $f'(x) > 0$ 成立,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 2(x - b) = \frac{2x^2 - 2bx + 1}{x},$$

设 $h(x) = 2x^2 - 2bx + 1$, 则 $h(2) > 0$ 或 $h\left(\frac{1}{2}\right) > 0$,

即 $8 - 4b + 1 > 0$ 或 $\frac{1}{2} - b + 1 > 0$,

得 $b < \frac{9}{4}$.

故选B.

【标注】【知识点】已知单调性求参数的取值范围

二、分类讨论——二次型

5. 已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{ax^2}{2} - (a + 1)x$, $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单增, $(1, +\infty)$ 单减,

当 $a > 0$ 时, 若 $a = 1$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增,
 若 $0 < a < 1$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单增, $\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 单减, $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 单增,
 若 $a > 1$, $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 单增, $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 单减, $(1, +\infty)$ 单增.

【解析】 因为 $f'(x) = \frac{1}{x} + ax - (a+1) = \frac{ax^2 - (a+1)x + 1}{x} = \frac{(ax-1)(x-1)}{x}$,

当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 单增, $(1, +\infty)$ 单减,

当 $a > 0$ 时, 若 $a = 1$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单增,

若 $0 < a < 1$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 单增, $\left(1, \frac{1}{a}\right)$ 单减, $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 单增,

若 $a > 1$, $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 单增, $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$ 单减, $(1, +\infty)$ 单增.

【标注】【知识点】求函数单调区间 (含参指对型导函数)

6. 已知函数 $f(x) = mx^3 - 3x^2 + 1 - \frac{3}{m}$, 讨论其单调性.

【答案】 当 $m > 0$, $(-\infty, 0)$ 单增, $\left(0, \frac{2}{m}\right)$ 单减, $\left(\frac{2}{m}, +\infty\right)$ 单增;

当 $m < 0$ 时, $(-\infty, \frac{2}{m})$ 单减, $\left(\frac{2}{m}, 0\right)$ 单增, $(0, +\infty)$ 单减.

【解析】 当 $m > 0$, $(-\infty, 0)$ 单增, $\left(0, \frac{2}{m}\right)$ 单减, $\left(\frac{2}{m}, +\infty\right)$ 单增;

当 $m < 0$ 时, $(-\infty, \frac{2}{m})$ 单减, $\left(\frac{2}{m}, 0\right)$ 单增, $(0, +\infty)$ 单减.

【标注】【知识点】求函数单调区间 (含参二次型导函数)

7. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + (2-a)x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

【答案】 (1) $a > 0$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减.

$a \leq 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

【解析】 (1) 由题意得 $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2ax + (2-a) = -\frac{(2x+1)(ax-1)}{x}.$$

① $a > 0$, $f'(x) > 0$, $x = \frac{1}{a}$, $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$, $f'(x) > 0$, $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$, $f'(x) < 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减.

② $a \leq 0$, $f'(x) > 0$ 恒成立. 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

【标注】【知识点】求函数单调区间 (含参二次型导函数); 双变量问题; 通过构造函数证明不等式

8. 已知函数 $f(x) = -x^3 + ax^2 - 4$.

(1) 求 $f(x)$ 单调区间 .

【答案】 (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的单调减区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无递增区间;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $\left(0, \frac{2a}{3}\right)$,

单调减区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $\left(\frac{2a}{3}, +\infty\right)$;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$,

单调减区间为 $(-\infty, \frac{2a}{3})$ 和 $(0, +\infty)$.

【解析】 (1) $f'(x) = -3x^2 + 2ax$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{2a}{3}$.

当 $a = 0$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{2a}{3}$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > \frac{2a}{3}$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{2a}{3}\right)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 和 $\left(\frac{2a}{3}, +\infty\right)$ 上单调递减;

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $\frac{2a}{3} < x < 0$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $x < \frac{2a}{3}$ 或 $x > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \frac{2a}{3})$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

综上所述, 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, +\infty)$, 无递减区间;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $\left(0, \frac{2a}{3}\right)$,

单调减区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $\left(\frac{2a}{3}, +\infty\right)$;

当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调增区间为 $\left(\frac{2a}{3}, 0\right)$,

单调减区间为 $(-\infty, \frac{2a}{3})$ 和 $(0, +\infty)$.

【标注】【知识点】已知最值情况求参数范围; 求函数单调区间 (含参二次型导函数)

9. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + a \ln x$, 讨论 $f(x)$ 的单调性 .

【答案】 当 $a \geq \frac{1}{2}$, $(0, +\infty)$ 单增,

当 $0 < a < \frac{1}{2}$, $\left(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}\right)$, $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty\right)$ 单增, $\left(\frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}\right)$

单减.

当 $a \leq 0$, $\left(0, \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}\right)$ 单减, $\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{2}, +\infty\right)$ 单增.

【解析】当 $a \geq \frac{1}{2}$, $(0, +\infty)$ 单增,

当 $0 < a < \frac{1}{2}$, $\left(0, \frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}, +\infty\right)$ 单增, $\left(\frac{1-\sqrt{1-2a}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 单减,

当 $a \leq 0$, $\left(0, \frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}\right)$ 单减, $\left(\frac{1+\sqrt{1-2a}}{2}, +\infty\right)$ 单增.

【标注】【素养】数学运算

【素养】逻辑推理

【思想】分类讨论思想

【知识点】利用公式和四则运算法则求导

【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

三、分类讨论——指对型

10. 设函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} - k\left(\frac{2}{x} + \ln x\right)$ (k 为常数, $e = 2.718\cdots$).

(1) 当 $k \leq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】(1) 单调递减区间为 $(0, 2)$, 单调递增区间为 $(2, +\infty)$.

【解析】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $\therefore f'(x) = \frac{(x-2)(e^x - kx)}{x^3}$, ($x > 0$),

当 $k \leq 0$ 时, $kx \leq 0$, $\therefore e^x - kx > 0$, 令 $f'(x) = 0$, $x = 2$,

$\therefore$ 当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$, 单调递增区间为 $(2, +\infty)$.

【标注】【知识点】二阶导问题