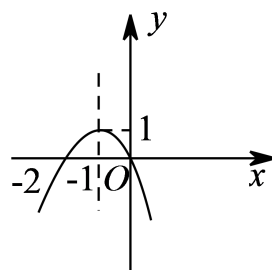


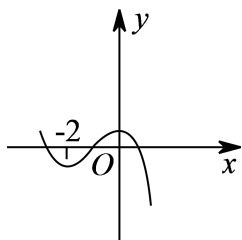
02单调性、极值与最值练习题

一、 图像

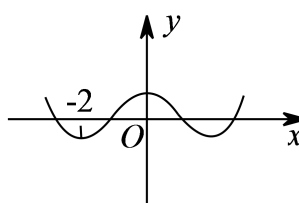
1. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，那么函数 $f(x)$ 的图象最有可能的是（ ）.



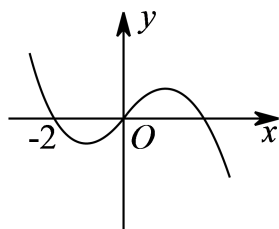
A.



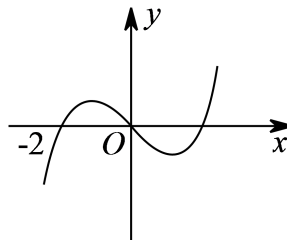
B.



C.



D.



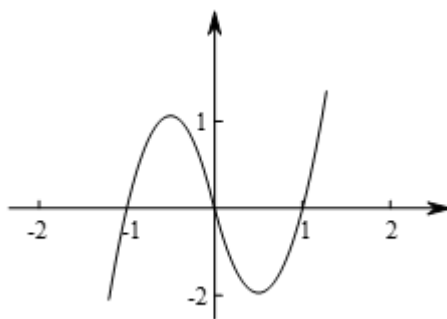
【答案】 A

【解析】 $x < -2$ 时， $f'(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 单减；
 $-2 < x < 0$ 时， $f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 单增；
 $x > 0$ 时， $f'(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 单减．
则符合上述条件的只有选项A．
故选A．

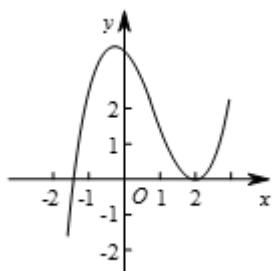
【标注】【知识点】利用导数确定函数的图象

2.

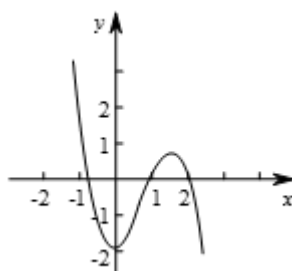
已知函数 $y = xf'(x)$ 的图象如右图所示（其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数），下面四个图象中 $y = f(x)$ 的图象大致是（ ）。



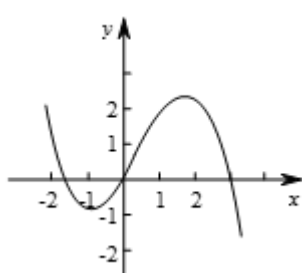
A.



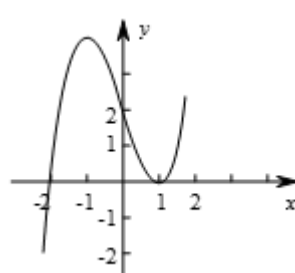
B.



C.



D.



【答案】 D

【解析】 由函数 $y = xf'(x)$ 的图象可知：

当 $x < -1$ 时， $xf'(x) < 0$ ， $f'(x) > 0$ ，此时 $f(x)$ 增，

当 $-1 < x < 0$ 时， $xf'(x) > 0$ ， $f'(x) < 0$ ，此时 $f(x)$ 减，

当 $0 < x < 1$ 时， $xf'(x) < 0$ ， $f'(x) < 0$ ，此时 $f(x)$ 减，

当 $x > 1$ 时， $xf'(x) > 0$ ， $f'(x) > 0$ ，此时 $f(x)$ 增。

故选D。

【标注】【知识点】导数与单调性；函数图象的识别问题

二、单调性

3. 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的单调递减区间为（ ）。

A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(-\infty, 0)$ D. $(0, 2)$ **【答案】** D**【解析】** $f'(x) = 3x^2 - 6x$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 2$, 故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$.**【标注】**【知识点】直接求函数的单调性 (不含参)4. 求函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ 的单调区间.**【答案】** 单调减区间是 $(-2, 1)$ 单调增区间是 $(-\infty, -2)$ 和 $(1, +\infty)$.**【解析】** 因为 $y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x - 1)(x + 2)$,当 $y' < 0$ 时, 解得 $-2 < x < 1$,所以函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ 的单调减区间是 $(-2, 1)$.当 $y' > 0$ 时, 解得 $x > 1$ 或 $x < -2$,所以函数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ 的单调增区间是 $(-\infty, -2)$ 和 $(1, +\infty)$.**【标注】**【知识点】直接求函数的单调性 (不含参)5. 已知函数 $f(x) = \ln x - 2x^2$.(1) 求 $f(x)$ 的单调区间.**【答案】** (1) 递增区间为 $(0, \frac{1}{2}]$, 递减区间为 $[\frac{1}{2}, +\infty)$.**【解析】** (1) $f'(x) = \frac{1}{x} - 4x = \frac{1 - 4x^2}{x}$,令 $f'(x) = 0$,则 $x = \frac{1}{2}$ ($\because x > 0$),且 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x) \nearrow$, $x > \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x) \searrow$, $\therefore$ 递增区间为 $(0, \frac{1}{2}]$, 递减区间为 $[\frac{1}{2}, +\infty)$.**【标注】**【知识点】通过构造函数证明不等式6. 函数 $f(x) = -\frac{x}{e^x}$ ($a < b < 1$), 则 ().A. $f(a) = f(b)$ B. $f(a) < f(b)$

- A. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ B. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ D. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

【答案】C

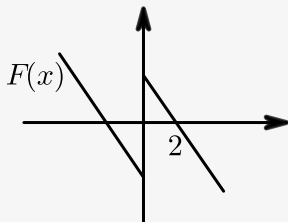
【解析】 $\because f'(x)g(x) - f(x)g'(x) > 0$,
 即 $F'(x) = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' > 0$,
 故 $F(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增 ,
 又 $\because F(x)$ 是偶函数 ,
 $\therefore F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减 ,
 且 $F(-2) = F(2) = 0$,
 $\therefore F(x) < 0$ 的解集是 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
 故选C .

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

9. 已知 $f(x)$, $g(x)$ 分别是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数和偶函数 , 当 $x < 0$ 时 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) < 0$, 且 $f(2) = 0$, 则不等式 $f(x)g(x) > 0$ 的解集是 () .
 A. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ B. $(-2, 0) \cup (0, 2)$ C. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ D. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

【答案】D

【解析】令 $F(x) = f(x)g(x)$,
 当 $x < 0$ 时 , $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) < 0$,
 $\therefore F(x)$ 为递减数列 , $f(x)$ 为奇函数 , $g(x)$ 为偶函数 ,
 $F(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -F(x)$,
 $\therefore F(x)$ 为奇函数 ,
 则 $Fx = g(x)f(x)$ 的趋势图如图 ,



$f(x)g(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.
 故选D .

【标注】【知识点】奇偶性 ; 利用导数确定函数的图象

四、极值

10. 下列命题中正确的是 () .

- A. 若函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内单调递增, 那么在 (a, b) 内一定有 $f'(x) > 0$
- B. 对可导函数 $y = f(x)$, 若 $f'(x) = 0$, 则点 x_0 为极值点
- C. 与曲线只有一个公共点的直线一定是曲线的切线
- D. 曲线的切线不一定与曲线只有一个公共点

【答案】D

【解析】A项, 若函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内单调递增, 则在 (a, b) 内有 $f'(x) \geq 0$, 故A错误;

B项, 对可导函数 $y = f(x)$, 若 $f'(x_0) = 0$, 则点 x_0 不一定是极值点,

如函数 $f(x) = x^3$, 则 $f'(x) = 3x^2$, 其中 $f'(0) = 0$, 但 $x = 0$ 不是 $f(x) = x^3$ 的极值点, 故B错误;

C项, 直线 $x = 1$ 与曲线 $y = x^2$ 只有一个公共点, 但 $x = 1$ 不是曲线 $y = x^2$ 的切线, 故C错误;

D项, 直线 $y = -\frac{2}{3}$ 与曲线 $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ 相切, 但直线与曲线有3个公共点, 故D正确.

综上所述, 故选D.

【标注】【知识点】函数极值的概念; 直接求函数的单调性 (不含参); 导数的几何意义

【素养】数学运算; 数学抽象

11. 若函数 $f(x) = 2\sin x - x$ 则有 () .

- A. $x = \frac{\pi}{3}$ 是极小值点
- B. $x = \frac{\pi}{6}$ 是极小值点
- C. $x = \frac{\pi}{3}$ 是极大值点
- D. $x = \frac{\pi}{6}$ 是极大值点

【答案】C

【解析】 $f'(x) = 2\cos x - 1$, $f'(\frac{\pi}{3}) = 0$, 由图象可知在 $x = \frac{\pi}{3}$ 左侧 $f'(x) > 0$, 在 $x = \frac{\pi}{3}$ 右侧 $f'(x) < 0$, 所以 $x = \frac{\pi}{3}$ 是极大值点.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】直接求函数的极值 (不含参)

12. 函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$ 的极大值为 () .

- A. $\frac{28}{3}$
- B. 6
- C. $\frac{26}{3}$
- D. 7

【答案】 A

【解析】 $\because f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 4$,

$$\therefore f'(x) = x^2 - 4 = (x+2)(x-2),$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = -2$, $x_2 = 2$,

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

$$f(-2) = \frac{-8}{3} + 8 + 4 = \frac{28}{3},$$

$\therefore f(x)$ 的极大值为 $\frac{28}{3}$.

故选 A.

【标注】 【知识点】 直接求函数的极值 (不含参)

五、最值

13. 已知函数 $f(x) = 2\ln x - \frac{1}{4}x^2$, 求函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最大值和最小值.

【答案】 见解析.

【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x > 0\}$, $f'(x) = -\frac{(x+2)(x-2)}{2x}$,

令 $f'(x) = 0$, 在 $[1, e]$ 上得极值点 $x = 2$, $f'(x)$, $f(x)$ 随 x 的变化情况如下表:

x	$[1, 2)$	2	$(2, e]$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	增	$2\ln 2 - 1$	减

$$f(1) = -\frac{1}{4}, f(e) = 2 - \frac{e^2}{4},$$

$$\because f(1) < f(e) \therefore f(x)_{\max} = f(2) = 2\ln 2 - 1, f(x)_{\min} = f(1) = -\frac{1}{4}.$$

【标注】 【知识点】 直接求函数的最值 (不含参)

【素养】 数学运算

14. 函数 $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ 在区间 $[-2, 1]$ 上的最小值 ().

A. $\frac{22}{27}$

B. 2

C. -1

D. -4

【答案】 C

【解析】 $y' = 3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1)$,

令 $y' > 0$, 解得 $x > \frac{1}{3}$ 或 $x < -1$.

再 $y' < 0$, 解得 $-1 < x < \frac{1}{3}$,

所以 $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$ 分别是函数的极大值点和极小值点 ,

所以 $f(-1) = 2$, $f(1) = 2$,

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{22}{27}$, $f(-2) = -1$,

所以最小值为 -1 ,

故选 C .

【标注】【知识点】直接求函数的最值 (不含参)

15. 函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在区间 $[-1, 2]$ 上最小值为 () .

A. 2

B. -2

C. 0

D. -4

【答案】 B

【解析】 $\because f(x) = x^3 - 3x$,

$\therefore f'(x) = 3x^2 - 3$,

由 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = -1$,

$\therefore f(-1) = -1 + 3 = 2$, $f(1) = 1 - 3 = -2$, $f(2) = 8 - 6 = 2$,

$\therefore$ 函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 在区间 $[-1, 2]$ 上最小值为 : $f(1) = -2$.

故选 : B .

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值

16. 求 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ 在 $[-4, 4]$ 上的最大值和最小值 .

【答案】 最大值为10 , 最小值为-71

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3)$.

令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = -1$, $x_2 = 3$,

$\therefore f(x)$ 在 $x = -1$ 处有极大值 , $f(-1) = 10$, $f(x)$ 在 $x = 3$ 处有极小值 , $f(3) = -22$.

在区间端点处 $f(-4) = -71$, $f(4) = -15$, 比较上述结果得 : $f(x)$ 在 $[-4, 4]$ 上的最大值为

$f(-1) = 10$, 最小值为 $f(-4) = -71$.

【标注】【知识点】直接求函数的最值 (不含参)

