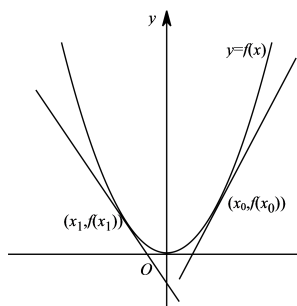


02单调性、极值与最值

一、函数的单调性与导数



如图，导数 $f'(x_0)$ 表示函数 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率。在 $x = x_0$ 处， $f'(x_0) > 0$ ，切线是“左下右上”式的，这时，函数 $f(x)$ 在 x_0 附近单调递增；在 $x = x_1$ 处， $f'(x_1) < 0$ ，切线是“左上右下”式的，这时，函数 $f(x)$ 在 x_1 附近单调递减。

一般地，函数的单调性与其导数的正负有如下关系：

在某个区间 (a, b) 内，如果 $f'(x) > 0$ ，那么函数 $y = f(x)$ 在这个区间内单调递增；如果 $f'(x) < 0$ ，那么函数 $y = f(x)$ 在这个区间内单调递减。（并非充要条件）

如果在某个区间内恒有 $f'(x) = 0$ ，那么函数 $f(x)$ 有什么特性？

【问题思考】

$f'(x) \geq 0$ 与 $f(x)$ 单调递增是什么关系？（充分不必要、必要不充分、充要条件）

$f'(x) > 0$ 与 $f(x)$ 单调递增是什么关系？（充分不必要、必要不充分、充要条件）

【仅老师可见】

【补充说明】

（1）可以用曲线切线斜率来解释导数与原函数单调性的关系：

如果切线的斜率大于0，那么倾斜角是锐角，曲线呈现上升的状态，所以函数单调递增；

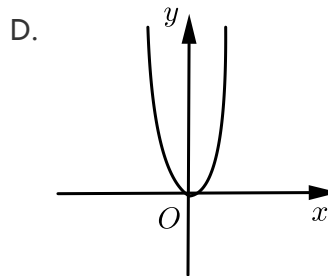
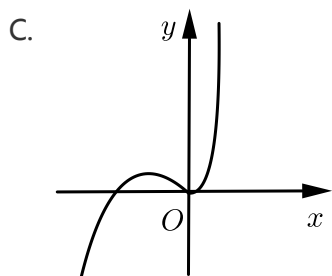
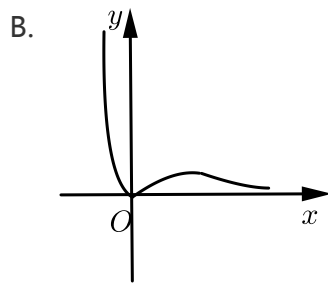
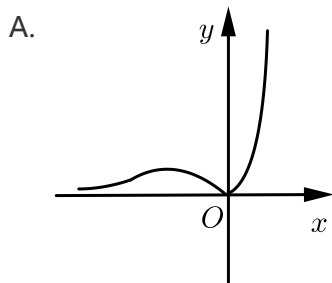
如果切线的斜率小于0，那么倾斜角是钝角，曲线呈现下降的状态，所以函数单调递减。

（2）对于指定的区间， $f'(x) > 0$ （ $f'(x) < 0$ ）是函数 $f(x)$ 在此区间内单调递增（减）的充分条件而非必要条件，其实是可以有个别的点满足 $f'(x) = 0$ 的，所以准确的描述应该是这样： $f(x)$ 在某个区间内单调递增（减）的充要条件是 $f'(x) \geq 0$ （ $f'(x) \leq 0$ ）且对于该区间的任一子区间导函数都不恒为0，形象一点儿的解释就是函数的图像不许出现平台。

1. 导数图像与原图像

例1

1. 函数 $f(x) = \frac{x^2 e^x}{2}$ 的大致图象为（ ）。



【答案】A

【解析】函数 $f(x) = \frac{x^2 e^x}{2}$ 的导数 $f'(x) = x e^x + \frac{x^2 e^x}{2} = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) e^x$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0$, $x_2 = -2$,

故排除选项B, D,

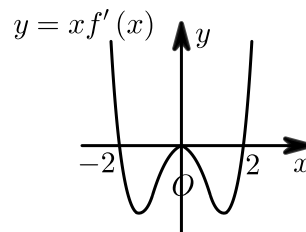
又 $x^2 \geq 0$, $e^x > 0$,

$\therefore f(x) = \frac{x^2 e^x}{2} \geq 0$, 故排除选项C.

故选A.

【标注】【知识点】利用导数确定函数的图象

2. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = x f'(x)$ 的图象 (如图所示) 与 x 轴分别交于原点, 点 $(-2, 0)$ 和点 $(2, 0)$, 若 -3 和 3 是函数 $f(x)$ 的两个零点, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集 () .



- A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ C. $(-\infty, -3) \cup (0, 2)$ D. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$

【答案】B

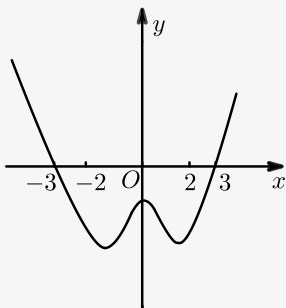
【解析】因为当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $x f'(x) > 0$, 所以 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数.

当 $x \in (-2, 0)$ 时, $x f'(x) < 0$, 所以 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数.

当 $x \in (0, 2)$ 时, $xf'(x) < 0$, 所以 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数.

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $xf'(x) > 0$, 所以 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数.

又因为 $f(x)$ 只有 -3 和 3 两个零点, 画出 $f(x)$ 的简图如下:



所以, 不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

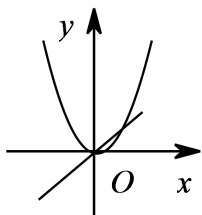
故选B.

【标注】【知识点】利用导数确定函数的图象

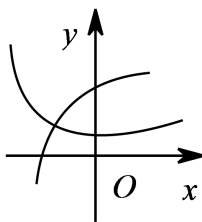
练1

3. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 将 $y = f(x)$ 和 $y = f'(x)$ 的图像画在同一个直角坐标系中, 不可能正确的是().

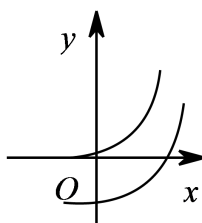
A.



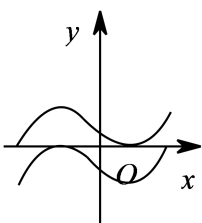
B.



C.



D.



【答案】 D

【解析】 A项, 当直线为导函数, 曲线为函数时成立.

B项, 当单减函数为导数, 单增函数为函数时成立.

C项, 当上曲线为导函数, 下方曲线为函数时成立.

D项, 若上方曲线为导函数, 下方曲线应为单增函数.

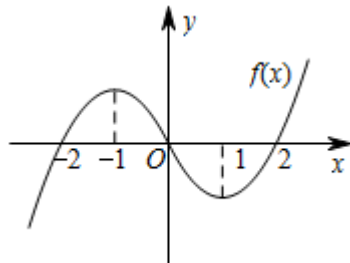
若下方曲线为导函数, 上方曲线为单减函数, 故D错误.

故选：D .

【标注】【素养】逻辑推理；数学抽象

【知识点】已知原函数确认导数图函数；已知导函数确认原函数图象

4. 已知 $\mathbf{R}$ 上可导函数 $f(x)$ 的图象如图所示，则不等式 $(x^2 - 2x - 3) \cdot f'(x) > 0$ 的解集为 () .



A. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

B. $(-\infty, -2) \cup (1, 3)$

C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (3, +\infty)$

D. $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$

【答案】D

【解析】由 $f(x)$ 的图象可知，在 $(-\infty, -1)$ ， $(1, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$ ，在 $(-1, 1)$ 上 $f'(x) < 0$.

由 $(x^2 - 2x - 3)f'(x) > 0$ ，得 $\begin{cases} f'(x) > 0, \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f'(x) < 0, \\ x^2 - 2x - 3 < 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} (x > 1) \cup (x < -1) \\ (x > 3) \cup (x < -1) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} -1 < x < 1, \\ -1 < x < 3, \end{cases}$

所以不等式的解集为 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$ ，

故选D .

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

【知识点】利用公式和四则运算法则求导

【素养】数学运算

二、求函数的单调区间的步骤

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域；
- (2) 求出导函数 $f'(x)$ 解析式，解方程 $f'(x) = 0$ ，求出该方程在定义域内的一切实根；
- (3) 将实根从小到大依次标在 x 轴上，画出导函数的大致图像；
- (4) 考察各个小区间上 $f'(x)$ 的符号，根据符号判断相应区间上的单调性 .

1. 求解确定函数单调性

 例1

5. 设函数 $f(x) = (x-1)e^x - x^2$. 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

【答案】 函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln 2, +\infty)$, 单调减区间为 $(0, \ln 2)$.

【解析】 $f(x) = (x-1)e^x - x^2$,

$$f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 2x = x(e^x - 2).$$

由 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = \ln 2 > 0$.

由 $f'(x) > 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > \ln 2$.

由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \ln 2$.

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln 2, +\infty)$,

单调减区间为 $(0, \ln 2)$.

【标注】 【知识点】直接求函数的单调性 (不含参)

6. 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递减区间为 ().

A. $(-1, 1]$

B. $(0, 1]$

C. $[1, +\infty)$

D. $(0, +\infty)$

【答案】 B

【解析】 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$y' = x - \frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}, \text{ 令 } y' \leq 0, \text{ 则可得 } 0 < x \leq 1.$$

【标注】 【知识点】导数的运算

【知识点】导数与单调性

 练1

7. 求下列函数的单调区间:

(1) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$;

(2) $y = 2x^2 - \ln x$.

【答案】 (1) 函数在 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减.

【解析】 (1)

$y' = \frac{x^2 + 1}{x^2} > 0$ 在 $x \neq 0$ 时恒成立，所以函数在 $(-\infty, 0)$ ， $(0, +\infty)$ 上单调递增。

(2) 函数定义域为 $(0, +\infty)$ ，令 $y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} > 0$ ，得 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ ，令 $y' = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} < 0$ 得 $x \in (0, \frac{1}{2})$ ， $\therefore f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增，在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减。

【标注】【知识点】直接求函数的单调性（不含参）

2. 等价导函数变换

【技巧点睛】在导函数中，恒大于零的因式，可以直接“忽略”；若是恒小于零的因式，可以直接简记为负号。

【方法点睛】常见可“忽略”（恒大于0）因式： e^x ， x （含有 $\ln x$ ），二次函数（ $\Delta < 0$ ），平方的分母，一些常见切线模型【 $(e^x - x - 1)$ 、 $(\ln x - x + 1)$ 】。

例2 e^x 恒大于零

8. 函数 $f(x) = e^x(x^2 - 2x)$ 的单调减区间是（ ）。

- A. $(-\infty, -\sqrt{2})$ ， $(0, \sqrt{2})$ B. $(-\infty, -\sqrt{2})$ ， $(\sqrt{2}, +\infty)$
C. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ D. $(-\infty, \sqrt{2})$

【答案】C

【解析】求导： $f'(x) = e^x(x^2 - 2x) + e^x(2x - 2) = e^x(x^2 - 2)$ ，

令 $f'(x) < 0$ 得 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 。

故选C。

【标注】【知识点】直接求函数的单调性（不含参）

例3 定义域有断点

9. 研究 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图像与导函数正负性的关系。

【答案】略。

【标注】【知识点】导数与单调性

【题型通解】由上题我们可知，如果定义域出现断点，那么单调性也要分开写。

🔔 例4 导函数分母是平方恒大于零

10. 求 $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ 的单调性。

【答案】 $(-\infty, 1) \downarrow, (1, 2) \downarrow, (2, +\infty) \uparrow$

【标注】【知识点】导数与单调性

🔔 例5 x 恒为正 (含有 $\ln x$)

11. 求 $f(x) = x^2 \ln x$ 的单调性。

【答案】 $(0, \sqrt{e}) \downarrow, (\sqrt{e}, +\infty) \uparrow$

【标注】【知识点】导数与单调性

3. 二次求导型

🔔 例6

12. 求 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ 的单调性。

【答案】 $(0, +\infty) \downarrow$

【标注】【知识点】导数与单调性

4. 利用导数判断单调性，从而比较大小或求解不等式

🔔 例7

13. 设定义在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的函数 $f(x) = x \sin x + \cos x$ ，则不等式 $f(2x) < f(x-1)$ 的解集是 ()。

A. $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

B. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

C. $\left(1 - \frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\right)$

D. $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$

【答案】C

【解析】 $f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$,

$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 时, $\cos x > 0$, $f'(x) < 0$,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $\cos x \geq 0$, $f'(x) \geq 0$,

故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 递减, 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 递增,

而 $f(-x) = x \sin x + \cos x = f(x)$, $f(x)$ 是偶函数,

不等式 $f(2x) < f(x-1)$, 即 $|2x| < |x-1|$

计算得出 $-1 < x < \frac{1}{3}$, 而 $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq x-1 \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$,

计算得出 $1 - \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, 综上得出 $1 - \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{1}{3}$,

故C正确.

【标注】【知识点】函数单调性与奇偶性综合问题

练7

14. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$, 设 $a = f(0.31^2)$, $b = -f(\log_{\frac{1}{2}} 0.31)$, $c = f(2\ln 2)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

A. $a > c > b$

B. $a > b > c$

C. $b > c > a$

D. $b > a > c$

【答案】D

【解析】 $\because$ 函数 $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) (x \in \mathbf{R})$,

$$f(-x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\frac{1}{2}(e^{-x} - e^x) = -f(x).$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$$\text{又} \because f'(x) = \frac{1}{2}(-e^{-x} - e^x) = -\frac{1}{2}(e^{-x} + e^x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

$$\because 0.31^2 = 0.0961,$$

$$\log_{\frac{1}{2}} 0.31 > 1,$$

$$2\ln 2 = \ln 4 > 1,$$

$$\therefore 2\ln 2 > 0.31^2 > -\log_{\frac{1}{2}} 0.31,$$

$$\text{则 } f(-\log_{\frac{1}{2}} 0.31) > f(0.31^2) > f(2\ln 2),$$

$$\begin{aligned}\because f\left(-\log_{\frac{1}{2}} 0.31\right) &= -f\left(\log_{\frac{1}{2}} 0.31\right), \\ \therefore -f\left(\log_{\frac{1}{2}} 0.31\right) &> f\left(0.31^2\right) > f(2\ln 2), \\ b &> a > c .\end{aligned}$$

故D正确.

【标注】【知识点】用单调性比较大小；指对幂比较大小

三、 逆向构造新函数，利用新函数性质求解

1. 逆用求导公式构造函数的常见模型

$$\text{【1】 } [xf(x)]' = xf'(x) + f(x)$$

$$\text{【2】 } \left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$\text{【3】 } [x^n f(x)]' = x^{n-1} [xf'(x) + nf(x)]$$

$$\text{【4】 } \left[\frac{f(x)}{x^n}\right]' = \frac{xf'(x) - nf(x)}{x^{n+1}}$$

$$\text{【5】 } [e^x f(x)]' = e^x [f'(x) + f(x)]$$

$$\text{【6】 } \left[\frac{f(x)}{e^x}\right]' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$$

$$\text{【7】 } [\sin x \cdot f(x)]' = \cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x) = \cos x [f'(x) - \tan x \cdot f(x)]$$

$$\text{【8】 } [\cos x \cdot f(x)]' = \cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x) = \cos x [f'(x) - \tan x \cdot f(x)]$$

$$\text{【9】 } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\text{【10】 } \forall x \in I, f'(x) < 1 \Leftrightarrow (f(x) - x)' < 0 \Rightarrow y = f(x) - x \text{ 在 } I \text{ 上单调递减；}$$

$$\text{【11】 } \forall x \in I, f'(x) < x \Leftrightarrow \left(f(x) - \frac{1}{2}x^2\right)' < 0 \Rightarrow y = f(x) - \frac{1}{2}x^2 \text{ 在 } I \text{ 上单调递减；}$$

2. 利用不等式的对称性，合理构造新函数：

$$\begin{aligned}\forall x_1, x_2 \in I, x_1 > x_2, f(x_1) - f(x_2) > g(x_1) - g(x_2) &\Leftrightarrow f(x_1) - g(x_1) > f(x_2) - g(x_2) \Leftrightarrow y = f(x) - g(x) \\ &\Leftrightarrow y = f(x) - g(x) \text{ 在 } I \text{ 上单增}\end{aligned}$$

例1

15. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数， $f(-1) = 0$ ，当 $x > 0$ 时， $xf'(x) - f(x) < 0$ ，则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

【答案】A

【解析】方法一：当 $x > 0$ 时， $f'(x) - f(x) < 0 \Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{x} \right]' < 0$ ，

因而设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $x > 0$ 时单调减少，且 $g(1) = \frac{f(1)}{1} = 0$ ，

又因为 $f(x)$ 为奇函数，因而 $g(x)$ 为偶函数，

因而当 $x \in (-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 时， $g(x) < 0$ ，

当 $x \in (-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 时， $g(x) > 0$ ，

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ 时 $f(x) > 0$ 。

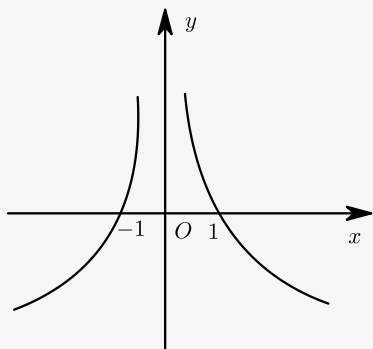
方法二：设 $y = g(x) = \frac{f(x)}{x}$ ($x \neq 0$)，则 $g' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ ，

当 $x > 0$ 时， $xf'(x) - f(x) < 0$ ，

$\therefore g'(x) < 0$ ， $\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数，且 $g(1) = f(1) = -f(-1) = 0$ 。

$\therefore f(x)$ 为奇函数， $\therefore g(x)$ 为偶函数，

$\therefore g(x)$ 的图象示意图如图所示。



当 $x > 0$ 时，由 $f(x) > 0$ ，得 $g(x) > 0$ ，由图知 $0 < x < 1$ ，

当 $x < 0$ 时，由 $f(x) > 0$ ，得 $g(x) < 0$ ，由图知 $x < -1$ ，

$\therefore$ 使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ 。

故选A。

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

16. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $y = f(x)$ 的导函数为 $y = f'(x)$ ，当 $x \neq 0$ 时， $f'(x) + \frac{f(x)}{x} > 0$ 。若

$a = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$ ， $b = -2f(-2)$ ， $c = \left(\ln \frac{1}{2}\right)f\left(\ln \frac{1}{2}\right)$ ，则 a, b, c 的大小关系是()。

A. $a < b < c$

B. $b < c < a$

C. $c < a < b$

D. $a < c < b$

【答案】D

【解析】设函数 $g(x) = xf(x)$ ，因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

所以函数 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

同时 $g'(x) = f(x) + xf'(x)$ 。

因为 $x \neq 0$ 时, $f'(x) + \frac{f(x)}{x} > 0$, 所以 $\frac{f(x) + xf'(x)}{x} > 0$.

显然当 $x > 0$ 时, $g'(x) = f(x) + xf'(x) > 0$,

即函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

又因为 $2 > \ln 2 > \frac{1}{2} > 0$, $a = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$, $b = -2f(-2) = 2f(2)$,

$c = \left(\ln \frac{1}{2}\right)f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = (\ln 2)f(\ln 2)$,

所以 $a < c < b$.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】利用公式和四则运算法则求导

【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间

【知识点】奇偶性

17. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-1) = 2015$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f'(x) < 3x^2$ 成立, 则不等式 $f(x) < x^3 + 2016$ 的解集为().
- A. $(-1, +\infty)$ B. $(-1, 0)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(-\infty, +\infty)$

【答案】 A

【解析】 令 $g(x) = f(x) - x^3 - 2016$, $g'(x) = f'(x) - 3x^2$,

因为对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f'(x) < 3x^2$ 成立,

所以对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $g'(x) < 0$ 成立,

所以 $g(x) = f(x) - x^3 - 2016$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,

且 $g(-1) = f(-1) + 1 - 2016 = 2015 + 1 - 2016 = 0$,

故不等式 $f(x) < x^3 + 2016$ 等价于 $g(x) < g(-1)$, 解集为 $(-1, +\infty)$,

故选A.

【标注】【素养】数学运算

【知识点】已知单调性求参数的取值范围

练1

18. 已知函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 上可导且满足 $xf'(x) - f(x) > 0$, 则下列一定成立的为().

- A. $ef(\pi) > \pi f(e)$ B. $f(\pi) < f(e)$ C. $\frac{f(\pi)}{\pi} < \frac{f(e)}{e}$ D. $f(\pi) > f(e)$

【答案】A

【解析】设 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$,
 $\therefore g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} > 0$ 恒成立,
 $\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore g(\pi) > g(e)$,
即 $\frac{f(\pi)}{\pi} > \frac{f(e)}{e}$,
即 $ef(\pi) > \pi f(e)$.
故选A.

【标注】【知识点】利用导数求函数的单调性、单调区间；利用导数求单调性证不等式

19. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且在区间 $(0, +\infty)$ 上有 $3f(x) + xf'(x) > 0$ 恒成立，若 $g(x) = x^3 f(x)$ ，令 $a = g\left(\log_2\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ ， $b = g(\log_5 2)$ ， $c = g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 则 () .
- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

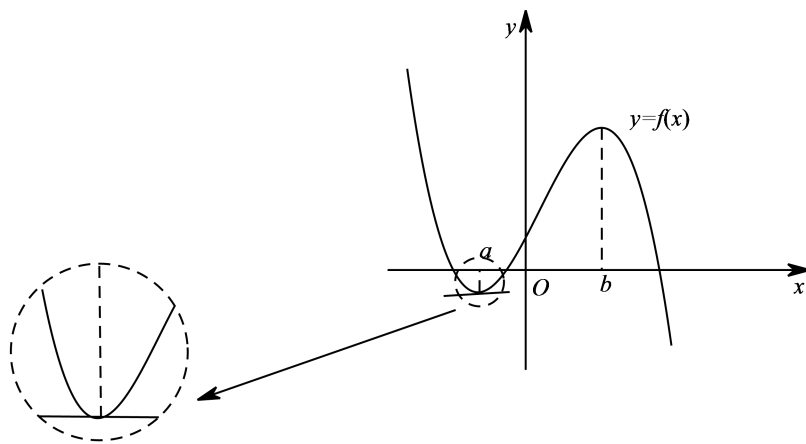
【答案】C

【解析】根据题意，函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，即 $f(-x) = -f(x)$ ，
则 $g(x) = x^3 f(x)$ 中， $g(-x) = (-x)^3 f(-x) = x^3 f(x) = g(x)$ ，则函数 $g(x)$ 为偶函数，
又由 $g(x) = x^3 f(x)$ ，其导数 $g'(x) = x^3 f'(x) + 3x^2 f(x) = x^2 [3f(x) + xf'(x)] > 0$ ，
则函数 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数；
 $a = g\left(\log_2\left(\frac{1}{e}\right)\right) = g(\log_2 e)$ ， $b = g(\log_5 2)$ ， $c = g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ，
又由 $\log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 < \log_2 e$ ，
则有 $b < c < a$.
故选：C.

【标注】【知识点】用单调性比较大小；复合函数的求导法则

四、函数极值（点）的概念

1. 函数极值点的概念



以 a, b 两点为例, 我们可以发现, 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = a$ 的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x = a$ 附近其他点的函数值都小, 而且在点 $x = a$ 附近的左侧 $f'(x) < 0$, 右侧 $f'(x) > 0$; 类似地, 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = b$ 的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x = b$ 附近其他点的函数值都大, 而且在点 $x = b$ 附近的左侧 $f'(x) > 0$, 右侧 $f'(x) < 0$.

由此启发我们引出极值的概念:

已知函数 $y = f(x)$, 设 x_0 是定义域内一点, 如果对于 x_0 附近的所有点 x , 都有 $f(x) < f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值, 并把 x_0 称为函数 $f(x)$ 的一个极大值点;

如果对于 x_0 附近的所有点 x , 都有 $f(x) > f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值, 并把 x_0 称为函数 $f(x)$ 的一个极小值点.

极大值与极小值统称为极值, 极大值点与极小值点统称为极值点.

极值反映了函数在某一点附近的大小情况, 刻画的是函数的局部性质.

例1

20. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数, 当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = (x+1)^3 e^{x+1}$. 那么函数 $f(x)$ 的极值点的个数是 ().

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】C

【解析】当 $x \leq 0$ 时, $f'(x) = 3(x+1)^2 e^{x+1} + e^{x+1}(x+1)^3 = (x+1)^2 e^{x+1}(x+4)$,

所以 $x = -4$ 是函数的一个极值点, 因为偶函数 $x = 4$ 也是一个, 又因为是偶函数 $x = 0$ 必是极值点, 综上所述共有3个极值点, 选C.

【标注】【知识点】直接求函数的极值(不含参); 函数奇偶性的运算

【素养】数学运算

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ex^2 + mx + 1 (m \in \mathbb{R})$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

(1) 若 $m = -3e^2$, 求函数 $f(x)$ 的极值;

【答案】 (1) 所以当 $x = -e$ 时, 函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(-e) = \frac{5}{3}e^3 + 1$;

当 $x = 3e$ 时, 函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(3e) = -9e^3 + 1$.

【解析】 (1) 当 $m = -3e^2$ 时, 由函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ex^2 - 3e^2x + 1$,

得 $f'(x) = x^2 - 2ex - 3e^2 = (x - 3e)(x + e)$.

令 $f'(x) > 0$, 得 $x < -e, x > 3e$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -e)$ 和 $(3e, +\infty)$.

令 $f'(x) < 0$, 得 $-e < x < 3e$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-e, 3e)$.

所以当 $x = -e$ 时, 函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(-e) = \frac{5}{3}e^3 + 1$;

当 $x = 3e$ 时, 函数 $f(x)$ 的极小值为 $f(3e) = -9e^3 + 1$.

【标注】 【知识点】直接求函数的极值 (不含参); 利用导数解决不等式恒成立问题

练1

22. 对于函数 $f(x) = e^{ax} - \ln x$, (a 是实常数), 下列结论正确的一个是 ().

A. $a = 1$ 时, $f(x)$ 有极大值, 且极大值点 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$

B. $a = 2$ 时, $f(x)$ 有极小值, 且极小值点 $x_0 \in (0, \frac{1}{4})$

C. $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 有极小值, 且极小值点 $x_0 \in (1, 2)$

D. $a < 0$ 时, $f(x)$ 有极大值, 且极大值点 $x_0 \in (-\infty, 0)$

【答案】 C

【解析】 $\because f(x) = e^{ax} - \ln x$,

$\therefore$ 函数的定义域为 $(0, +\infty)$,

函数的导数为 $f'(x) = ae^{ax} - \frac{1}{x}$,

若 $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - \ln x$,

则 $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$f'(1) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2}\sqrt{e} - 1 < 0$, $f'(2) = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e - 1) > 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 存在极小值, 且 $f'(x) = 0$ 的根在区间 $(1, 2)$ 内.

【标注】【知识点】直接求函数的极值（不含参）

2. 不可导型（选讲）

🔔 不连续型

🔔 例2

23. 判定 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 是否在0处取得极值？并判定是极大值还是极小值。

【答案】极大值。

【标注】【知识点】导数与极值

🔔 连续不可导型

🔔 例3

24. 判定 $f(x) = |x|$ 是否在0处取得极值？并判定是极大值还是极小值。

【答案】极小值。

【标注】【知识点】导数与极值

3. 可导型（可导必连续）

【知识导读】五大基本初等函数，经过加减乘除以及符合运算得到的函数都是连续可导函数。

📊 知识点睛

易错点辨析：

①极值点不是点坐标，是一个实数。

②从原函数来看，极值点是原函数图像拐弯的地方，但我们不能把它叫做拐点。【拐点：特指函数图像凹凸性发生变化的点，即为二阶导的零点，拐点是点坐标】

③从导函数来看，极值点必须是穿过 x 轴的零点。【驻点：特指函数一阶导的零点，驻点要求函数可导，驻点是实数】

④端点都不是极值点。

概念剖析

25. 函数的极大值一定比极小值大吗？请举例说明 .

【答案】略 .

【标注】【知识点】导数与极值

26. 一阶导等于0的点一定是极值点吗？请举例说明 .

【答案】不是， x^3 在0出不是极值点 .

【标注】【知识点】导数与极值

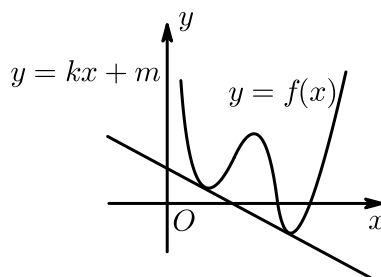
27. 最大值一定是极大值吗？请举例说明 .

【答案】不是，如果最大值在端点处取得就不是 .

【标注】【知识点】导数与极值

例4

28. 如图，已知直线 $y = kx + m$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切于两点，则 $F(x) = f(x) - kx$ 有 () .



A. 1个极大值点，2个极小值点

B. 2个极大值点，1个极小值点

C. 3个极大值点，无极小值点

D. 3个极小值点，无极大值点

【答案】A

【解析】由图可知 $f(x) - kx + m = 0$ 有2个零点，且 $m > 0$ ， $k < 0$ ，

且 $f(x) \geq kx + m$ ，即 $f(x) - kx \geq m$ ，

$\therefore F(x)$ 无零点，且 $f(x)$ 且有1个极大值点2个极小值点，

$F'(x) = f'(x) - k$ ，结合图象 $F(x)$ 有1个极大值点2个极小值点 .

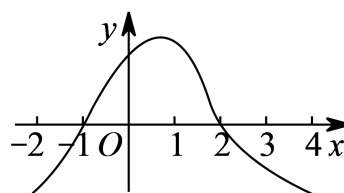
【标注】【知识点】导数与极值；函数零点的概念

练4

29. 下图是函数 $y = f(x)$ 的导函数的图象，给出下面四个判断．

- ① $f(x)$ 在区间 $[-2, -1]$ 上是增函数；
- ② $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极小值点；
- ③ $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上是增函数，在区间 $[2, 4]$ 上是减函数；
- ④ $x = 3$ 是 $f(x)$ 的极小值点．

其中正确判断的序号为（ ）．



A. ①②

B. ③④

C. ②③

D. ①④

【答案】C

【解析】注意：图象为 $f'(x)$ 的图象，

$f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 单调递增，

$f'(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 单调递减，

x 值左正右负，为极大值点，

x 值左负右正，为极小值点，

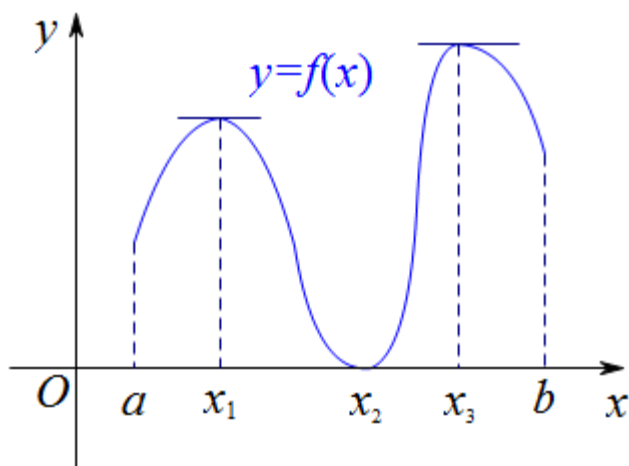
故选C．

【标注】【知识点】直接求函数的极值（不含参）

五、 函数极值的求解

下面我们研究如何利用导数求函数的极值．

观察下图：



我们可以看到曲线 $y = f(x)$ 在极值点 x_1, x_2, x_3 处的切线与 x 轴平行或重合，即在这些极值点处：

$$f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0, f'(x_3) = 0.$$

于是我们有如下结论：

设 x_0 是函数 $y = f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则必有 $f'(x_0) = 0$ 。

再观察一下再极大值点与极小值点附近函数及其导数的取值情况：

- (1) 在 $x = x_1$ 处， $f'(x_1) = 0$ ，且导函数符号为左正右负，因此原函数先增后减， x_1 是 $f(x)$ 的极大值点。
- (2) 在 $x = x_2$ 处， $f'(x_2) = 0$ ，且导函数符号为左负右正，因此原函数先减后增， x_2 是 $f(x)$ 的极小值点。
- (3) 在 $x = x_3$ 处， $f'(x_3) = 0$ ，且导函数符号为左正右负，因此原函数先增后减， x_3 是 $f(x)$ 的极大值点。

求极值的步骤

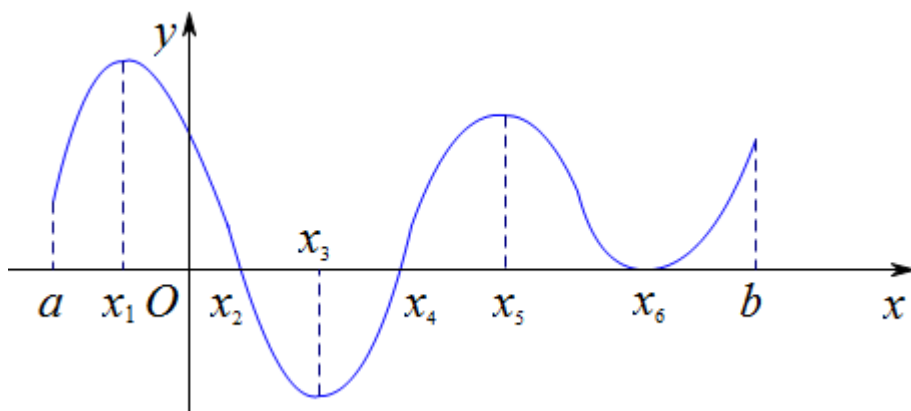
综合以上分析，我们得到求函数 $y = f(x)$ 极值的方法：

- (1) 确定函数的定义域；
- (2) 求导数 $f'(x)$ ；
- (3) 解出方程 $f'(x) = 0$ 在定义域内的全部实根；
- (4) 检测每个实根左右两侧导函数的符号，进而判断：
 - ①如果在某实根附近导数符号为左负右正，则该实根为极小值点；
 - ②如果在某实根附近导数符号为左正右负，则该实根为极大值点；
 - ③如果在某实根附近导数符号保持不变，则该实根不是极值点。

1. 图像与极值

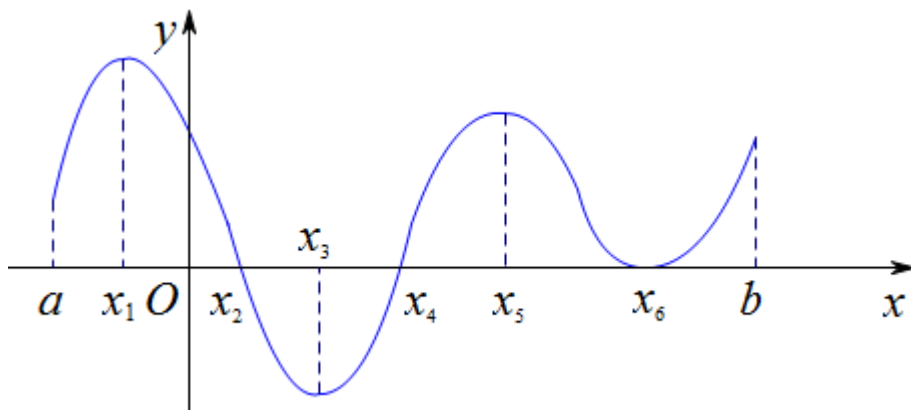
例1

下图是函数 $y = f(x)$ 的图像，试找出函数 $y = f(x)$ 的极值点，并指出哪些是极大值点，哪些是极小值点。



x_1 、 x_5 极大值； x_3 、 x_6 极小值

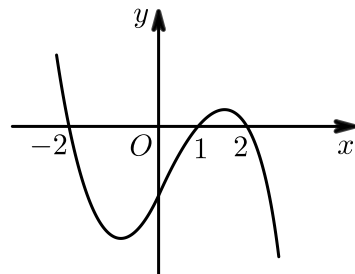
下图是导函数 $y = f'(x)$ 的图像，试找出函数 $y = f(x)$ 的极值点，并指出哪些是极大值点，哪些是极小值点。



x_2 极大值； x_4 极小值

练1

30. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，其导函数为 $f'(x)$ ，且函数 $y = (1 - x)f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论中一定成立的是（ ）。



- A. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$
- B. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$
- C. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$
- D. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

【答案】C

【解析】由图像可知： $x < -2$ 时， $f'(x) > 0$ ； $-2 < x < 1$ 时， $f'(x) < 0$ ； $1 < x < 2$ 时， $f'(x) < 0$ ； $x > 2$ 时， $f'(x) > 0$ 。即 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ ， $(2, +\infty)$ 上单调递增，在 $(-2, 2)$ 上单调递减。因此 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$ 。

【标注】【知识点】求解函数极值

2. 求解极值

例2

31. 若 $x = -2$ 是函数 $f(x) = (x^2 + ax - 1)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为（ ）。

A. -1

B. $-2e^{-3}$

C. $5e^{-3}$

D. 1

【答案】A

【解析】 $f'(x) = (2x + a)e^{x-1} + (x^2 + ax - 1)e^{x-1} = [x^2 + (a + 2)x + a - 1]e^{x-1}$ 。

$\because x = -2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点， $\therefore f'(-2) = 0$ ，

即 $(4 - 2a - 4 + a - 1) \cdot e^{-3} = 0$ ，得 $a = -1$ ，

$\therefore f(x) = (x^2 - x - 1)e^{x-1}$ ， $f'(x) = (x^2 + x - 2)e^{x-1}$ ，

由 $f'(x) > 0$ ，得 $x < -2$ 或 $x > 1$ ，由 $f'(x) < 0$ ，得 $-2 < x < 1$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增，在 $(-2, 1)$ 上单调递减，在 $(1, +\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 的极小值点为1，

$\therefore f(x)$ 的极小值为 $f(1) = -1$ 。

故选A。

32. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ 。

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处有极值10，求 a, b 的值。

【答案】(1) $a = 4, b = -11$ 。

【解析】(1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$ ，

$\therefore f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ ，

$\because f(x)$ 在 $x = 1$ 处有极值10，

$\therefore \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2a + b = 0 \\ 1 + a + b + a^2 = 10 \end{cases}$ ，

$$\text{解得} \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \end{cases} \text{或} \begin{cases} a = 4 \\ b = 11 \end{cases},$$

$$\text{当} \begin{cases} a = -3 \\ b = 3 \end{cases} \text{时}, f(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $x = 1$ 处不是极值, 舍去,

$$\text{当} \begin{cases} a = 4 \\ b = -11 \end{cases} \text{时}, f(x) = 3x^2 + 8x - 11 = (3x + 11)(x - 1), \text{成立}$$

$$\therefore a = 4, b = -11.$$

【标注】【知识点】利用导数解决不等式恒成立问题

练2

33. 设 $f(x) = ax^3 + \frac{3}{2}(2a-1)x^2 - 6x$.

(1) 当 $a = \frac{1}{3}$ 时, 求 $f(x)$ 的极大值和极小值.

【答案】 (1) $x = -2$ 时, $f(x)$ 的极大值为 $\frac{22}{3}$, $x = 3$ 时, $f(x)$ 的极小值为 $-\frac{27}{2}$.

【解析】 (1) 当 $a = \frac{1}{3}$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$, $f'(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

,

$x < -2$ 时, $f'(x) > 0$; $-2 < x < 3$ 时, $f'(x) < 0$; $x > 3$ 时, $f'(x) > 0$.

$\therefore x = -2$ 时, $f(x)$ 的极大值为 $\frac{22}{3}$, $x = 3$ 时, $f(x)$ 的极小值为 $-\frac{27}{2}$.

【标注】【知识点】直接求函数的极值 (不含参)

34. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $h(x) = x^2 - x + a$.

(1) 其求函数 $f(x)$ 的极值.

【答案】 (1) 极小值为 1, 无极大值.

【解析】 (1) $\because f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$, 令 $f'(x) = 0$,

$$\therefore x > 0,$$

$$\therefore x = 1,$$

所以 $f(x)$ 的极小值为 1, 无极大值.

【标注】【知识点】求参数范围 (含参二次型导函数); 直接求函数的极值 (不含参)

六、函数最值的求法

1. 最值与极值的辨析

- ①可导函数在闭区间内必有最值，不一定有极值．
- ②可导函数在开区间内不一定有最值，也不一定有极值．

【方法点睛】

- ①如果一个连续函数在某个闭区间内有最值，那么最值要么在极值点处取得，要么在端点处取得．
- ②如果一个连续函数有最值，没有端点，那么最值一定在极值点处取得．

【拓展一】

定义域为开区间的连续函数是否可能有最值，若有，请举例，若没有，请说明理由．

实例： $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ．

研究上例我们发现，函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 的最大值和最小值分别就是极大值和极小值．

由此我们得到这样的结论：开区间上连续函数若有最值，则最值一定在某些极值点处取得．

【拓展二】

若把上面结论中的“连续”两个字去掉，结论还正确么？若不正确，请举出反例．

反例：狄利克雷函数， $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q} \end{cases}$ ．

有了上面的分析，我们不难得到以下的结论：对于闭区间上连续的函数，最值其实是以极值和区间端点值形成的集合中的数量最大（小）的元素．借助于这条结论，就不难求解函数的最值了．

|| 可导函数闭区间最值求法

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 上可导，求其最值的步骤如下：

- 1．求出函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上的极值．
- 2．将所求的若干极值与 $f(a)$ 和 $f(b)$ 比较，数值最大的为最大值，数值最小的为最小值．

🗨 补充说明

若求开区间的最值，那么区间内最大的极大值即为最大值，最小的极小值即为最小值．

🗨 例1

35. 函数 $f(x) = \frac{6x}{1+x^2}$ 在区间 $[0, 3]$ 的最大值为（ ）．

A. 3

B. 4

C. 2

D. 5

【答案】A

【解析】 $f'(x) = \frac{6(1+x^2) - 6x \cdot (2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{6+6x^2-12x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{6-6x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-6(x+1)(x-1)}{(1+x^2)^2}$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, $(1, 3]$ 上单调递减,

$\therefore [f(x)]_{\max} = f(1) = \frac{6}{1+1} = 3$, 故选A.

【标注】【知识点】直接求函数的最值 (不含参)

36. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m , 则 $M + m =$ _____.

【答案】 $\ln 2 - \frac{1}{4}$

【解析】 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}x = \frac{2-x^2-x}{2(x+1)} = \frac{-(x+2)(x-1)}{2(x+1)}$,

则 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

$1 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

$f(0) = 0$, $f(1) = \ln 2 - \frac{1}{4}$, $f(2) = \ln 3 - 1 > 0$,

因此 $M = \ln 2 - \frac{1}{4}$, $m = 0$, 因此 $M + m = \ln 2 - \frac{1}{4}$.

【标注】【知识点】直接求函数的最值 (不含参)

练1

37. 函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的最大值为 ().

A. e^{-1}

B. e

C. e^2

D. $\frac{10}{3}$

【答案】A

【解析】 令 $y' = \frac{(\ln x)'x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$, 则 $x = e$,

当 $x > e$ 时, $y' < 0$,

当 $0 < x < e$ 时, $y' > 0$,

所以当 $x = e$ 时, 函数有极大值, 极大值为 $\frac{1}{e}$,

在定义域内只有一个极值, 所以 $y_{\max} = \frac{1}{e}$.

【标注】【知识点】利用导数求函数的最值