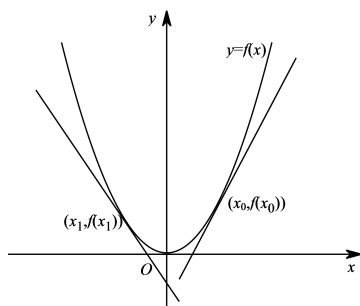


02单调性、极值与最值

一、函数的单调性与导数



如图，导数 $f'(x_0)$ 表示函数 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率．在 $x = x_0$ 处， $f'(x_0) > 0$ ，切线是“左下右上”式的，这时，函数 $f(x)$ 在 x_0 附近单调递增；在 $x = x_1$ 处， $f'(x_1) < 0$ ，切线是“左上右下”式的，这时，函数 $f(x)$ 在 x_1 附近单调递减．

一般地，函数的单调性与其导数的正负有如下关系：

在某个区间 (a, b) 内，如果 $f'(x) > 0$ ，那么函数 $y = f(x)$ 在这个区间内单调递增；如果 $f'(x) < 0$ ，那么函数 $y = f(x)$ 在这个区间内单调递减．（并非充要条件）

如果在某个区间内恒有 $f'(x) = 0$ ，那么函数 $f(x)$ 有什么特性？

【问题思考】

$f'(x) \geq 0$ 与 $f(x)$ 单调递增是什么关系？（充分不必要、必要不充分、充要条件）

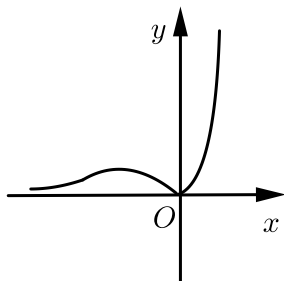
$f'(x) > 0$ 与 $f(x)$ 单调递增是什么关系？（充分不必要、必要不充分、充要条件）

1. 导数图像与原图像

例1

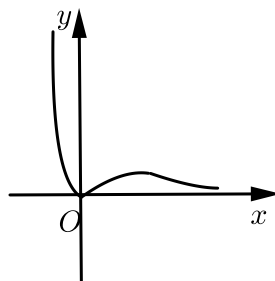
1. 函数 $f(x) = \frac{x^2 e^x}{2}$ 的大致图象为（ ）．

A.

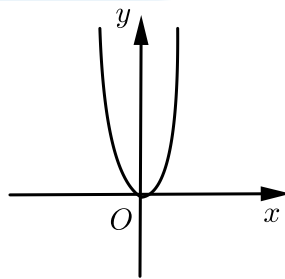
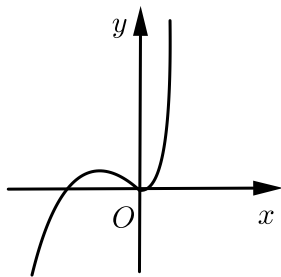


C.

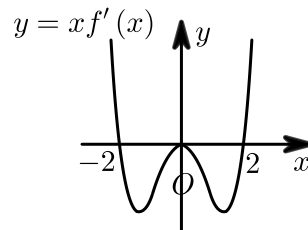
B.



D.



2. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = xf'(x)$ 的图象 (如图所示) 与 x 轴分别交于原点, 点 $(-2, 0)$ 和点 $(2, 0)$, 若 -3 和 3 是函数 $f(x)$ 的两个零点, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集 () .

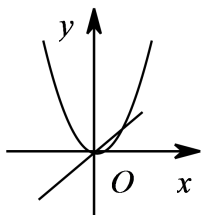


- A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$ C. $(-\infty, -3) \cup (0, 2)$ D. $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$

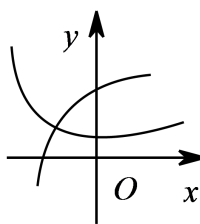
🔔 练1

3. 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数, 将 $y = f(x)$ 和 $y = f'(x)$ 的图像画在同一个直角坐标系中, 不可能正确的是 () .

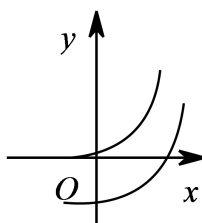
A.



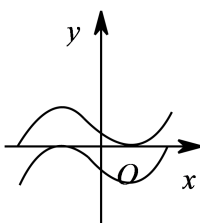
B.



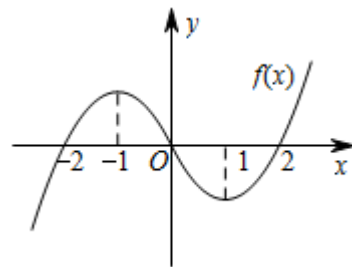
C.



D.



4. 已知 $\mathbf{R}$ 上可导函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则不等式 $(x^2 - 2x - 3) \cdot f'(x) > 0$ 的解集为 () .



- A. $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

- B. $(-\infty, -2) \cup (1, 3)$

C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (3, +\infty)$

D. $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty)$

二、求函数的单调区间的步骤

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域；
- (2) 求出导函数 $f'(x)$ 解析式，解方程 $f'(x) = 0$ ，求出该方程在定义域内的一切实根；
- (3) 将实根从小到大依次标在 x 轴上，画出导函数的大致图像；
- (4) 考察各个小区间上 $f'(x)$ 的符号，根据符号判断相应区间上的单调性。

1. 求解确定函数单调性

例1

5. 设函数 $f(x) = (x-1)e^x - x^2$. 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

6. 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ 的单调递减区间为 ().

A. $(-1, 1]$

B. $(0, 1]$

C. $[1, +\infty)$

D. $(0, +\infty)$

练1

7. 求下列函数的单调区间：

(1) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$;

(2) $y = 2x^2 - \ln x$.

2. 等价导函数变换

【技巧点睛】在导函数中，恒大于零的因式，可以直接“忽略”；若是恒小于零的因式，可以直接简记为负号。

【方法点睛】常见可“忽略”（恒大于0）因式： e^x ， x （含有 $\ln x$ ），二次函数（ $\Delta < 0$ ），平方的分母，一些常见切线模型【 $(e^x - x - 1)$ 、 $(\ln x - x + 1)$ 】。

例2 e^x 恒大于零

8. 函数 $f(x) = e^x(x^2 - 2x)$ 的单调减区间是 ().

A. $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$

B. $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, +\infty)$

C. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

D. $(-\infty, \sqrt{2})$

例3 定义域有断点

9. 研究 $f(x) = \frac{1}{x}$ 的图像与导函数正负性的关系.

【题型通解】由上题我们可知, 如果定义域出现断点, 那么单调性也要分开写.

🔔 例4 导函数分母是平方恒大于零

10. 求 $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ 的单调性.

🔔 例5 x 恒为正 (含有 $\ln x$)

11. 求 $f(x) = x^2 \ln x$ 的单调性.

3. 二次求导型

🔔 例6

12. 求 $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ 的单调性.

4. 利用导数判断单调性, 从而比较大小或求解不等式

🔔 例7

13. 设定义在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的函数 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 则不等式 $f(2x) < f(x-1)$ 的解集是 () .

A. $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

B. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

C. $\left(1 - \frac{\pi}{2}, \frac{1}{3}\right)$

D. $\left(-1, \frac{\pi}{4}\right)$

🔔 练7

14. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$, 设 $a = f(0.31^2)$, $b = -f(\log_{\frac{1}{2}} 0.31)$, $c = f(2 \ln 2)$, 则 a, b, c 的大小关系是 () .

A. $a > c > b$

B. $a > b > c$

C. $b > c > a$

D. $b > a > c$

三、 逆向构造新函数, 利用新函数性质求解

1. 逆用求导公式构造函数的常见模型

【1】 $[xf(x)]' = xf'(x) + f(x)$

【2】 $\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$

$$\text{【3】 } [x^n f(x)]' = x^{n-1} [x f'(x) + n f(x)]$$

$$\text{【4】 } \left[\frac{f(x)}{x^n} \right]' = \frac{x f'(x) - n f(x)}{x^{n+1}}$$

$$\text{【5】 } [e^x f(x)]' = e^x [f'(x) + f(x)]$$

$$\text{【6】 } \left[\frac{f(x)}{e^x} \right]' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$$

$$\text{【7】 } [\sin x \cdot f(x)]' = \cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x) = \cos x [f'(x) - \tan x \cdot f(x)]$$

$$\text{【8】 } [\cos x \cdot f(x)]' = \cos x \cdot f'(x) - \sin x \cdot f(x) = \cos x [f'(x) - \tan x \cdot f(x)]$$

$$\text{【9】 } [\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\text{【10】 } \forall x \in I, f'(x) < 1 \Leftrightarrow (f(x) - x)' < 0 \Rightarrow y = f(x) - x \text{ 在 } I \text{ 上单调递减};$$

$$\text{【11】 } \forall x \in I, f'(x) < x \Leftrightarrow \left(f(x) - \frac{1}{2}x^2 \right)' < 0 \Rightarrow y = f(x) - \frac{1}{2}x^2 \text{ 在 } I \text{ 上单调递减};$$

2. 利用不等式的对称性, 合理构造新函数:

$$\forall x_1, x_2 \in I, x_1 > x_2, f(x_1) - f(x_2) > g(x_1) - g(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - g(x_1) > f(x_2) - g(x_2) \Leftrightarrow y = f(x) - g(x) \\ \Leftrightarrow y = f(x) - g(x) \text{ 在 } I \text{ 上单增}$$

例1

15. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \in \mathbf{R})$ 的导函数, $f(-1) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $x f'(x) - f(x) < 0$, 则使得 $f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ B. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

16. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $y = f(x)$ 的导函数为 $y = f'(x)$, 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) + \frac{f(x)}{x} > 0$. 若 $a = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right)$, $b = -2f(-2)$, $c = \left(\ln \frac{1}{2}\right) f\left(\ln \frac{1}{2}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ().

- A. $a < b < c$ B. $b < c < a$ C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

17. 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-1) = 2015$, 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f'(x) < 3x^2$ 成立, 则不等式 $f(x) < x^3 + 2016$ 的解集为 ().

- A. $(-1, +\infty)$ B. $(-1, 0)$ C. $(-\infty, -1)$ D. $(-\infty, +\infty)$

练1

18. 已知函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 上可导且满足 $x f'(x) - f(x) > 0$, 则下列一定成立的为 ().

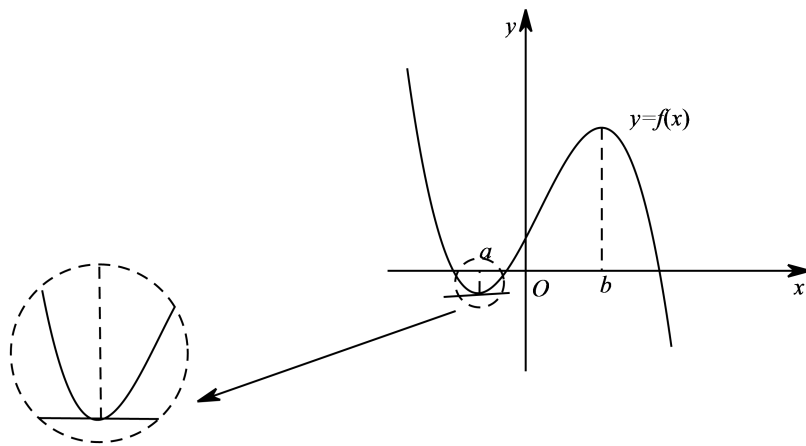
- A. $e f(\pi) > \pi f(e)$ B. $f(\pi) < f(e)$ C. $\frac{f(\pi)}{\pi} < \frac{f(e)}{e}$ D. $f(\pi) > f(e)$

19. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且在区间 $(0, +\infty)$ 上有 $3f(x) + x f'(x) > 0$ 恒成立, 若 $g(x) = x^3 f(x)$, 令 $a = g\left(\log_2\left(\frac{1}{e}\right)\right)$, $b = g(\log_5 2)$, $c = g\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 则 ().

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

四、函数极值（点）的概念

1. 函数极值点的概念



以 a, b 两点为例，我们可以发现，函数 $y = f(x)$ 在点 $x = a$ 的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x = a$ 附近其他点的函数值都小，而且在点 $x = a$ 附近的左侧 $f'(x) < 0$ ，右侧 $f'(x) > 0$ ；类似地，函数 $y = f(x)$ 在点 $x = b$ 的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x = b$ 附近其他点的函数值都大，而且在点 $x = b$ 附近的左侧 $f'(x) > 0$ ，右侧 $f'(x) < 0$ 。

由此启发我们引出极值的概念：

已知函数 $y = f(x)$ ，设 x_0 是定义域内一点，如果对于 x_0 附近的所有点 x ，都有 $f(x) < f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值，并把 x_0 称为函数 $f(x)$ 的一个极大值点；

如果对于 x_0 附近的所有点 x ，都有 $f(x) > f(x_0)$ ，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极小值，并把 x_0 称为函数 $f(x)$ 的一个极小值点。

极大值与极小值统称为极值，极大值点与极小值点统称为极值点。

极值反映了函数在某一点附近的大小情况，刻画的是函数的局部性质。

例1

20. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数，当 $x \leq 0$ 时， $f(x) = (x+1)^3 e^{x+1}$ 。那么函数 $f(x)$ 的极值点的个数是（ ）。

A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ex^2 + mx + 1 (m \in \mathbf{R})$ ， $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ 。

(1) 若 $m = -3e^2$ ，求函数 $f(x)$ 的极值；

练1

22. 对于函数 $f(x) = e^{ax} - \ln x$, (a 是实常数), 下列结论正确的一个是 ().

- A. $a = 1$ 时, $f(x)$ 有极大值, 且极大值点 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$
- B. $a = 2$ 时, $f(x)$ 有极小值, 且极小值点 $x_0 \in (0, \frac{1}{4})$
- C. $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 有极小值, 且极小值点 $x_0 \in (1, 2)$
- D. $a < 0$ 时, $f(x)$ 有极大值, 且极大值点 $x_0 \in (-\infty, 0)$

2. 不可导型 (选讲)

不连续型

例2

23. 判定 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 是否在 0 处取得极值? 并判定是极大值还是极小值.

连续不可导型

例3

24. 判定 $f(x) = |x|$ 是否在 0 处取得极值? 并判定是极大值还是极小值.

3. 可导型 (可导必连续)

【知识导读】五大基本初等函数, 经过加减乘除以及符合运算得到的函数都是连续可导函数.

知识点睛

易错点辨析:

- ①极值点不是点坐标, 是一个实数.
- ②从原函数来看, 极值点是原函数图像拐弯的地方, 但我们不能把它叫做拐点. 【拐点: 特指函数图像凹凸性发生变化的点, 即为二阶导的零点, 拐点是点坐标】
- ③从导函数来看, 极值点必须是穿过 x 轴的零点. 【驻点: 特指函数一阶导的零点, 驻点要求函数可导, 驻点是实数】
- ④端点都不是极值点.

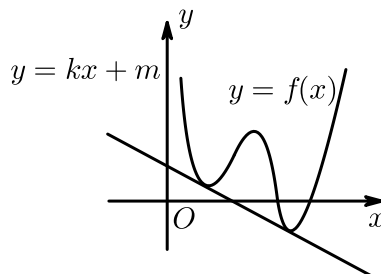
概念剖析

- 25. 函数的极大值一定比极小值大吗? 请举例说明.
- 26. 一阶导等于 0 的点一定是极值点吗? 请举例说明.

27. 最大值一定是极大值吗？请举例说明．

例4

28. 如图，已知直线 $y = kx + m$ 与曲线 $y = f(x)$ 相切于两点，则 $F(x) = f(x) - kx$ 有（ ）．



A. 1个极大值点，2个极小值点

B. 2个极大值点，1个极小值点

C. 3个极大值点，无极小值点

D. 3个极小值点，无极大值点

练4

29. 下图是函数 $y = f(x)$ 的导函数的图象，给出下面四个判断．

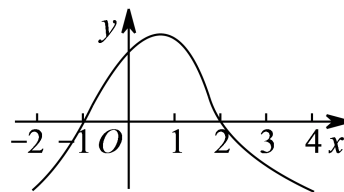
① $f(x)$ 在区间 $[-2, -1]$ 上是增函数；

② $x = -1$ 是 $f(x)$ 的极小值点；

③ $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上是增函数，在区间 $[2, 4]$ 上是减函数；

④ $x = 3$ 是 $f(x)$ 的极小值点．

其中正确判断的序号为（ ）．



A. ①②

B. ③④

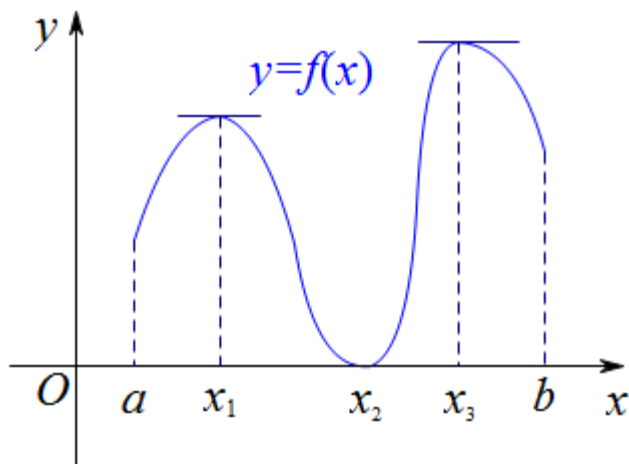
C. ②③

D. ①④

五、函数极值的求解

下面我们研究如何利用导数求函数的极值．

观察下图：



我们可以看到曲线 $y = f(x)$ 在极值点 x_1, x_2, x_3 处的切线与 x 轴平行或重合，即在这些极值点处：

$$f'(x_1) = 0, f'(x_2) = 0, f'(x_3) = 0.$$

于是我们有如下结论：

设 x_0 是函数 $y = f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则必有 $f'(x_0) = 0$ 。

再观察一下再极大值点与极小值点附近函数及其导数的取值情况：

- (1) 在 $x = x_1$ 处， $f'(x_1) = 0$ ，且导函数符号为左正右负，因此原函数先增后减， x_1 是 $f(x)$ 的极大值点。
- (2) 在 $x = x_2$ 处， $f'(x_2) = 0$ ，且导函数符号为左负右正，因此原函数先减后增， x_2 是 $f(x)$ 的极小值点。
- (3) 在 $x = x_3$ 处， $f'(x_3) = 0$ ，且导函数符号为左正右负，因此原函数先增后减， x_3 是 $f(x)$ 的极大值点。

求极值的步骤

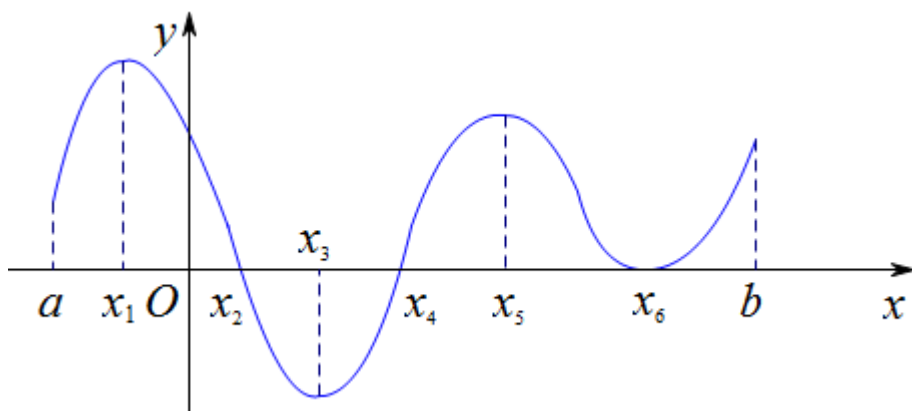
综合以上分析，我们得到求函数 $y = f(x)$ 极值的方法：

- (1) 确定函数的定义域；
- (2) 求导数 $f'(x)$ ；
- (3) 解出方程 $f'(x) = 0$ 在定义域内的全部实根；
- (4) 检测每个实根左右两侧导函数的符号，进而判断：
 - ①如果在某实根附近导数符号为左负右正，则该实根为极小值点；
 - ②如果在某实根附近导数符号为左正右负，则该实根为极大值点；
 - ③如果在某实根附近导数符号保持不变，则该实根不是极值点。

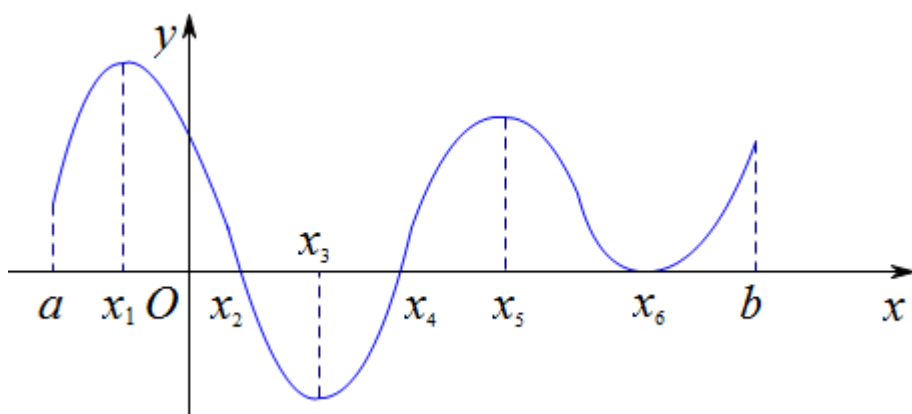
1. 图像与极值

例1

下图是函数 $y = f(x)$ 的图像，试找出函数 $y = f(x)$ 的极值点，并指出哪些是极大值点，哪些是极小值点。

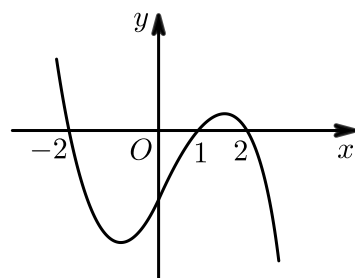


下图是导函数 $y = f'(x)$ 的图像，试找出函数 $y = f(x)$ 的极值点，并指出哪些是极大值点，哪些是极小值点。



练1

30. 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，其导函数为 $f'(x)$ ，且函数 $y = (1 - x)f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论中一定成立的是（ ）。



- A. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(1)$
- B. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(1)$
- C. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-2)$ 和极小值 $f(2)$
- D. 函数 $f(x)$ 有极大值 $f(2)$ 和极小值 $f(-2)$

2. 求解极值

例2

31. 若 $x = -2$ 是函数 $f(x) = (x^2 + ax - 1)e^{x-1}$ 的极值点, 则 $f(x)$ 的极小值为 ().

A. -1

B. $-2e^{-3}$

C. $5e^{-3}$

D. 1

32. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + a^2$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处有极值 10, 求 a, b 的值.

练2

33. 设 $f(x) = ax^3 + \frac{3}{2}(2a-1)x^2 - 6x$.

(1) 当 $a = \frac{1}{3}$ 时, 求 $f(x)$ 的极大值和极小值.

34. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2\ln x$, $h(x) = x^2 - x + a$.

(1) 其求函数 $f(x)$ 的极值.

六、函数最值的求法

1. 最值与极值的辨析

①可导函数在闭区间内必有最值, 不一定有极值.

②可导函数在开区间内不一定有最值, 也不一定有极值.

【方法点睛】

①如果一个连续函数在某个闭区间内有最值, 那么最值要么在极值点处取得, 要么在端点处取得.

②如果一个连续函数有最值, 没有端点, 那么最值一定在极值点处取得.

【拓展一】

定义域为开区间的连续函数是否可能有最值, 若有, 请举例, 若没有, 请说明理由.

实例: $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.

研究上例我们发现, 函数 $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 的最大值和最小值分别就是极大值和极小值.

由此我们得到这样的结论: 开区间上连续函数若有最值, 则最值一定在某些极值点处取得.

【拓展二】

若把上面结论中的“连续”两个字去掉, 结论还正确么? 若不正确, 请举出反例.

反例: 狄利克雷函数, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{C}_{\mathbf{R}}\mathbf{Q} \end{cases}$.

有了上面的分析, 我们不难得到以下的结论: 对于闭区间上连续的函数, 最值其实是以极值和区间端点值形成的集合中的数量最大(小)的元素. 借助于这条结论, 就不难求解函数的最值了.

可导函数闭区间最值求法

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 求其最值的步骤如下:

1. 求出函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上的极值.
2. 将所求的若干极值与 $f(a)$ 和 $f(b)$ 比较, 数值最大的为最大值, 数值最小的为最小值.

补充说明

若求开区间的最值, 那么区间内最大的极大值即为最大值, 最小的极小值即为最小值.

例1

35. 函数 $f(x) = \frac{6x}{1+x^2}$ 在区间 $[0, 3]$ 的最大值为 ().

- A. 3 B. 4 C. 2 D. 5

36. 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2$ 在 $[0, 2]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m , 则 $M+m =$ _____ .

练1

37. 函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 的最大值为 ().

- A. e^{-1} B. e C. e^2 D. $\frac{10}{3}$