

01导数的定义与运算及几何意义

一、导数的概念

1. 函数的平均变化率

一般地, 已知函数 $y = f(x)$, 记 x_0, x_1 是其定义域内不同的两点, 记 $\Delta x = x_1 - x_0, \Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, 则当 $\Delta x \neq 0$ 时, 商 $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 称作函数 $y = f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ (或 $[x_0 + \Delta x, x_0]$) 的平均变化率.

【温馨提示】这里 $\Delta x, \Delta y$ 可正, 可负, 但 $\Delta x \neq 0, \Delta y$ 可以为0.

例1

1. 求下列函数在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均变化率

(1) $f(x) = x^2$.

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$.

(3) $f(x) = \sqrt{x}$.

2. 求函数 $f(x) = x^2$ 在 $x = 1, 2, 3$ 附近的平均变化率, 判断在哪一点附近的平均变化率最大.

A. 1点附近平均变化率最大

B. 2点附近平均变化率最大

C. 3点附近平均变化率最大

D. 3个点附近平均变化率相同

练1

3. 求下列函数在区间 $[x_0, x_0 + \Delta x]$ 上的平均变化率

(1) $f(x) = x$.

(2) $f(x) = x^3$.

2. 函数的瞬时变化率、函数的导数

设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 附近有定义, 当自变量在 $x = x_0$ 附近改变量为 Δx 时, 函数值相应的改变 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

如果当 Δx 趋近于0时, 平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 趋近于一个常数 l (也就是说平均变化率与某个常数 l 的差的绝对值越来越小, 可以小于任意小的正数), 那么常数 l 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0 的瞬时变化率.

“当 Δx 趋近于零时， $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 趋近于常数 l ” 可以用符号“ $\rightarrow$ ”记作：

“当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时， $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow l$ ”，或记作“ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = l$ ”，符号“ $\rightarrow$ ”读作“趋近于”。

函数在 x_0 的瞬时变化率，通常称为 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数，并记作 $f'(x_0)$ 。这时又称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处是可导的。于是上述变化过程，可以记作：

“当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时， $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$ ”

或

“ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ ”

例2

4. 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可导，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = ()$

A. $\frac{1}{3} f'(x_0)$

B. $3f'(x_0)$

C. $f'(x_0)$

D. 0

练2

5. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 等于 $()$ 。

A. $f'(x_0)$

B. $-f'(x_0)$

C. $f(x_0)$

D. $-f(x_0)$

3. 可导与导函数

如果 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内每一点都是可导的，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 可导。这样，对开区间 (a, b) 内每个值 x ，都对应一个确定的导数 $f'(x)$ 。于是，在区间 (a, b) 内， $f'(x)$ 构成一个新的函数，我们把这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的导函数。记为 $f'(x)$ 或 y' （或 y_x' ）。

【温馨提示】函数的导数即是函数的导函数，是对某一区间内任意一点 x 而言的，函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内每一点都可导，是指对于区间 (a, b) 内每一个确定的值 x_0 ，都对应着一个确定的导数值 $f'(x_0)$ ，根据函数定义，在 (a, b) 内就构成了一个新的函数，即为函数的导函数。

二、导数的运算法则

1. 基本初等函数的导数公式表

初等函数是由基本初等函数经过四则运算、乘方、开方和各种复合运算构成。初等函数的导数可以经过基本初等函数导数的运算而求得。我们在知道基本初等函数的导数公式以及复合函数的求导法则的前提下，利用导数的四则运算法则，可以求得许多较为复杂的函数的导数。

下面我们来研究一下导数的四则运算法则.

为了方便, 今后我们可以直接使用下面的基本初等函数的导数公式表:

1. 若 $f(x) = c$ (c 为常数), 则 $f'(x) = 0$;
2. 若 $f(x) = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{Q}^*$), 则 $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$;
3. 若 $f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x$;
4. 若 $f(x) = \cos x$, 则 $f'(x) = -\sin x$;
5. 若 $f(x) = a^x$, 则 $f'(x) = a^x \ln a$;
6. 若 $f(x) = e^x$, 则 $f'(x) = e^x$;
7. 若 $f(x) = \log_a x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$;
8. 若 $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x}$.

例1

6. 下列求导运算错误的是 ().

- A. $x' = 1$ B. $(\log_2 x)' = \frac{1}{x} \ln 2$ C. $(e^x)' = e^x$ D. $(\sin x)' = \cos x$

练2

7. 下列求导运算正确的是 ().

- A. $(2^x)' = 2^x$ B. $(\cos x)' = \sin x$ C. $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10}$ D. $(x^{-5})' = -\frac{1}{5} x^{-6}$

2. 函数的四则运算求导法则

函数和或差求导法则

设 $f(x)$, $g(x)$ 是可导的, 则 $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$.

例2

8. 若 $f(x) = \sin x - \cos x$, 则 $f'(x)$ 等于 ().

- A. $\sin x$ B. $\cos x$ C. $\sin x + \cos x$ D. $2 \sin x$

9. 若 $f(x) = 2x f'(1) + x^2$, 则 $f'(0)$ 等于 ().

- A. 2 B. 0 C. -2 D. -4

10. 若函数 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ 满足 $f'(1) = 2$, 则 $f'(-1) =$ ().

- A. -1 B. -2 C. 2 D. 0

练2

11. 求下列函数的导数.

(1) $y = x^2 - \sin x$.

(2) $f(x) = x^2 + 2x + a \ln x$.

🔔 函数积的求导法则

设 $f(x)$, $g(x)$ 是可导的, 则 $[f(x)g(x)]' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$.

由上面的法则能够得到: $[Cf(x)]' = Cf'(x)$, 即常数与函数之积的导数, 等于常数乘以函数的导数.

🔔 例3

12. 求下列函数的导数.

(1) $y = x^3 \cos x$.

(2) $y = x \ln x - x$.

(3) $f(x) = (x^2 - 2ax)e^x$.

13. 设函数 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, (a 、 b 、 c 是两两不等的常数), 则

$$\frac{a}{f'(a)} + \frac{b}{f'(b)} + \frac{c}{f'(c)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

🔔 练3

14. 函数 $f(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)$ 的导数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

🔔 函数的商的求导法则

设 $f(x)$, $g(x)$ 是可导的, $g(x) \neq 0$, 则 $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f(x)'g(x) - f(x)g(x)'}{g^2(x)}$.

🔔 例4

15. 求下列函数的导数.

(1) $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$.

(2) $y = \frac{e^x + 1}{1 - e^x}$.

16. 求下列函数的导数.

(1) $f(x) = \tan x$

(2) $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{e^x}$

🔔 练4

17. $y = \frac{x^2}{\sin x}$ 的导数 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 复合函数的求导法则

例5

【问题思考】 如何求 $y = \ln(x+2)$ 的导数呢？（它是基本初等函数吗？）

若设 $u = x + 2 (x > -2)$ ，则 $y = \ln u$ 。从而 $y = \ln(x+2)$ 可以看成是由 $y = \ln u$ 和 $u = x + 2$ ($x > -2$) 经过“复合”得到的。即 y 可以通过中间变量 u 表示为自变量 x 的函数。

如果把 y 与 u 的关系记作 $y = f(u)$ ， u 和 x 的关系记作 $u = g(x)$ ，那么这个“复合”过程可表示为 $y = f(u) = f(g(x)) = \ln(x+2)$ 。

我们遇到的许多函数都可以看成是由两个函数经过“复合”得到的。例如，函数 $y = (2x+3)^2$ 由 $y = u^2$ 和 $u = 2x+3$ “复合”而成，等等。

我们无法用现有的方法求函数 $y = \ln(x+2)$ 的导数。下面，我们先分析这个函数的结构特点。

一般地，对于两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ ，如果通过变量 u ， y 可以表示成 x 的函数，那么称这个函数为函数 $y = f(u)$ 的 $u = g(x)$ 的复合函数，记作 $y = f(g(x))$ 。

复合函数 $y = f(g(x))$ 的导数和函数 $y = f(u)$ ， $u = g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (y'_x 表示 y 对 x 的导数)，即 y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积。

由此可得， $y = \ln(x+2)$ 对 x 的导数等于 $y = \ln u$ 对 u 的导数与 $u = x+2$ 对 x 的导数的乘积，即 $y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\ln u)' \cdot (x+2)' = \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{1}{x+2}$ 。

18. 函数 $y = (1 - \sin x)^2$ 的导数是 ()。

A. $y = 2 \sin 2x - \cos x$

B. $y = \sin 2x + 2 \cos x$

C. $y = 2 \sin 2x - 2 \cos x$

D. $y = \sin 2x - 2 \cos x$

19. 已知函数 $f(x) = (x - \sqrt{2x-1})e^{-x} (x \geq \frac{1}{2})$ 。

(1) 求 $f(x)$ 的导函数。

20. 已知函数 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$ ，则 $f(x)$ 的解析式为 _____。

练5

21. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ ，则 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的导数 $f'(2) =$ _____。

22. 函数 $f(x) = 2xf'(e) + \ln x$ ，则 $f(e) =$ ()。

A. $-e$

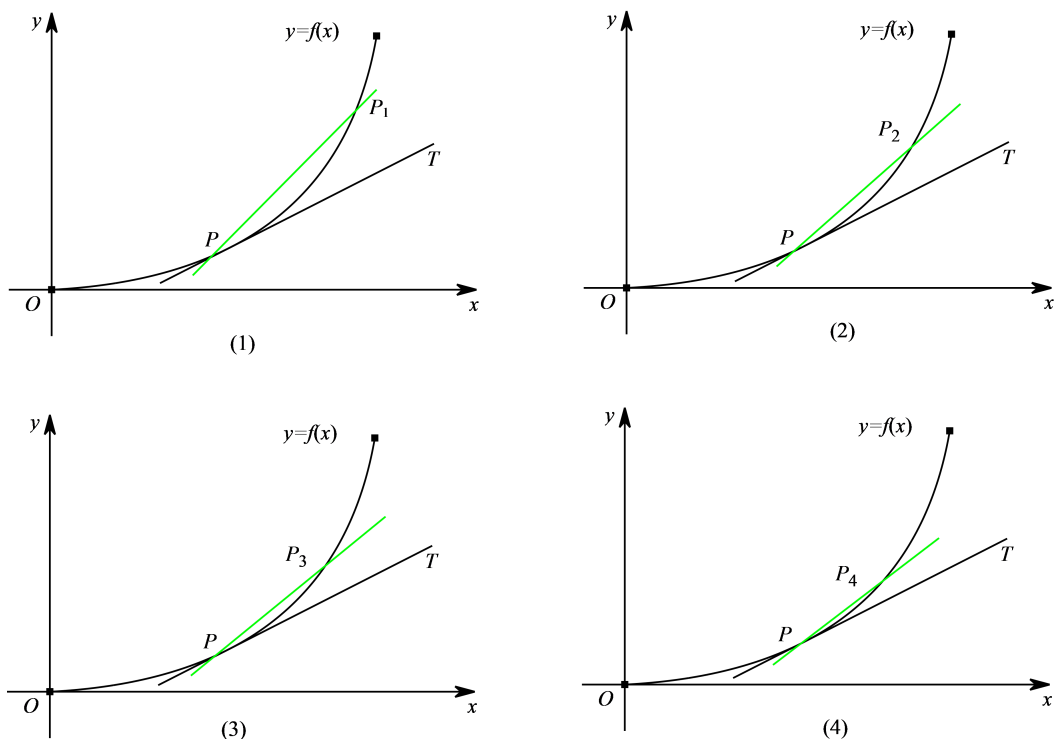
B. e

C. -1

D. 1

三、导数的几何意义

观察：如图，当点 $P_n(x_n, f(x_n))$ ($n = 1, 2, 3, 4$) 沿着曲线 $f(x)$ 趋近于点 $P(x_0, f(x_0))$ 时，割线 PP_n 的变化趋势是什么？



我们发现，当点 P_n 趋近于点 P 时，割线 PP_n 趋近于确定的位置，这个确定位置的直线 PT 称为点 P 处的切线。值得关注的问题是，割线 PP_n 的斜率与切线 PT 的斜率 k 有什么关系呢？

容易知道，割线 PP_n 的斜率是 $k_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ 。

当点 P_n 无限趋近于点 P 时， k_n 无限趋近于切线 PT 的斜率。因此，函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数就是切线 PT 的斜率 k ，即 $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ 。

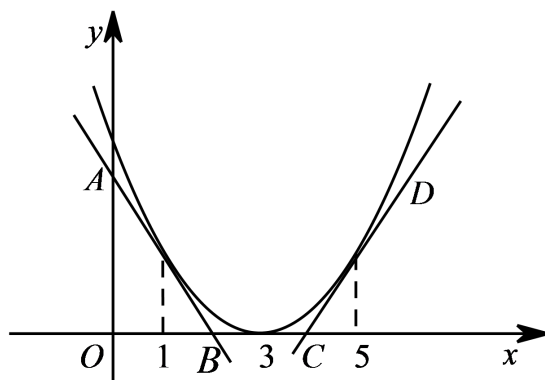
继续观察图，可以发现，在点 P 附近， PP_2 比 PP_1 更贴近曲线 $f(x)$ ， PP_3 比 PP_2 更贴近曲线 $f(x)$过点 P 的切线 PT 最贴近点 P 附近的曲线 $f(x)$ 。因此，在点 P 附近，曲线 $f(x)$ 就可以用过点 P 的切线 PT 近似代替。

从求函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处导数的过程可以看到，当 $x = x_0$ 时， $f'(x_0)$ 是一个确定的数，这样，当 x 变化时， $f'(x)$ 便是 x 的一个函数，我们称它为 $f(x)$ 的导函数（简称导数）。 $y = f(x)$ 的导函数有时也记作 y' ，即 $f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ 。

例1

切线斜率

23. 函数 $f(x)$ 的图象在 $x = 3$ 处与 x 轴相切, 在 $x = 1$ 与 $x = 5$ 处的切线分别为 AB , CD , 其中 A, B, C, D 的坐标分别为 $(0, 3), (2, 0), (4, 0), (6, 3)$, 如图, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}}$; $f'(3) = \underline{\hspace{2cm}}$; $f'(5) = \underline{\hspace{2cm}}$.



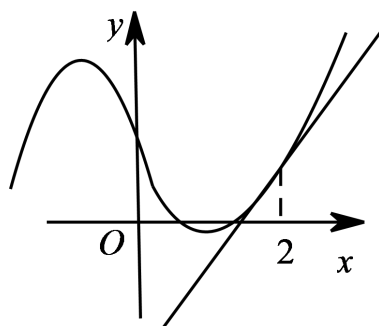
24. 设函数 $f(x) = [ax^2 - (3a + 1)x + 3a + 2]e^x$.
 (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线的斜率为 0, 求 a 的值.

|| 切线倾斜角取值范围

25. 已知点 P 在曲线 $y = \frac{4}{e^x + 1}$ 上, α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角, 则 α 的取值范围是 ().
 A. $[0, \frac{\pi}{4})$ B. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ C. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ D. $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$

🗣 练1

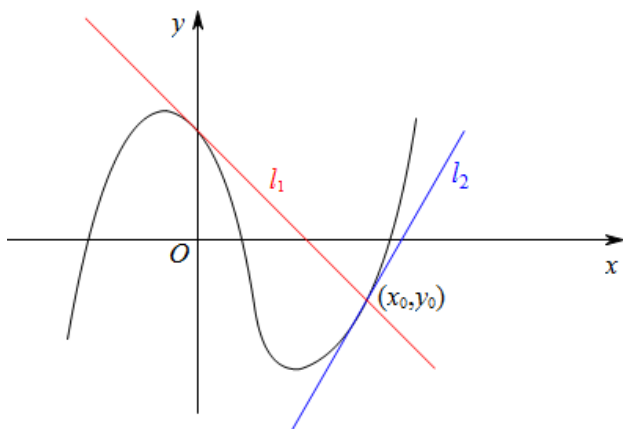
26. 如图, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(2, f(2))$ 处的切线方程是 $y = 2x - 3$, $f(2) + f'(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.



27. 点 P 在曲线 $y = x^3 - x + \frac{2}{3}$ 上移动, 在点 P 处的切线的倾斜角为 α , 则 α 的取值范围是 ().
 A. $[0, \frac{\pi}{2}]$ B. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ C. $[\frac{3\pi}{4}, \pi)$ D. $[0, \frac{\pi}{2}) \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$

四、求曲线指定位置的切线方程

如下图：



对于函数 $y = f(x)$ 图像上一点 (x_0, y_0) ，曲线在点 (x_0, y_0) 处的切线为 l_2 ；而曲线过点 (x_0, y_0) 的切线方程应为 l_1 和 l_2 。从这个事实中你体会到二者的区别联系以及求解曲线指定位置切线方程的关键了么？

1. 求解函数 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程

根据导数的几何意义，函数 $y = f(x)$ 图像上一点 (x_0, y_0) 处的切线斜率为 $f'(x_0)$ ，因此可直接根据点斜式写出直线方程： $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ；

特别地，若函数在该点（不可导）切线斜率不存在，则切线方程为 $x = x_0$ 。

如，函数 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 在 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $x = 1$ 。

例1

28. 已知曲线 $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ 上一点 $A(1, 2)$ ，曲线在点 A 处的切线方程是 _____。

29. 设函数 $f(x) = x^3 + (a - 1)x^2 + ax$ ，若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为（ ）。

A. $y = -2x$

B. $y = -x$

C. $y = 2x$

D. $y = x$

练1

30. 已知 $a \in \mathbf{R}$ ，设函数 $f(x) = ax - \ln x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线为 l ，则 l 在 y 轴上的截距为 _____。

31. 已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x < 0$ 时， $f(x) = \ln(-x) + 3x$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, -3)$ 处的切线方程是 _____。

2. 求解函数 $y = f(x)$ 经过点 (x_0, y_0) 的切线方程

此时应该检验点 (x_0, y_0) 是否在曲线上，即检验 $y_0 = f(x_0)$ 是否成立；

若点 (x_0, y_0) 在曲线上, 则此时需要针对切点是否为 (x_0, y_0) 进行分类讨论:

①若 (x_0, y_0) 为切点, 则由1的分析可得切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$;

②若 (x_0, y_0) 并非切点, 则此时应预设切点, 设切点坐标为 (a, b) , 则此时应该满足三个条件:

$$\begin{cases} b = f(a) \\ f'(x) = \frac{b-y_0}{a-x_0}, \text{由这个方程组可解得} a, b \text{的值, 进而求出切线方程.} \\ y_0 = f(x_0) \end{cases}$$

例2

32. 已知曲线 $f(x) = \ln x$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线经过点 $(0, -1)$, 则 x_0 的值为().

A. $\frac{1}{e}$

B. 1

C. e

D. 10

33. 直线 l 经过点 $A(t, 0)$, 且与曲线 $y = x^2$ 相切, 若直线 l 的倾斜角为 45° , 则 $t =$ _____.

练2

34. 曲线 $f(x) = x^3 - x^2$ 过点 $(1, 0)$ 的切线有_____条.

五、切线应用&变式

1. 求解含参问题

例1

35. 已知函数 $f(x) = \frac{a(x-1)}{x^2}$, 其中 $a > 0$. 若直线 $x - y - 1 = 0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 求实数 a 的值.

2. 切线的位置关系问题

例2

36. 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 在 $(1, 2)$ 处的切线与直线 $y = x - 2$ 平行, 则 $b =$ _____, $c =$ _____.

37. 已知函数 $f(x) = e^x \cdot (a + \frac{1}{x} + \ln x)$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线与直线 $y = -\frac{x}{e}$ 垂直, 求 a 的值.

练2

38. 已知函数 $f(x) = x - 1 + ae^x$.

(1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线平行于 x 轴, 求 a 的值.

3. 公切线问题

例3

39. 若存在过点 $(1, 0)$ 的直线与曲线 $y = x^3$ 和 $y = ax^2 + \frac{15}{4}x - 9$ 都相切, 求实数 a 的值.

40. 已知函数 $f(x) = ax^2 + 2$, $g(x) = x^3 + bx$, 若曲线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 在它们的交点 $(1, c)$ 处具有公共切线.

(1) 求 a, b 的值.

练3

41. 已知曲线 $y = x + \ln x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与曲线 $y = ax^2 + (a + 2)x + 1$ 相切, 则 $a =$ _____.

4. 图像交点个数问题

例4

42. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$, 则方程 $f(x) = ax$ 恰有两个不同的实根时, 实数 a 的取值范围

是 ().

A. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

B. $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{e}\right)$

C. $\left(0, \frac{1}{4}\right]$

D. $\left[\frac{1}{4}, e\right)$

练4

43. 已知函数 $y = kx$ 图象与函数 $y = \ln x$ 图象有两个交点, 则 k 的取值范围是 _____.

5. 求解距离问题

例5

44. 曲线 $y = \ln(2x - 1)$ 上的点到直线 $2x - y + 3 = 0$ 的最短距离等于 ().

A. 2

B. $\sqrt{5}$

C. $\sqrt{2}$

D. 1

45. 已知实数 a, b, c, d 满足 $b = a - 2e^a$, $d = 2 - c$, 其中 e 是自然对数的底数, 则

$\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$ 的最小值为 ().

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{3}$

D. 8