

03二项式定理练习题

一、二项式定理

1. $(2a^3 - b^2)^7$ 的二项展开式中的第5项为 _____ .

【答案】 $280a^9b^8$

【解析】 略 .

【标注】 【知识点】 求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

2. 设 $(1-x)^6 = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_7x^6$, 则 $a_2 = (\quad)$.

A. -1

B. 1

C. -6

D. 6

【答案】 C

【解析】 $(1-x)^6 = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_7x^6$,

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r = C_6^r (-1)^r \cdot x^r ,$$

$$\text{当 } r=1 \text{ 时, } T_2 = C_6^2 (-1) \cdot x = -6x ,$$

$$\therefore a_2 = -6 ,$$

故选C .

【标注】 【知识点】 求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

3. 二项式 $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x}\right)^8$ 的展开式的常数项是 _____ .

【答案】 7

【解析】 二项式 $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2x}\right)^8$ 的展开式中的第 $r+1$ 项为

$$T_{r+1} = C_8^r (\sqrt[3]{x})^{8-r} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^r = \frac{1}{2^r} C_8^r x^{\frac{8-4r}{3}} ,$$

$$\text{当 } \frac{8-4r}{3} = 0 , \text{ 即 } r=2 \text{ 时,}$$

$$T_{r+1} \text{ 为常数项, 因此该二项式的展开式中的常数项为 } T_3 = \frac{1}{2^2} \times C_8^2 = 7 .$$

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

4. 已知 $(x+2)^6 = a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_6(x+1)^6$, 则 $a_3 =$ _____ (用数字作答) .

【答案】 20

【解析】 依题意：

当 $x+1=t$, 则 $x+2=t+1$

$$\therefore (t+1)^6 = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_6t^6$$

$$\therefore (t+1)^6 \text{的展开式的通项 } T_r = C_6^r t^r$$

$$\text{因此 } a_3 = C_6^3 = 20 .$$

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数；二项式定理的展开式

5. 已知 $(1+x)(1-2x)^6 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_7(x-1)^7$, 则 $a_3 =$ _____ .

【答案】 380

$$\text{【解析】 } \because (1+x)(1-2x)^6 = [(x-1)+2][2(x-1)+1]^6 ,$$

$$\therefore [(x-1)+2][2(x-1)+1]^6 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_7(x-1)^7 ,$$

$$\therefore a_3 = C_6^2 2^2 + 2C_6^3 2^3 = 60 + 320 = 380 ,$$

故答案为：380 .

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

6. 在 $\left(4x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, x^{-3} 的系数为 _____ . (用数字作答)

【答案】 -24

$$\text{【解析】 其展开式的通项公式 } T_{r+1} = C_6^r (4x^2)^{6-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_6^r 4^{6-r} (-1)^r x^{12-3r} ,$$

$$\text{令 } 12-3r = -3, \text{ 即 } r = 5, \text{ 可得 } x^{(-3)} \text{ 系数为 } C_6^5 4^{6-5} (-1)^5 = -24 .$$

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

7. $(x - \sqrt{2}y)^8$ 的展开式中 x^6y^2 项的系数是 () .

A. 56

B. -56

C. 28

D. -28

【答案】 A

【解析】 $C_8^2 x^6 (-\sqrt{2}y)^2 = 56x^6 y^2$,

故选择A .

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

8. 二项式 $(x - \frac{a}{x})^8$ 的展开式中 x^2 的系数是 -7 , 则 $a = (\quad)$.

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. -1

【答案】 B

【解析】 $\because$ 二项式展开式通项公式为 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$

$\therefore$ 该二项式展开式通项公式为 $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} \cdot \left(-\frac{a}{x}\right)^r = C_8^r \cdot (-1)^r \cdot a^r \cdot x^{8-2r}$,

$\therefore x^2$ 系数为 -7 , $\therefore$ 当 $r = 3$ 时 , $C_8^3 (-1)^3 \cdot a^3 = 7$, $\therefore a = \frac{1}{2}$.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

9. 在 $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)^9$ 的展开式中 , x^3 的系数 $\frac{9}{4}$, 则实数 $a = (\quad)$.

A. $-\frac{1}{2}$

B. 4

C. 12

D. 36

【答案】 B

【解析】 $\left(\frac{a}{x} - \sqrt{\frac{x}{2}}\right)^9$ 的展开式的通项为 :

$T_{r+1} = C_9^r \cdot (-1)^r \cdot a^{9-r} \cdot 2^{-\frac{r}{2}} \cdot x^{\frac{3r}{2}-9}$,

令 $\frac{3r}{2} - 9 = 3$, 得 $r = 8$.

得 x^3 的系数是 $9a \times \frac{1}{16} = \frac{9}{4}$,

$a = 4$.

【标注】【知识点】求二项式展开式的特定项 ; 求项的系数或二项式系数

二、二项式系数性质

10. $(2x + \frac{1}{x^2})^9$ 的展开式中二项式系数最大项是 $(\quad)$.

A. 第5项

B. 第10项

C. 第5和6项

D. 第9和10项

【答案】C

【解析】展开式中共有 $9 + 1 = 10$ 项，则二项式系数最大的为中间两项，即第5和第6项。
故选C.

【标注】【知识点】二项式系数的性质；求二项式展开式的特定项

11. 已知 $(1 - 2x)^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 展开式中 x^3 的系数为 -80 ，则展开式中所有项的二项式系数之和为() .

A. 64

B. 32

C. 1

D. -1

【答案】B

【解析】由 $(1 - 2x)^n$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_n^r \cdot (-2x)^r$ ，取 $r = 3$ ，可得展开式中 x^3 的系数为 $-8C_n^3 = -80$ ，得 $n = 5$ 。
 $\therefore$ 展开式中所有项的二项式系数之和为 $2^n = 2^5 = 32$ 。
故选B.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

12. 已知 $(1 + x)^n$ 的展开式中第4项与第8项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为() .

A. 2^{12}

B. 2^{11}

C. 2^{10}

D. 2^9

【答案】D

【解析】由题意可得，二项式的展开式满足

$$T_{r+1} = C_n^r x^r, C_n^3 = C_n^7, \text{ 因此 } n = 10.$$

令 $x = 1$ ，则 $(1 + x)^n = 2^{10}$ ，即展开式中所有项的二项式系数和为 2^{10} ；

令 $x = -1$ ，则 $(1 + x)^n = 0$ ，即展开式中奇数项的二项式系数与偶数项的二项式系数之差为0，

$$\text{因此奇数项的二项式系数和为 } \frac{1}{2}(2^{10} + 0) = 2^9.$$

故选D.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；二项式定理的展开式

13. 若 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right)^n$ 的展开式的二项式系数和为128 .

(1) 求 n 的值 .

(2) 求展开式中二项式系数的最大项 .

【答案】(1) $n = 7$.

$$(2) T_4 = -35x^{-\frac{14}{3}}, T_5 = 35x^{-7}.$$

【解析】(1) 展开式的二项式系数和为 2^n ,

$$\therefore 2^n = 128,$$

$$\therefore n = 7.$$

(2) $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2}\right)^7$ 展开式通项公式为 $T_{r+1} = C_7^r (\sqrt[3]{x})^{7-r} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = C_7^r (-1)^r x^{\frac{7-r}{3}-2r}$, 当 $n = 7$ 时
二项式系数最大为 $C_7^3 = C_7^4$,

$$\therefore r = 3, T_4 = C_7^3 (-1)^3 x^{-\frac{14}{3}} = -35x^{-\frac{14}{3}}, r = 4, T_5 = C_7^4 (-1)^4 x^{-7} = 35x^{-7},$$

$$\therefore \text{二次项系数最大项为 } T_4 = -35x^{-\frac{14}{3}}, T_5 = 35x^{-7}.$$

【标注】【知识点】求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

14. 在 $\left(x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中, 第4项的系数与倒数第4项的系数之比为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 n 的值;

(2) 求展开式中所有的有理项;

(3) 求展开式中系数最大的项.

【答案】(1) $n = 7$.

$$(2) T_1 = x^{14},$$

$$T_3 = 84x^9,$$

$$T_5 = 560x^4,$$

$$T_7 = 448x^{-1}.$$

$$(3) 672x^{\frac{3}{2}}.$$

【解析】(1) 有题意知: 通项公式为 $T_{r+1} = C_n^r \cdot 2^r \cdot x^{2n-\frac{5r}{2}}$,

$$\text{则第4项的系数为 } C_n^3 \cdot 2^3,$$

$$\text{倒数第4项的系数为 } C_n^{n-3} \cdot 2^{n-3},$$

$$\text{则有 } \frac{C_n^3 \cdot 2^3}{C_n^{n-3} \cdot 2^{n-3}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2^{n-6}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore n = 7.$$

(2) 由(1)可得当 $2n - \frac{5r}{2}$ 为整数时,

即 $r = 0, 2, 4, 6$ 时, 为有理项.

故所有的有理项为:

$$T_1 = x^{14},$$

$$T_3 = 84x^9,$$

$$T_5 = 560x^4,$$

$$T_7 = 448x^{-1}.$$

(3) 设展开式中第 $r+1$ 项的系数最大,

$$\text{则} \begin{cases} C_7^r \cdot 2^r \geq C_7^{r+1} \cdot 2^{r+1} \\ C_7^r \cdot 2^r \geq C_7^{r-1} \cdot 2^{r-1} \end{cases},$$

$$\text{求得 } \frac{13}{3} \leq r \leq \frac{16}{3},$$

$$\therefore r = 5,$$

$$\text{故系数最大项为 } T_6 = C_7^5 \cdot 2^5 \cdot x^{\frac{3}{2}} = 672x^{\frac{3}{2}}.$$

【标注】【知识点】求二项式展开式的特定项；求项的系数或二项式系数

三、赋值法

15. 已知 $(x-1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$, 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】 由 $(x-1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$,

$$\text{令 } x = 0 \text{ 得 } -1 = a_0,$$

$$\text{令 } x = 1 \text{ 得 } 0 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_7,$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_7 = -a_0 = 1.$$

故答案为：1.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式；赋值问题

16. 若 $(1-2x)^{2012} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2012}x^{2012}$ ($x \in R$), 则

$$(a_0 + a_1) + (a_0 + a_2) + (a_0 + a_3) + \cdots + (a_0 + a_{2012}) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 2012

【解析】 令 $x = 0$ 得 $a_0 = 1$,

$$\text{令 } x = 1 \text{ 得 } 1 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2012},$$

$$\therefore (a_0 + a_1) + (a_0 + a_2) + (a_0 + a_3) + \cdots + (a_0 + a_{2012})$$

$$= 2011 + (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2012}) = 2012.$$

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

17. 若 $(1-3x)^{2015} = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2015}x^{2015} (x \in \mathbf{R})$, 则 $\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_{2015}}{3^{2015}}$ 的值为 ().
- A. 3 B. 0 C. -1 D. -3

【答案】C

【解析】令 $x=0$, 可以知道 $a_0=1$,

$$\text{令 } x = \frac{1}{3}, a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_{2015}}{3^{2015}} = 0, \text{ 既 } \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots + \frac{a_{2015}}{3^{2015}} = -1.$$

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

18. 设 $(1+x+x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2n}x^{2n}$, 则 $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}$ 等于 ().
- A. 2^n B. $\frac{3^n-1}{2}$ C. 2^{n+1} D. $\frac{3^n+1}{2}$

【答案】D

【解析】设 $f(x) = (1+x+x^2)^n$,

$$\text{则 } f(1) = 3^n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n}, \quad ①$$

$$f(-1) = 1 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n}, \quad ②$$

$$\text{由 } ①+② \text{ 得 } 2(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}) = f(1) + f(-1),$$

$$\text{所以 } a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = \frac{f(1) + f(-1)}{2} = \frac{3^n + 1}{2}.$$

【标注】【知识点】赋值问题；求项的系数或二项式系数

四、余数的计算

19. 91^{92} 除以 100 的余数为 ____ .

【答案】81

【解析】解法一： $91^{92} = (100-9)^{92}$

$$= 100^{92} - C_{92}^1 \cdot 100^{91} \cdot 9 + C_{92}^2 \cdot 100^{90} \cdot 9^2 - \cdots - C_{92}^{91} \cdot 100 \cdot 9^{91} + 9^{92},$$

前面各项均能被 100 整除, 只有末项 9^{92} 不能被 100 整除, 于是求 9^{92} 除以 100 的余数.

$$\therefore 9^{92} = (10-1)^{92}$$

$$\begin{aligned}
&= 10^{92} - C_{92}^1 \cdot 10^{91} + C_{92}^2 \cdot 10^{90} - \cdots + C_{92}^{90} \cdot 10^2 - C_{92}^{91} \cdot 10 + (-1)^{92} \\
&= 10^{92} - C_{92}^1 \cdot 10^{91} + C_{92}^2 \cdot 10^{90} - \cdots + C_{92}^{90} \cdot 10^2 - 920 + 1 \\
&= (10^{92} - C_{92}^1 \cdot 10^{91} + C_{92}^2 \cdot 10^{90} - \cdots + C_{92}^{90} \cdot 10^2 - 1000) + 81 \\
&\therefore \text{被} 100 \text{ 除的余数为} 81, \text{ 即} 91^{92} \text{ 除以} 100 \text{ 的余数为} 81.
\end{aligned}$$

解法二： $\because 91^{92} = (90 + 1)^{92}$

$$= C_{92}^0 \cdot 90^{92} + C_{92}^1 \cdot 90^{91} + \cdots + C_{92}^{90} \cdot 90^2 + C_{92}^{91} \cdot 90 + 1$$

由于前面各项均能被100整除，只有末尾两项不能被100整除，

$$\text{由于 } C_{92}^{91} \cdot 90 + 1 = 8281 = 8200 + 81$$

$\therefore$ 被100除余81.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

20. $2^{2019} - 5$ 除以7的余数是 ____ .

【答案】 3

【解析】 $2^{2019} - 5 = (2^3)^{673} - 5 = (7 + 1)^{673} - 5 = C_{673}^0 7^{673} + C_{673}^1 7^{672} + \cdots + C_{673}^{672} 7^1 + C_{673}^{673} - 5,$

则余数为3.

故答案为：3.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式；整除问题

21. 若 n 为正偶数，则 $7^n + C_n^1 \cdot 7^{n-1} + C_n^2 \cdot 7^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \cdot 7$ 被9除所得的余数是 ____ .

【答案】 0

【解析】 $\because 7^n + C_n^1 \cdot 7^{n-1} + C_n^2 \cdot 7^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \cdot 7$

$$= (7 + 1)^n - 1$$

$$= (9 - 1)^n - 1$$

$$= 9^n + C_n^1 \cdot 9^{n-1}(-1)^1 + C_n^2 \cdot 9^{n-2}(-1)^2 + \cdots + C_n^{n-1} \cdot 9 \cdot (-1)^{n-1} + C_n^n \cdot 9^0 \cdot (-1)^n - 1,$$

又由 n 为正偶数，

$\therefore$ 倒数第二项 $C_n^n \cdot 9^0 \cdot (-1)^n = 1$ ，最后一项是 -1 ，而从第一项到倒数第三项，每项都能被9整除，

$$\therefore 7^n + C_n^1 \cdot 7^{n-1} + C_n^2 \cdot 7^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1} \cdot 7 \text{ 被} 9 \text{ 除所得的余数是} 0.$$

故答案为：0.

【标注】【知识点】求二项式展开式的特定项；整除问题；二项式定理的展开式