

03二项式定理

一、二项式定理

1. 概念

一般地，我们可以把 $(a+b)^n$ 表示为 $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ ， n 个 $(a+b)$ 相乘，乘得的每一项，是从每个 $(a+b)$ 里任取一个字母 a 或 b 的乘积，所以 $(a+b)^n$ 的展开式中每一项都是 $a^{n-r}b^r$ ($r=0,1,2,\cdots,n$)。对于每一项 $a^{n-r}b^r$ ，是由 r 个 $(a+b)$ 中选取 b ， $n-r$ 个 $(a+b)$ 中选取 a 得到的，它出现的次数（也就是这一项的系数）相当于从 n 个 $(a+b)$ 中取 r 个 b 的组合数，即为 C_n^r ，由此我们得到下面的公式：

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n (n \in \mathbf{N}^*) .$$

这个公式所表示的规律叫做**二项式定理**。

2. 二项式系数、二项式的通项

其中， $C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n$ 叫做 $(a+b)^n$ 的**二项展开式**，

系数 C_n^r ($r=0,1,2,\cdots,n$)叫做**二项式系数**，

式中的 $C_n^r a^{n-r}b^r$ 叫做**二项展开式的通项**，它代表的是 $(a+b)^n$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项，用 T_{r+1} 表示，即通项为展开式的第 $r+1$ 项： $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r}b^r$ 。

【注意事项】

- (1) 注意这个通项公式的成立前提，它代表的是 $(a+b)^n$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项；
- (2) $(a+b)^n$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项与 $(b+a)^n$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项是有区别的，要注意字母的前后顺序；
- (3) 二项式系数与二项展开式的系数的区别：
例如： $(x+3)^n$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项为： $C_n^r \cdot x^{n-r} \cdot 3^r$ ，
相应的系数是： $C_n^r \cdot 3^r$ ，
而二项式系数是： C_n^r ，这里面的项的系数是从 x 的角度出发的。

3. 求指定项

例1

1. 设二项式 $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^5$ 的展开式中常数项为 A ，则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【答案】 -10

【解析】 $C_5^2(\sqrt{x})^2\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = -10$.

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

练1

2. 二项式 $(x - \frac{2}{x})^6$ 的展开式的第二项是 () .

A. $6x^4$

B. $-6x^4$

C. $12x^4$

D. $-12x^4$

【答案】 D

【解析】 第二项应该为 $T_2 = C_6^1 \cdot x^5 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^1 = -12x^4$,
故选D .

【标注】 【知识点】 求二项式展开式的特定项

3. 已知 $(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中第三项与第五项的系数之比为 $\frac{3}{14}$, 则展开式中常数项是 () .

A. -1

B. 1

C. -45

D. 45

【答案】 D

【解析】 通项公式 $T_{r+1} = C_n^r (x^2)^{n-r} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = (-1)^r C_n^r x^{2n-\frac{5}{2}r}$,
由题设 $\frac{(-1)^2 C_n^2}{(-1)^4 C_n^4} = \frac{3}{14} \Rightarrow n = 10$.
令 $2n - \frac{5}{2}r = 0 \Rightarrow r = 8$,
故常数项为 $(-1)^8 C_{10}^8 = 45$.

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数

4. 求项的系数

例2

4. $(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中含 x^2 的系数是 () .

A. 240

B. -240

C. 192

D. -192

【答案】D

【解析】 $T_{r+1} = C_6^r \cdot (-1)^r \cdot 2^{6-r} x^{\frac{1}{2}(6-r) - \frac{1}{2}r} = C_6^r \cdot (-1)^r \cdot 2^{6-r} x^{3-r}$,

令 $3 - r = 2$ 得 $r = 1$,

$$\therefore T_2 = -2^5 C_6^1 x^2 = -192x^2,$$

$\therefore$ 其展开式中含 x^2 项的系数为 -192 . 故选D.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

5. $(x+y)(2x-y)^6$ 的展开式中 x^4y^3 的系数为 () .

A. -80

B. -40

C. 40

D. 80

【答案】D

【解析】 $(2x-y)^6$ 由通项公式可得: $T_{r+1} = C_6^r (2x)^{6-r} (-y)^r$.

$$\text{那么 } (x+y) \cdot C_6^r (2x)^{6-r} (-y)^r = C_6^r 2^{6-r} (-1)^r x^{7-r} y^r + C_6^r 2^{6-r} (-1)^r x^{6-r} y^{r+1}.$$

要得到 x^4y^3 项:

可得: $r = 2$ 或 $r = 3$.

当 $r = 2$ 时, 系数为 $C_6^2 2^4 = 240$.

当 $r = 3$ 时, 系数为 $-C_6^3 2^3 = -160$.

合并后系数为: $240 - 160 = 80$.

故选D.

【标注】【知识点】求二项式展开式的特定项; 二项式定理的展开式

6. 已知 $(1+x)^{10} = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + \cdots + a_{10}(1-x)^{10}$, 则 $a_0 + a_8 =$ () .

A. 664

B. 844

C. 968

D. 1204

【答案】D

【解析】由已知 $(1+x)^{10} = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + \cdots + a_{10}(1-x)^{10} = [2 - (1-x)]^{10}$,

$$\text{则 } a_0 = 2^{10} = 1024, a_8 = C_{10}^8 = C_{10}^2 \times 2^2 = 180, \text{ 所以则 } a_0 + a_8 = 1204.$$

故选D.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

7. 在二项式 $(\sqrt{x}+2)^6$ 的展开式中, 第四项的系数是_____.

【答案】 160

【解析】 $T_4 = C_6^3 \cdot (\sqrt{x})^3 \cdot 2^3 = 160(\sqrt{x})^3$, $\therefore$ 系数为160.

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

8. $(1+x)^8(1+y)^4$ 的展开式中 x^2y^2 的系数是().

A. 56

B. 84

C. 112

D. 168

【答案】 D

【解析】 利用二项展开式的通项公式写出 $(1-x)^8(1+y)^4$ 的通项, 从而确定 x^2y^2 的系数.

因为 $(1-x)^8$ 的通项公式为 $C_8^k x^k$, $(1+y)^4$ 的通项公式为 $C_4^t y^t$, 故 $(1-x)^8(1+y)^4$ 的通项公式为 $C_8^k C_4^t x^k y^t$ 令 $k=2t=2$, 得 x^2y^2 的系数为 $C_8^4 C_4^2 = 168$.

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数

9. 使得 $\left(3x + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^n$ ($n \in \mathbf{N}_+$) 展开式中含有常数项的最小的 n 是().

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

【答案】 B

【解析】 展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_n^r \cdot (3x)^{n-r} \cdot \left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^r = C_n^r \cdot 3^{n-r} \cdot x^{n-\frac{5r}{2}}$$

若能取到常数项, 则 $n - \frac{5r}{2} = 0$ 有解,

即 $r = \frac{2}{5}n$ 有整数解, 因此 n 的最小取值为5.

【标注】 【知识点】 求项的系数或二项式系数

10. 已知 $(x+1)^4 + (x-2)^8 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_8(x-1)^8$, 则 $a_3 =$ ().

A. 64

B. 48

C. -48

D. -64

【答案】 C

【解析】 由 $(x+1)^4 + (x-2)^8 = [(x-1)+2]^4 + [(x-1)-1]^8$

$$= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_8(x-1)^8,$$

$$\text{得 } a_3 \cdot (x-1)^3 = C_4^1 \cdot (x-1)^3 \cdot 2 + C_8^5 \cdot (x-1)^3 \cdot (-1)^5,$$

$$\therefore a_3 = 8 - C_8^5 = -48.$$

故选C.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

5. 求参数

例3

11. 若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是80，则实数 a 的值是_____.

【答案】 2

【解析】 二项展开式的通项 $T_{r+1} = C_5^r (ax)^{5-r} (-1)^r = (-1)^r a^{5-r} C_5^r x^{5-r}$ 令 $5-r=3$ 可得 $r=2$
 $\therefore a^3 C_5^2 = 80 \therefore a = 2$ 故答案为：2

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

练3

12. 若 $\left(ax - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式的常数项为60，则 a 的值为().

A. 4

B. ± 4

C. 2

D. ± 2

【答案】 D

【解析】 二项展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k \cdot (ax)^{6-k} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = C_6^k \cdot (-1)^k a^{6-k} \cdot x^{6-\frac{3}{2}k}$.
 令 $6 - \frac{3}{2}k = 0$ ，得 $k = 4$.
 由题意可得 $C_6^4 \cdot a^2 = 15a^2 = 60$ ，因此， $a = \pm 2$.
 故选：D.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

13. 若 $\left(ax^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中 x^5 的系数是-80，则实数 a = _____.

【答案】 -2

【解析】 $\left(ax^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_5^r (ax^2)^{5-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = C_5^r \cdot a^{5-r} x^{10-\frac{5r}{2}}$,
 令 $10 - \frac{5r}{2} = 5$, 解得 $r = 2$,
 $\therefore C_5^2 \cdot a^3 = -80$,
 解得 $a = -2$.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

二、二项式系数性质

1. 对称性

在二项展开式中, 与首末两项“等距离”的两项的二项式系数相等.

2. 增减性与最值

二项式系数(数列)在前半部分逐渐增大, 在后半部分逐渐减小, 在中间(项)取得最大值. 其中:

(1) 当 n 为奇数时, 二项展开式有偶数项, 二项式系数由 C_n^0 (第一项) 逐渐增大至 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ (第 $\frac{n+1}{2}$ 项), 再由 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ (第 $\frac{n+1}{2} + 1$ 项) 减小至 C_n^n (第 $n+1$ 项), 即二项展开式中间两项的二项式相等且最大;

(2) 当 n 为偶数时, 二项展开式有奇数项, 二项式系数由 C_n^0 (第一项) 逐渐增大至 $C_n^{\frac{n}{2}}$ (第 $\frac{n}{2} + 1$ 项), 再由 $C_n^{\frac{n}{2}}$ (第 $\frac{n}{2} + 1$ 项) 减小至 C_n^n (第 $n+1$ 项), 此时二项展开式的中间项的二项式最大;

3. 其他性质

(1) 二项式系数的和只与幂指数 n 有关, 即: $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

(2) 奇数项的二项式系数之和与偶数项的二项式系数之和相等, 即:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1} .$$

例4

14. 在二项式 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中, 当且仅当第5项的二项式系数最大, 则系数最小的项是 () .

A. 第6项

B. 第5项

C. 第4项

D. 第3项

【答案】C

【解析】由题意得, 展开式中只有第5项的二项式系数最大, 则 n 是偶数, 且第5项为中间项,

$\therefore \frac{n}{2} + 1 = 5$, 可得 $n = 8$,

$\therefore$ 展开式通项 $T_{r+1} = C_8^r \cdot (\sqrt{x})^{8-r} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r \cdot C_8^r \cdot x^{4-r}$,

当 r 为偶数, 即奇数项的系数都为正, 当 r 为奇数, 即偶数项的系数都为负,

又 $T_4 = -7x$, $T_6 = -\frac{7}{4}x^{-1}$, 比较可得, 第4项系数最小.

故选C.

【标注】【素养】数学运算

【素养】数学抽象

【素养】逻辑推理

【知识点】求二项式展开式的特定项

【知识点】二项式定理的展开式

【知识点】求项的系数或二项式系数

【知识点】二项式系数的性质

15. 二项式 $(3x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中, 常数项等于 ____; 二项式系数和为 ____.

【答案】 -540 ; 64

【解析】 二项式 $(3x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式的通项公式是

$$T_{r+1} = C_6^r (3x)^{6-r} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right)^r$$

$$= (-1)^r \cdot 3^{6-r} \cdot C_6^r x^{6-2r}.$$

$$\text{令 } 6 - 2r = 0, \text{ 得 } r = 3.$$

$\therefore$ 常数项是

$$T_{3+1} = (-1)^3 \times 3^{6-3} \times C_6^3 = -540;$$

$$\text{二项式系数和为 } 2^6 = 64.$$

故答案为: -540 ; 64 .

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

16. $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 展开式中所有奇数项系数之和为 1024 , 则展开式中各项系数的最大值是 ().

A. 790

B. 680

C. 462

D. 330

【答案】 C

【解析】 由题意可得: $2^{n-1} = 1024$, 解得 $n = 11$.

则展开式中各项系数的最大值是 C_{11}^5 或 C_{11}^6 ，则 $C_{11}^5 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 462$.

故选：C .

【标注】【知识点】二项式系数的性质；求二项式展开式的特定项

练4

17. 如果 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式中，第四项与第六项的系数相等，则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$ ，展开式中的常数项的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 8 ; 70

【解析】 由题意有 $C_n^3 = C_n^5 \Rightarrow n = 8$ ；展开式的常数项的值为 $C_8^4 = 70$.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

18. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第5项与第9项的二项式系数相等，则奇数项的二项式系数和为（ ） .

A. 2^9

B. 2^{10}

C. 2^{11}

D. 2^{12}

【答案】 C

【解析】 $(1+x)^n$ 的展开通项公式 $T_{r+1} = C_n^r 1^{n-r} x^r = C_n^r x^r$,

$\therefore$ 第5项和第9项二项式系数相等，

$$\therefore C_n^4 = C_n^8 ,$$

$$\therefore n = 12 ,$$

奇数项的二项式系数之和为 $2^{n-1} = 2^{11}$.

(注： $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$, $C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots = 2^{n-1}$) .

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项；二项式系数的性质

19. 二项式 $\left(\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中只有第5项的二项式系数最大，则展开式中的常数项为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 84

【解析】 二项展开式中只有第5项系数最大，故 $n = 8$,

$$T_{r+1} = C_8^r (\sqrt{3}x)^{8-r} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^r = C_8^r (\sqrt{3})^{8-r} x^{8-r-\frac{r}{3}} ,$$

由题意有 $8 - r - \frac{r}{3} = 0$ ，解得 $r = 6$,

所以常数项为 $C_8^6(\sqrt{3})^2 = 84$.

【标注】【知识点】二项式系数的性质

20. 若 $(x^2 - \frac{1}{x})^n$ 展开式中的所有二项式系数和为512, 则该展开式中的常数项为 () .
- A. -84 B. 84 C. -36 D. 36

【答案】 B

【解析】 二项展开式的系数和为 $2^n = 512$, 所以 $n = 9$,

$$\text{二项展开式为 } T_{k+1} = C_9^k (x^2)^{9-k} (-x^{-1})^k = C_9^k x^{18-2k} (-1)^k x^{-k} = C_9^k x^{18-3k} (-1)^k,$$

$$\text{令 } 18 - 3k = 0, \text{ 得 } k = 6,$$

$$\text{所以常数项为 } T_7 = C_9^6 (-1)^6 = 84.$$

【标注】【知识点】二项式定理的展开式

21. 若二项式 $(2x + \sqrt{x})^n$ 的展开式中二项式系数之和为64, 则展开式中 x^4 项的系数为 () .
- A. 15 B. 60 C. 160 D. 240

【答案】 B

【解析】 由题知 $2^n = 64$, 则 $n = 6$, 于是 $(2x + \sqrt{x})^n = (2x + \sqrt{x})^6 = x^3(2\sqrt{x} + 1)^6$, 故展开式中 x^4 项为 $x^3 C_6^2 (2\sqrt{x})^2 = 60x^4$, 故选B.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

22. 在 $(x + \frac{3}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中, 各项系数与二项式系数和之比为64, 则 x^3 的系数为 () .
- A. 15 B. 45 C. 135 D. 405

【答案】 C

【解析】 令 $(x + \frac{3}{\sqrt{x}})^n$ 中 x 为1得各项系数和为 4^n , 又展开式的各项二项式系数和为 2^n ,

$\therefore$ 各项系数的和与各项二项式系数的和之比为64,

$$\therefore \frac{4^n}{2^n} = 64, \text{ 解得 } n = 6,$$

$\therefore$ 二项式的展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_6^r \cdot 3^r \cdot x^{6-\frac{3}{2}r}$, 令 $6 - \frac{3}{2}r = 3$, 求得 $r = 2$, 故展开式中含 x^3 项系数为 $C_6^2 \cdot 3^2 = 135$.

故选C.

【标注】【知识点】求项的系数或二项式系数

三、赋值法

二项展开式是一个恒等式，通过对字母 a 和 b 灵活赋值，我们可以得到指定项的各种线性组合的最终结果。

例5

23. 若 $(2x-1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ ，则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$ _____。

【答案】 1

【解析】 令 $x=1$ 可得， $(2-1)^5 = 1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ ，

则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$ ，

故答案为：1。

【标注】【知识点】二项式定理的展开式；赋值问题

24. 设 $(1+2x)^5 = a_0 + a_1x + \cdots + a_4x^4 + a_5x^5$ ，则 $a_0 =$ _____； $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 =$ _____。

【答案】 1；-1

【解析】 令 $x=0$ 可得： $a_0 = 1$ ；令 $x=-1$ 可得 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = -1$ 。

【标注】【知识点】赋值问题

练5

25. 若 $(1-x)^5 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_5(1+x)^5$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 的值等于 ()。

A. -31

B. 0

C. 1

D. 32

【答案】 A

【解析】 此题无解析

【标注】【知识点】二项式定理的展开式；赋值问题

26. 设 $(2-x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$, 则 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_6|$ 的值是 _____ .

【答案】 665

【解析】 $(2-x)^6 = C_6^0 \cdot 2^6 - C_6^1 \cdot 2^5x + \cdots + C_6^6x^6$

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_6| = C_6^0 \cdot 2^6 + C_6^1 \cdot 2^5 + \cdots + C_6^5 \cdot 2 + C_6^6 \cdot 2^0 = (2+1)^6 = 729 ,$$

$$\therefore |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_6| = 729 - 2^6 = 665 .$$

故答案为：665 .

【标注】【知识点】二项式定理的展开式；赋值问题

27. 设 $(x-2)^1 + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_6 =$ _____ ;
 $a_4 =$ _____ .

【答案】 0 ; 51

【解析】 在等式 $(x-2)^1 + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^6$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6 \text{ 中 ,}$$

$$\text{令 } x=1 , \text{ 可得 } a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0 ,$$

$$a_4 = C_4^0 + C_5^1 \cdot (-2) + C_6^2 \cdot (-2)^2$$

$$= 1 - 10 + 60$$

$$= 51 .$$

故答案为：0 ; 51 .

【标注】【知识点】赋值问题；二项式定理的展开式；求项的系数或二项式系数；求二项式展开式的特定项

28. 若 $(2x + \sqrt{3})^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2$ 的值为 ()

A. 1

B. -1

C. 0

D. 2

【答案】 A

【解析】 令 $x=1$, 得 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (2 + \sqrt{3})^4$,

$$\text{令 } x=-1 , \text{ 得 } a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = (-2 + \sqrt{3})^4 ,$$

$$\text{所以 } (a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2$$

$$= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \times (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4)$$

$$= (2 + \sqrt{3})^4 (2 - \sqrt{3})^4 = 1 .$$

【标注】【知识点】赋值问题

29. 若 $(1 - 2x)^{2016} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2016}x^{2016} (x \in \mathbf{R})$, 则 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{2016}}{2^{2016}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1

【解析】 在 $(1 - 2x)^{2016} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2016}x^{2016} (x \in \mathbf{R})$ 中 ,

令 $x = 0$, 可得 $a_0 = 1$,

令 $x = \frac{1}{2}$, 可得 $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{2016}}{2^{2016}} = 0$,

故 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{2016}}{2^{2016}} = -1$,

故答案为 : -1 .

【标注】【知识点】赋值问题 ; 求项的系数或二项式系数 ; 二项式定理的展开式

四、 余数的计算

利用二项式定理处理整除或求余问题 , 通常把被除数写成以除数为变量的一次函数形式 , 然后展开 , 这样 , 只需要考虑不含除数的个别项即可 .

例6

30. 回答下列问题 :

(1) $2^{30} - 3$ 除以 7 的余数是 _____ ;

(2) $55^{55} + 15$ 除以 8 的余数是 _____ ;

(3) 1991^{2000} 除以 10^3 的余数是 _____ .

【答案】 (1) 5

(2) 6

(3) 1

【解析】 (1) 将 2^{30} 分解成含 7 的因数 , 然后用二项式定理展开 , 不含 7 的项就是余数 .

$$2^{30} - 3 = (2^3)^{10} - 3 = 8^{10} - 3 = (7 + 1)^{10} - 3$$

$$= C_{10}^0 7^{10} + C_{10}^1 7^9 + \cdots + C_{10}^9 7 + C_{10}^{10} - 3$$

$$7 \times [C_{10}^0 7^9 + C_{10}^1 7^8 + \cdots + C_{10}^9] - 2$$

又 $\because$ 余数不能为负数, 需转化为正数

$\therefore 2^{30} - 3$ 除以7的余数为5

$\therefore$ 应填: 5.

(2) 将 55^{55} 写成 $(56 - 1)^{55}$, 然后利用二项式定理展开.

$$55^{55} + 15 = (56 - 1)^{55} + 15$$

$$= C_{55}^0 56^{55} - C_{55}^1 56^{54} + \cdots + C_{55}^{54} 56 - C_{55}^{55} + 15$$

容易看出该式只有 $-C_{55}^{55} + 15 = 14$ 不能被8整除,

因此 $55^{55} + 15$ 除以8的余数, 即14除以8的余数, 故余数为6.

$\therefore$ 应填: 6.

(3) $1991^{2000} = (2000 - 9)^{2000}$, 用二项式定理展开后,

易知除了最后一项, 其它都能被 10^3 整除.

因此只需考虑 9^{2000} 除以 10^3 的余数.

$$9^{2000} = (10 - 1)^{2000}$$

$$= 10^{2000} - C_{2000}^1 (10)^{1999} + \cdots - C_{2000}^{1997} (10)^3 + C_{2000}^{1998} (10)^2 - C_{2000}^{1999} (10) + 1$$

只需考虑最后3项, 不难算出余数为1.

【标注】【知识点】二项式定理的展开式; 整除问题

练6

31. 求证: $51^{51} - 1$ 能被7整除.

【答案】证明见解析.

【解析】 $\because 51^{51} - 1 = (49 + 2)^{51} - 1$

$$= C_{51}^0 49^{51} + C_{51}^1 49^{50} \cdot 2 + C_{51}^2 49^{49} \cdot 2^2 + \cdots + C_{51}^{50} 49 \cdot 2^{50} + C_{51}^{51} 2^{51} - 1$$

$$= 49P + 2^{51} - 1 (P \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{又} \because 2^{51} - 1 = (2^3)^{17} - 1 = (7 + 1)^{17} - 1$$

$$= C_{17}^0 7^{17} + C_{17}^1 7^{16} + C_{17}^2 7^{15} + \cdots + C_{17}^{16} 7 + C_{17}^{17} - 1 = 7Q (Q \in \mathbf{N}^*)$$

$$\therefore 51^{51} - 1 = 7P + 7Q = 7(P + Q) \therefore 51^{51} - 1 \text{ 能被7整除.}$$

【标注】【知识点】二项式定理的展开式; 整除问题

32. 设 $a \in \mathbf{Z}$, 且 $0 < a < 13$, 若 $53^{2017} + a$ 能被13整除, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 12

【解析】 $53^{2017} + a = (52 + 1)^{2017} + a = 52^{2017} + C_{2017}^1 52^{2016} + \cdots + C_{2017}^{2016} 52 + 1 + a$.

$\because 53^{2017} + a$ 能被 13 整除.

$\therefore 1 + a$ 能被 13 整除.

又 $a \in \mathbf{Z}$, 且 $0 < a < 13$, 则 $a = 12$.

故答案为: 12.

【标注】 【知识点】 二项式定理的展开式

33. 回答下列问题:

(1) 证明: $C_n^0 + C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n \times 2^{n-1} + 1, (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 证明: 对一切 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $2^{n+2} \times 3^n + 5n - 4$ 能被 25 整除.

【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) 方法一: 由于 $kC_n^k = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$

$$nC_{n-1}^{k-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$$

$$\therefore kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1},$$

$$\text{所以, } C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = nC_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + \cdots + nC_{n-1}^{n-1}$$

$$= n(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}) = n2^{n-1}.$$

方法二: 由 $(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n (n \geq 2, \text{且 } n \in \mathbf{N}^*)$,

两边求导, 得 $n(1+x)^{n-1} = n + 2C_n^2 x + 3C_n^3 \cdot x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1}$,

令 $x = 1$, 得 $C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + nC_n^n = n2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*, \text{且 } n \geq 2)$.

(2) ① 当 $n = 1$ 时, $2^{1+2} \cdot 3^1 + 5 \times 1 - 4 = 25$ 能被 25 整除, 命题成立.

② 假设 $n = k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时, 结论成立, 即 $2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4$ 能被 25 整除,

那么 $n = k + 1$ 时,

$$2^{k+1+2} \cdot 3^{k+1} + 5(k+1) - 4$$

$$= 6 \times 2^{k+2} \cdot 3^k + 5(k+1) - 4$$

$$= 6[2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4] - 5k + 4 + 5(k+1) - 4$$

$$= 6(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 30k + 24 + 5k + 5 - 4$$

$$= 6(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 25(k+1),$$

由于 $6(2^{k+2} \cdot 3^k + 5k - 4) - 25(k+1)$ 能被 25 整除,

即 $n = k + 1$ 时结论成立.

综上所述：命题得证．

【标注】【知识点】数学归纳法；二项式定理的展开式