

03二项式定理

一、二项式定理

1. 概念

一般地，我们可以把 $(a+b)^n$ 表示为 $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$ ， n 个 $(a+b)$ 相乘，乘得的每一项，是从每个 $(a+b)$ 里任取一个字母 a 或 b 的乘积，所以 $(a+b)^n$ 的展开式中每一项都是 $a^{n-r}b^r$ ($r=0,1,2,\cdots,n$)。对于每一项 $a^{n-r}b^r$ ，是由 r 个 $(a+b)$ 中选取 b ， $n-r$ 个 $(a+b)$ 中选取 a 得到的，它出现的次数（也就是这一项的系数）相当于从 n 个 $(a+b)$ 中取 r 个 b 的组合数，即为 C_n^r ，由此我们得到下面的公式：

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n (n \in \mathbf{N}^*) .$$

这个公式所表示的规律叫做**二项式定理**。

2. 二项式系数、二项式的通项

其中， $C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^n b^n$ 叫做 $(a+b)^n$ 的**二项展开式**，

系数 C_n^r ($r=0,1,2,\cdots,n$)叫做**二项式系数**，

式中的 $C_n^r a^{n-r}b^r$ 叫做**二项展开式的通项**，它代表的是 $(a+b)^n$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项，用 T_{r+1} 表示，即通项为展开式的第 $r+1$ 项： $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r}b^r$ 。

【注意事项】

- (1) 注意这个通项公式的成立前提，它代表的是 $(a+b)^n$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项；
- (2) $(a+b)^n$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项与 $(b+a)^n$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项是有区别的，要注意字母的前后顺序；
- (3) 二项式系数与二项展开式的系数的区别：
例如： $(x+3)^n$ 的二项展开式的第 $r+1$ 项为： $C_n^r \cdot x^{n-r} \cdot 3^r$ ，
相应的系数是： $C_n^r \cdot 3^r$ ，
而二项式系数是： C_n^r ，这里面的项的系数是从 x 的角度出发的。

3. 求指定项

例1

1. 设二项式 $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^5$ 的展开式中常数项为 A ，则 $A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

🔔 练1

2. 二项式 $(x - \frac{2}{x})^6$ 的展开式的第二项是().
A. $6x^4$ B. $-6x^4$ C. $12x^4$ D. $-12x^4$
3. 已知 $(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中第三项与第五项的系数之比为 $\frac{3}{14}$, 则展开式中常数项是().
A. -1 B. 1 C. -45 D. 45

4. 求项的系数

🔔 例2

4. $(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中含 x^2 的系数是().
A. 240 B. -240 C. 192 D. -192
5. $(x+y)(2x-y)^6$ 的展开式中 x^4y^3 的系数为().
A. -80 B. -40 C. 40 D. 80
6. 已知 $(1+x)^{10} = a_0 + a_1(1-x) + a_2(1-x)^2 + \cdots + a_{10}(1-x)^{10}$, 则 $a_0 + a_8 =$ ().
A. 664 B. 844 C. 968 D. 1204

🔔 练2

7. 在二项式 $(\sqrt{x}+2)^6$ 的展开式中, 第四项的系数是_____.
8. $(1+x)^8(1+y)^4$ 的展开式中 x^2y^2 的系数是().
A. 56 B. 84 C. 112 D. 168
9. 使得 $(3x + \frac{1}{x\sqrt{x}})^n$ ($n \in \mathbf{N}_+$)展开式中含有常数项的最小的 n 是().
A. 4 B. 5 C. 6 D. 7
10. 已知 $(x+1)^4 + (x-2)^8 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \cdots + a_8(x-1)^8$, 则 $a_3 =$ ().
A. 64 B. 48 C. -48 D. -64

5. 求参数

🔔 例3

11. 若 $(ax-1)^5$ 的展开式中 x^3 的系数是80, 则实数 a 的值是_____.

🔔 练3

12. 若 $\left(ax - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式的常数项为60, 则a的值为().

A. 4

B. ± 4

C. 2

D. ± 2

13. 若 $\left(ax^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中 x^5 的系数是-80, 则实数a = ____ .

二、二项式系数性质

1. 对称性

在二项展开式中, 与首末两项“等距离”的两项的二项式系数相等.

2. 增减性与最值

二项式系数(数列)在前半部分逐渐增大, 在后半部分逐渐减小, 在中间(项)取得最大值. 其中:

(1) 当n为奇数时, 二项展开式有偶数项, 二项式系数由 C_n^0 (第一项) 逐渐增大至 $C_n^{\frac{n-1}{2}}$ (第 $\frac{n+1}{2}$ 项), 再由 $C_n^{\frac{n+1}{2}}$ (第 $\frac{n+1}{2} + 1$ 项) 减小至 C_n^n (第n+1项), 即二项展开式中间两项的二项式相等且最大;

(2) 当n为偶数时, 二项展开式有奇数项, 二项式系数由 C_n^0 (第一项) 逐渐增大至 $C_n^{\frac{n}{2}}$ (第 $\frac{n}{2} + 1$ 项), 再由 $C_n^{\frac{n}{2}}$ (第 $\frac{n}{2} + 1$ 项) 减小至 C_n^n (第n+1项), 此时二项展开式的中间项的二项式最大;

3. 其他性质

(1) 二项式系数的和只与幂指数n有关, 即: $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$.

(2) 奇数项的二项式系数之和与偶数项的二项式系数之和相等, 即:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}.$$

例4

14. 在二项式 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中, 当且仅当第5项的二项式系数最大, 则系数最小的项是().

A. 第6项

B. 第5项

C. 第4项

D. 第3项

15. 二项式 $\left(3x - \frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中, 常数项等于 ____ ; 二项式系数和为 ____ .

16. $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 展开式中所有奇数项系数之和为1024, 则展开式中各项系数的最大值是().

A. 790

B. 680

C. 462

D. 330

练4

17. 如果 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式中, 第四项与第六项的系数相等, 则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$, 展开式中的常数项的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.
18. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第5项与第9项的二项式系数相等, 则奇数项的二项式系数和为 ().
 A. 2^9 B. 2^{10} C. 2^{11} D. 2^{12}
19. 二项式 $(\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中只有第5项的二项式系数最大, 则展开式中的常数项为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
20. 若 $(x^2 - \frac{1}{x})^n$ 展开式中的所有二项式系数和为512, 则该展开式中的常数项为 ().
 A. -84 B. 84 C. -36 D. 36
21. 若二项式 $(2x + \sqrt{x})^n$ 的展开式中二项式系数之和为64, 则展开式中 x^4 项的系数为 ().
 A. 15 B. 60 C. 160 D. 240
22. 在 $(x + \frac{3}{\sqrt{x}})^n$ 的展开式中, 各项系数与二项式系数和之比为64, 则 x^3 的系数为 ().
 A. 15 B. 45 C. 135 D. 405

三、赋值法

二项展开式是一个恒等式, 通过对字母 a 和 b 灵活赋值, 我们可以得到指定项的各种线性组合的最终结果.

例5

23. 若 $(2x-1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$.
24. 设 $(1+2x)^5 = a_0 + a_1x + \cdots + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $a_0 = \underline{\hspace{2cm}}$; $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = \underline{\hspace{2cm}}$.

练5

25. 若 $(1-x)^5 = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \cdots + a_5(1+x)^5$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ 的值等于 ().
 A. -31 B. 0 C. 1 D. 32
26. 设 $(2-x)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$, 则 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_6|$ 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
27. 设 $(x-2)^1 + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$, 则 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_6 = \underline{\hspace{2cm}}$; $a_4 = \underline{\hspace{2cm}}$.
28. 若 $(2x + \sqrt{3})^4 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, 则 $(a_0 + a_2 + a_4)^2 - (a_1 + a_3)^2$ 的值为 ().
 A. 1 B. -1 C. 0 D. 2
29. 若 $(1-2x)^{2016} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{2016}x^{2016} (x \in \mathbf{R})$, 则 $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{2016}}{2^{2016}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、余数的计算

利用二项式定理处理整除或求余问题，通常把被除数写成以除数为变量的一次函数形式，然后展开，这样，只需要考虑不含除数的个别项即可。

例6

30. 回答下列问题：

- (1) $2^{30} - 3$ 除以 7 的余数是 _____ ；
- (2) $55^{55} + 15$ 除以 8 的余数是 _____ ；
- (3) 1991^{2000} 除以 10^3 的余数是 _____ 。

练6

31. 求证： $51^{51} - 1$ 能被 7 整除。

32. 设 $a \in \mathbf{Z}$ ，且 $0 < a < 13$ ，若 $53^{2017} + a$ 能被 13 整除，则 $a =$ _____。

33. 回答下列问题：

- (1) 证明： $C_n^0 + C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n = n \times 2^{n-1} + 1, (n \in \mathbf{N}^*)$ 。
- (2) 证明：对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $2^{n+2} \times 3^n + 5n - 4$ 能被 25 整除。