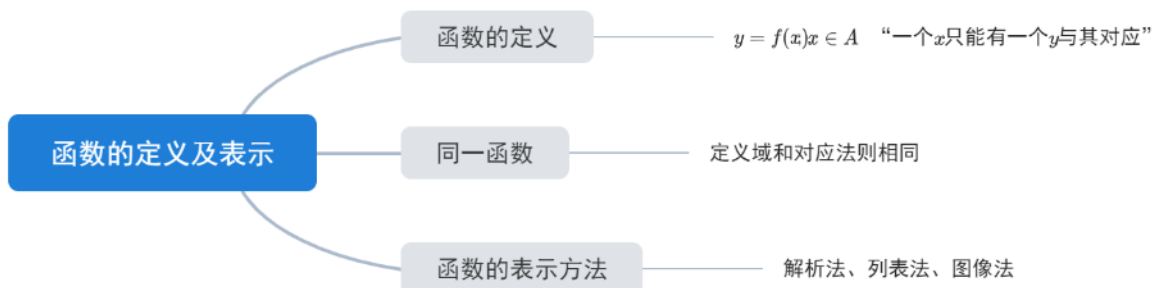


02函数初步

函数的定义及表示方法



教法备注

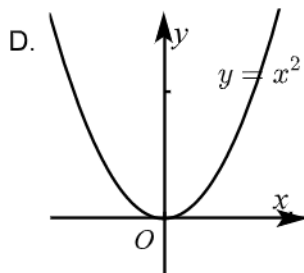
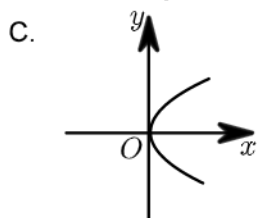
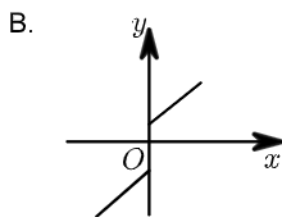
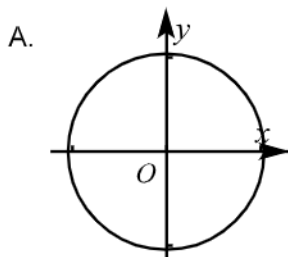
(1) 函数的定义域和值域都是数集，且都不是空集。

(2) 集合允许多个 x 对应一个 y ，例如二次函数 $y = x^2$ 是二次函数，但是不允许多个 y 对应一个 x ，例如 $y^2 = x$ 不是函数，而 $y = \sqrt{x}$ 是函数。



函数的定义

1 下列各图中，可表示函数 $y = f(x)$ 的图象的只可能是 ()。

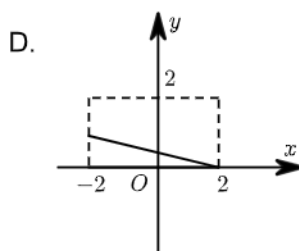
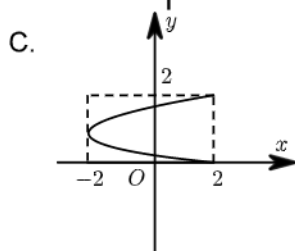
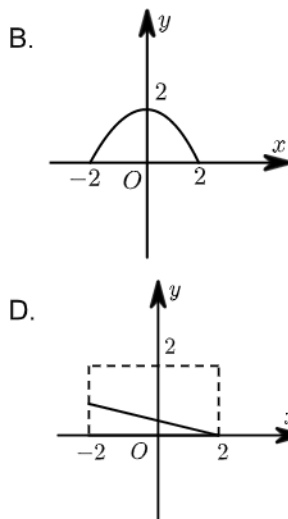
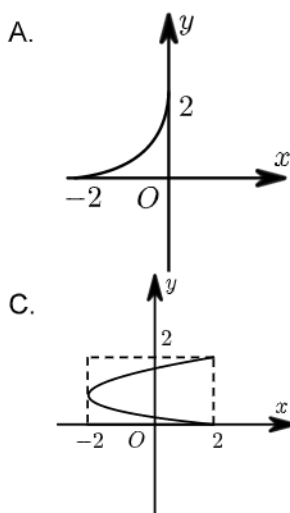


答案

D

解析 略.

2 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $M = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$, 值域为 $N = \{y | 0 \leq y \leq 2\}$, 则函数 $y = f(x)$ 的图象可能是 ().



答案 B

解析 A选项: 定义域是 $[-2, 0]$, 故A错误;

C选项: 存在一个 x 值对应两个 y 值的情况, 不是函数图象, 故C错误;

D选项: 中值域不是 $[0, 2]$, 故D错误,

故选B.



同一函数

3 下面四组函数中, $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一个函数的是 ().

A. $f(x) = |x|$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$

B. $f(x) = 2x$, $g(x) = \frac{2x^2}{x}$

C. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$

D. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

答案 C

解析

A选项：函数 $f(x) = |x|$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $g(x) = (\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ ，A不符合题意；

B选项： $f(x) = 2x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $g(x) = \frac{2x^2}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R}, \text{且} x \neq 0\}$ ，B不符合题意；

C选项： $f(x) = x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $g(x) = \sqrt[3]{x^3} = x$ ，C符合题意；

D选项：函数 $f(x) = x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $g(x) = \sqrt{x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，但 $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ ；对应关系不同，D不符合题意。

故选C.

4 下列各组函数是同一个函数的是 () .

② $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 与 $g(s) = s^2 - 2s - 1$ ；

② $f(x) = \sqrt{-x^3}$ 与 $g(x) = x\sqrt{-x}$ ；

③ $f(x) = \frac{x}{x}$ 与 $g(x) = \frac{1}{x^0}$ ；

④ $f(x) = x - 1$ 与 $g(x) = (\sqrt{x-1})^2$.

A. ①②

B. ①③

C. ①④

D. ③④

答案

B

解析

由函数的定义知，若两函数为同一个函数，则两函数的定义域、对应关系均相同。

在①中，显然 $f(x)$ 与 $g(s)$ 的定义域、对应关系均相同，故①符合题意；

在②中，因为 $f(-1) = 1$ ， $g(-1) = -1$ ，所以两函数的对应关系不同，故②不符合题意；

在③中，两函数的定义域均为 $\{x | x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$ ，且当 $x \neq 0$ 时， $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ ， $g(x) = \frac{1}{x^0} = 1$ ，故③符合题意；

在④中， $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $g(x)$ 的定义域为 $\{x | x \geq 1\}$ ，故④不符合题意。

故选B.



函数的表示方法

5 设函数 $f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 2x + 1$ ，则 $f(x)$ 的表达式为 () .

A. $\frac{1+x}{1-x}$

B. $\frac{1+x}{x-1}$

C. $\frac{1-x}{1+x}$

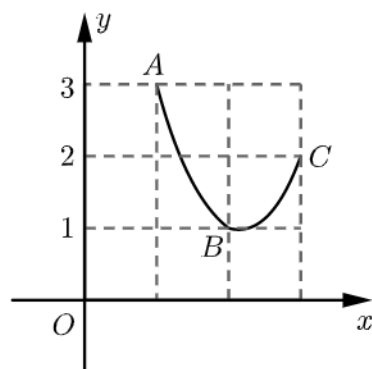
D. $\frac{2x}{x+1}$

答案 B

解析 令 $1 + \frac{1}{x} = t$, 则 $x = \frac{1}{t-1}$, 所以 $f(t) = \frac{2}{t-1} + 1$, 从而 $f(x) = \frac{2}{x-1} + 1 = \frac{1+x}{x-1}$.
 故选B.

6 已知函数 $y = f(x)$ 的对应关系如下表, 函数 $y = g(x)$ 的图象是如图的曲线 ABC , 其中 $A(1, 3)$, $B(2, 1)$, $C(3, 2)$, 则 $f[g(2)]$ 的值为 ().

x	1	2	3
$f(x)$	2	3	0



A. 3

B. 2

C. 1

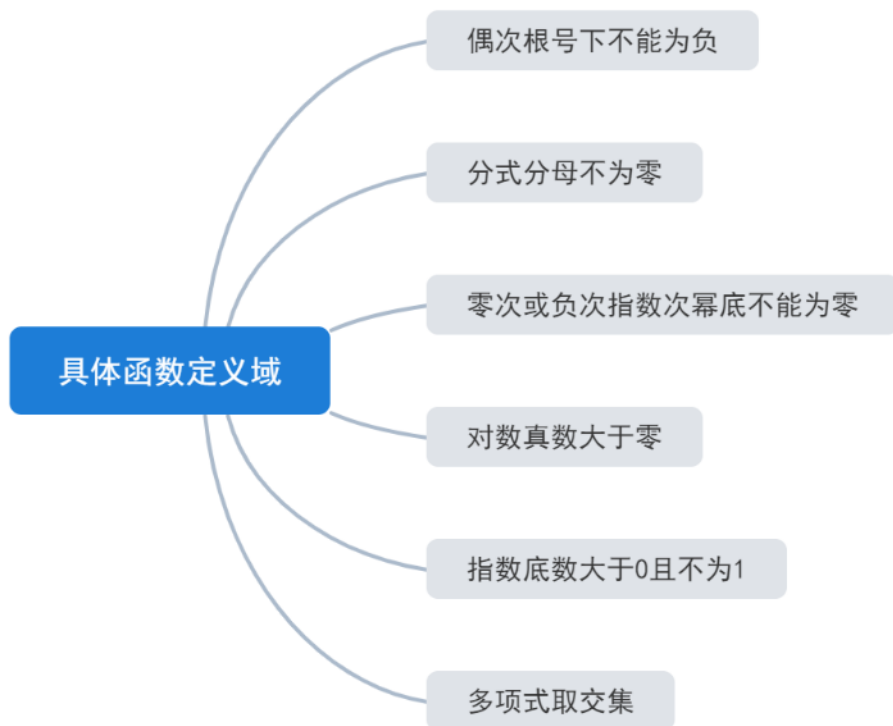
D. 0

答案 B

解析 由图象可知 $g(2) = 1$,
 由表格可知 $f(1) = 2$,
 $\therefore f[g(2)] = f(1) = 2$.
 故选B.

函数定义域求法

具体函数定义域



7 $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{6-x-x^2}$ 的定义域是 _____ .

答案 $[-3, -1) \cup [1, 2]$

解析
$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ 6-x-x^2 \geq 0 \end{cases},$$

$\therefore$ 定义域是 $[-3, -1) \cup [1, 2]$.

8 函数 $y = \frac{(x-1)^0}{\sqrt{|x|+x}}$ 的定义域是 () .

A. $(0, +\infty)$

B. $(-\infty, 0)$

C. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

D. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

答案 C

解析 要使函数有意义, 则需满足: $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ |x|+x > 0 \end{cases},$

解得, $x > 0$ 且 $x \neq 1$, 所以函数的定义域是 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

9 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x-3} \cdot \lg \sqrt{4-x}$ 的定义域为 ().

- A. $[2, +\infty)$ B. $[2, 4]$ C. $[2, 3) \cup (3, 4)$ D. $[2, 3]$

答案 C

抽象函数定义域

求解抽象函数的定义域我们可以把握两个要点:

- (1) 当题目求解时指的是自变量 x 本身的范围,
- (2) $f(x)$ 括号内的式子范围一致。

10 若函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, 2)$, 则函数 $y = f(-2x)$ 的定义域是 ().

- A. $(0, 2)$ B. $(-1, 0)$ C. $(-4, 0)$ D. $(0, 4)$

答案 B

解析 因为函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(0, 2)$, 即 $0 < x < 2$,

由 $0 < -2x < 2$, 解得 $-1 < x < 0$,

即函数 $y = f(-2x)$ 的定义域是 $(-1, 0)$.

11 若函数 $y = f(x+1)$ 的定义域是 $[-2, 3]$, 则 $y = f(2x-1)$ 的定义域为 ().

- A. $[0, 2.5]$ B. $[-1, 4]$ C. $[-5, 5]$ D. $[-3, 7]$

答案 A

解析 因为函数 $y = f(x+1)$ 的定义域是 $[-2, 3]$,

即 $-1 \leq x+1 \leq 4$,

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 4]$.

由 $f(x)$ 与 $f(2x-1)$ 的关系可得 $-1 \leq 2x-1 \leq 4$,

解得： $0 \leq x \leq \frac{5}{2}$.

所以函数 $f(2x-1)$ 定义域为 $\left[0, \frac{5}{2}\right]$.

故选A.

12 若函数 $f(x)$ 的定义域是 $[-2, 2]$, 则函数 $g(x) = \frac{f(-3x)}{\sqrt{2x+1}}$ 的定义域是().

A. $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$
C. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$

B. $\left(-\frac{1}{2}, 2\right]$
D. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

答案 C

解析 $\begin{cases} -2 \leq -3x \leq 2 \\ 2x+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3},$

故选C.

13 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 2]$, 则函数 $g(x) = \frac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是().

A. $[0, 1]$

B. $[0, 1)$

C. $[0, 1) \cup (1, 4]$

D. $(0, 1)$

答案 B

解析 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 2]$,

$\therefore 0 \leq 2x \leq 2$ 即 $0 \leq x \leq 1$.

又 $\because x-1 \neq 0$, 即 $x \neq 1$.

$\therefore 0 \leq x < 1$.

$\therefore g(x)$ 的定义域为 $[0, 1)$.

故选B.

函数值域求法



利用函数单调性

14 求函数 $y = 2x + \sqrt{1+2x}$ 的值域 .

答案 $[-1, +\infty)$.

解析

该函数的定义域为 $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, 不难发现 , 该函数的两个部分 $2x$ 和 $\sqrt{1+2x}$ 均是在定义域上单调递增的 , 因此此函数单调递增 , 故值域为 $[-1, +\infty)$.

15 求函数 $y = 2^{x-5} + \log_3 \sqrt{x-1}$ ($2 \leq x \leq 10$) 的值域 .

答案 见解析 .

解析

令 $y_1 = 2^{x-5}$, $y_2 = \log_3 \sqrt{x-1}$, 则 y_1, y_2 在 $[2, 10]$ 上都是增函数 .

$y = y_1 + y_2$ 在 $[2, 10]$ 上是递增函数 .

当 $x = 2$ 时 , $y_{\min} = 2^{-3} + \log_3 \sqrt{2-1} = \frac{1}{8}$,

当 $x = 10$ 时 , $y_{\max} = 2^5 + \log_3 \sqrt{9} = 33$.

故所求函数的值域为 $\left[\frac{1}{8}, 33\right]$.



配方法

16 求函数 $y = -x^2 + 4x - 2$ ($1 \leq x \leq 4$) 的值域 .

答案 $[-2, 2]$

解析

$$y = -(x-2)^2 + 2$$

$\because 1 \leq x \leq 4$, $\therefore$ 当 $x = 2$ 时 , $y_{\max} = 2$, 当 $x = 4$ 时 , $y_{\min} = -2$

$\therefore$ 所给函数的值域为 $[-2, 2]$.

17 求下列函数的值域：

(1) $y = x - 2\sqrt{x} + 3$

(2) $y = x^4 + 4x^2 + 5$

答案 (1) $[2, +\infty)$

(2) $[5, +\infty)$

解析 (1) $y = x - 2\sqrt{x} + 3 = (\sqrt{x} - 1)^2 + 2$ ，由观察法直接得到值域，以下略。

(2) $y = x^4 - 4x^2 + 5 = (x^2 + 2)^2 + 1$ ，可看成求解二次函数 $f(x) = (x + 2)^2 + 1$ 在 $[0, +\infty)$ 上的值域，以下略。

换元法

18 函数 $f(x) = x - \sqrt{2x - 1}$ 的值域为 _____。

答案 $[0, +\infty)$

解析 $f(x) = \frac{2x - 1}{2} - \sqrt{2x - 1} + \frac{1}{2}$ ，令 $\sqrt{2x - 1} = t$ ，则 $t \geq 0$ ，

$$y = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}, t \in [0, +\infty)$$

对称轴为 $t = 1$

所以当 $t = 1$ 时 $y_{\min} = 0$

所以 $f(x) \in [0, +\infty)$ 。

19 求函数 $y = \sqrt{3x + 6} - 3x$ 的值域。

答案 $(-\infty, \frac{25}{4}]$

解析 $y = \sqrt{3x + 6} - 3x$ ，令 $\sqrt{3x + 6} = t (t \geq 0)$ ，则 $y = -t^2 + t + 6 = -(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{25}{4}$ 。

当 $t = \frac{1}{2}$ 时， y 取得最大值 $\frac{25}{4}$ ，函数的值域为 $(-\infty, \frac{25}{4}]$ 。

分离常数法

20 函数 $y = \frac{x+2}{x-1}$ 在区间 $[2, 5]$ 上的最大值, 最小值分别是 () .

A. 无最大值, 最小值是4

B. $4, \frac{7}{4}$

C. 最大值是4, 无最小值

D. 4, 0

答案 C

解析 $y = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x-1+3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$,

则 y 在 $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ 上为减函数 .

$\therefore \max = f(2) = 1 + 3 = 4$, 无最小值 .

选C .

21 函数 $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x}$ 的值域为 () .

A. $(-1, 1)$

B. $(-\infty, 1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(0, 1)$

答案 A

解析 $f(x) = \frac{1-2^x}{1+2^x}$,

令 $t = 2^x \in (0, +\infty)$,

则 $f(t) = \frac{1-t}{1+t} = \frac{-(t+1)+2}{1+t} = -1 + \frac{2}{1+t}$,

$\therefore t > 0$,

$\therefore 1+t > 1$,

$\therefore 0 < \frac{2}{1+t} < 2$,

$\therefore -1 < -1 + \frac{2}{1+t} < 1$,

$\therefore f(x) \in (-1, 1)$.

故选A .





基本不等式法

22 求函数 $y = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}}$ 的值域.

答案 见解析.

解析 定义域为 $(-1, +\infty)$, $y = \frac{x+2}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq 2$, 当且仅当 $x=0$ 时等号成立. 故函数的值域为 $y \in [2, +\infty)$.

23 求函数 $y = \frac{x^2+10}{\sqrt{x^2+9}}$ 的值域.

答案 $[\frac{10}{3}, +\infty)$.

解析 此函数定义域为 $\mathbf{R}$, $y = \frac{x^2+10}{\sqrt{x^2+9}} = \sqrt{x^2+9} + \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$, 做换元 $t = \sqrt{x^2+9}$, 则由观察法容易得出 $t \geq 3$, 此时函数变为关于新自变量 t 的对勾函数 $f(t) = t + \frac{1}{t} (t \geq 3)$, 根据对勾函数性质, $f(t)$ 在 $[3, +\infty)$ 上单调递增, 故可得值域为 $[\frac{10}{3}, +\infty)$.

24 求函数 $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-1} (x > 5)$ 的值域.

答案 见解析.

解析 $f(x) = \frac{(x-1)^2+2}{x-1} = x-1 + \frac{2}{x-1}$, 做换元 $t = x-1$, 则 $t > 4$, 转化为关于 t 的函数 $g(t) = t + \frac{2}{t} (t > 4)$, 由上面对勾函数的性质, 该函数在 $(4, +\infty)$ 上单调递增, 故值域为 $(\frac{9}{2}, +\infty)$.



几何法

25 求函数 $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-4x+8}$ 的值域.

答案 $[\sqrt{13}, +\infty)$.

解析 $\sqrt{x^2+1}$ 表示点 $(x, 0)$ 到点 $(0, -1)$ 的距离 ,
 $\sqrt{x^2-4x+8}$ 表示点 $(x, 0)$ 到点 $(2, 2)$ 的距离 ,
 故 $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-4x+8} \geq \sqrt{(2-0)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{13}$
 所以 $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-4x+8}$ 的值域是 $[\sqrt{13}, +\infty)$.

26 求函数 $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ 的值域 .

答案 $[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}]$.

解析 $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$ 的几何意义为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点与点 $(-2, 0)$ 连线所成直线的斜率的取值范围 .

函数解析式求法

待定系数法

27 设函数 $f(x)$ 是一次函数 , $f(f(x)) = 4x - 3$, 则 $f(1) = (\quad)$.

A. 3或1

B. 1

C. 1或-1

D. -3或1

答案 B

解析 设一次函数 $f(x) = ax + b$,
 则 $f(f(x)) = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$,
 $\therefore$ 对一切实数 x 满足 $f(f(x)) = 4x - 3$,
 $\therefore \begin{cases} a^2 = 4 \\ ab + b = -3 \end{cases}$,
 解得 $\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$,
 $\therefore f(x) = 2x - 1$ 或 $f(x) = -2x + 3$.
 $\therefore f(1) = 1$ 或 $f(1) = 1$.

故选：B .

28 已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f(x-1) = 3x - 5$ ，则 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = (\quad)$.

A. $3x - 2$

B. $2x + 3$

C. $3x + 2$

D. $2x - 3$

答案 A

解析 设一次函数 $f(x) = ax + b (a \neq 0)$ ，则 $f(x-1) = a(x-1) + b = ax - a + b$ ，

由 $f(x-1) = 3x - 5$ 得 $ax - a + b = 3x - 5$ ，

$$\text{即} \begin{cases} a = 3 \\ b - a = -5 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases},$$

$\therefore f(x) = 3x - 2$.

故选A .

29 若函数 $f(x)$ 是二次函数，且满足 $f(0) = 1$ ， $f(x+1) = f(x) + 2(x-1)$ ，则 $f(x)$ 的解析式为 _____ .

答案 $f(x) = x^2 - 3x + 1$

解析 由题意：函数 $f(x)$ 是二次函数，设出 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，

$$\because f(0) = 1,$$

$$\therefore c = 1.$$

$$f(x) = ax^2 + bx + 1,$$

$$\because f(x+1) = f(x) + 2(x-1),$$

$$\text{那么：} a(x+1)^2 + b(x+1) + 1 = ax^2 + bx + 1 + 2(x-1),$$

$$\Leftrightarrow 2ax + a + b = 2x - 2,$$

$$\text{由：} \begin{cases} 2a = 2 \\ a + b = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得：} a = 1, b = -3.$$

$$\therefore f(x) \text{的解析式为} f(x) = x^2 - 3x + 1,$$

故答案为 $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

配凑法

教法备注

例一： $f(\sqrt{x}+1) = x + 2\sqrt{x}$ ，可以将右边凑成 $(\sqrt{x}+1)^2 - 1$ 的形式再求解

但此时需要注意所求函数的定义域，上述函数 $\sqrt{x} \geq 0$ ， $\sqrt{x}+1 \geq 1$ ， $f(x) = x^2 - 1 (x \geq 1)$ ，后面的范围必须做标注；

例二： $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ，可以将右边凑成 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$ 的形式再求解。

30 已知函数 $f(\sqrt{x}+2) = x + 4\sqrt{x} + 5$ ，则 $f(x)$ 的解析式为（ ）。

A. $f(x) = x^2 + 1$

B. $f(x) = x^2$

C. $f(x) = x^2 + 1 (x \geq 2)$

D. $f(x) = x^2 (x \geq 2)$

答案 C

解析 $f(\sqrt{x}+2) = x + 4\sqrt{x} + 5$
 $= (\sqrt{x}+2)^2 + 1$ ，
 $\therefore f(x) = x^2 + 1 (x \geq 2)$ 。
 故选C。

31 已知函数 $f(2x+1) = 6x+5$ ，则 $f(x)$ 的解析式是（ ）。

A. $3x+2$

B. $3x+1$

C. $3x-1$

D. $3x+4$

答案 A

解析 函数 $f(2x+1) = 6x+5 = 3(2x+1) + 2$ ，
 $\therefore f(x) = 3x+2$ 。
 故选：A。

32 $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$;

答案 $f(x) = x^2 - 2$, $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

解析 略.

33 若函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{x+1}{x}) = x$, 则 $f(x)$ 的解析式为 () .

A. $f(x) = \frac{1}{x-1} (x \neq 1)$

B. $f(x) = \frac{1}{x+1} (x \neq -1)$

C. $f(x) = \frac{x}{x-1} (x \neq 1)$

D. $f(x) = \frac{x}{x-1} (x \neq -1)$

答案 A

解析 函数 $f(x)$ 函数 $f(\frac{x+1}{x}) = x$,
 则 $f(\frac{x+1}{x}) = \frac{1}{\frac{x+1}{x} - 1}$, 且 $\frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \neq 1$,
 $\therefore f(x) = \frac{1}{x-1} (x \neq 1)$.
 故选 A .

换元法

教法备注

例：已知 $f(x+1) = x^2 + 4x + 6$, 求解析式 $f(x)$.

解：令 $t = x+1$, $x = t-1$ 代入原式变为 $f(t) = (t-1)^2 + 4(t-1) + 6$, $f(t) = t^2 + 2t + 3$, 即

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ (注意定义域是否有限制) .

34 已知函数 $f(\frac{1}{x}) = \frac{x}{1+x}$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\frac{1}{1+x} (x \neq 0, x \neq -1)$

解析

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{1+x} (x \neq 0, x \neq -1), \text{ 令 } t = \frac{1}{x}, t \neq 0 \text{ 且 } t \neq -1, \text{ 所以 } f(t) = \frac{1}{1+t} (t \neq 0, t \neq -1)$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{1}{1+x} (x \neq 0, x \neq -1).$$

35 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, 则 $f(x)$ 的解析式可取为 ().

A. $\frac{x}{1+x^2}$

B. $-\frac{2x}{1+x^2}$

C. $\frac{2x}{1+x^2}$

D. $-\frac{x}{1+x^2}$

答案 C

解析 换元.

$$\text{令 } \frac{1-x}{1+x} = t, (t \neq -1)$$

$$\text{解得 } x = \frac{1-t}{1+t}, \text{ 代入原式得:}$$

$$f(t) = \frac{1 - \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}{1 + \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2} = \frac{2t}{1+t^2} (t \neq -1),$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

36 已知 $f\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{1+x^2}{x^2} + \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 的解析式为 _____.

答案 $t^2 - t + 1 (t \neq 1)$

解析 令 $t = \frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1$ 则 $t \neq 1$, 则 $x = \frac{1}{t-1}$,

$$\therefore f(t) = \frac{1 + \left(\frac{1}{t-1}\right)^2}{\left(\frac{1}{t-1}\right)^2} + \frac{1}{\frac{1}{t-1}}$$

$$= (t-1)^2 + 1 + t - 1$$

$$= t^2 - t + 1.$$

$$\therefore f(x) = t^2 - t + 1 (t \neq 1).$$



消元法（联立方程组法）

37 已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x) + f(-x) = 3x + 2$ ，则 $f(2)$ 的值为（ ）。

A. $-\frac{16}{3}$

B. $-\frac{20}{3}$

C. $\frac{16}{3}$

D. $\frac{20}{3}$

答案 D

解析 由题设可知，函数 $f(x)$ 满足 $2f(x) + f(-x) = 3x + 2$ ，

$$\text{则 } 2f(-x) + f(x) = 3(-x) + 2,$$

则由上式联立，消去 $f(-x)$ ，

$$\text{即 } 4f(x) + 2f(-x) = 6x + 4, \quad ①$$

$$2f(-x) + f(x) = 3(-x) + 2, \quad ②$$

$$\text{由 } ① - ② \text{ 得 } 3f(x) = 9x + 2,$$

$$\text{解得 } f(x) = 3x + \frac{2}{3},$$

$$\text{故 } f(2) = 3 \times 2 + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}.$$

故选 D。

38 已知函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x (x \neq 0)$ ，则 $f(-2) =$ （ ）。

A. $-\frac{7}{2}$

B. $\frac{9}{2}$

C. $\frac{7}{2}$

D. $-\frac{9}{2}$

答案 C

解析 根据题意，函数 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x (x \neq 0)$ ，

$$\text{令 } x = 2 \text{ 可得： } f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f(-2) = 4, \quad ①$$

$$\text{令 } x = -\frac{1}{2} \text{ 可得： } f(-2) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) = -1, \quad ②$$

$$\text{联立 } ①② \text{ 解可得： } f(-2) = \frac{7}{2},$$

故选 C。

39 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，且 $f(x) = 2f\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{x} - 1$ ，则 $f(x) =$ _____。

答案 $\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3} (x > 0)$

解析 考虑到所给式子中含有 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ，故可考虑利用换元法进行求解。

在 $f(x) = 2f\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{x} - 1$ ，用 $\frac{1}{x}$ 代替 x ，

得 $f\left(\frac{1}{x}\right) = 2f(x)\frac{1}{\sqrt{x}} - 1$ ，将 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2f(x)}{\sqrt{x}} - 1$ 代入 $f(x) = 2f\left(\frac{1}{x}\right)\sqrt{x} - 1$ 中，

可求得 $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}$ 。

故答案为： $\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}$ 。

分段函数

若函数的定义域分为若干区间，且对于不同的区间内的自变量有着不同的对应关系，这样的函数叫做**分段函数**。

教法备注

【补充说明】

(1) 不要把分段函数误解为多个函数，它其实还是一个函数，只不过对应关系是几个次级对应关系的组合。在研究分段函数时，要服从先局部后整体的原则，首先要确定自变量的数值属于哪个区间，从而选择相应的对应关系；并且定义区间要做到不重不漏，例如上面 $x = 0$ 如果在上面的区域内，就不要再分配给下面的区域。

(2) 画分段函数的图像时，依次做出各个分区间内的函数图像，然后组合在一起就是整个分段函数的图像。

(3) 分段函数的定义域是各个子区间的并集，根据函数（映射）的定义，各个子区间之间的交集必为空集。

(4) 分段函数的值域是各段函数在相应区间上值域的并集。这给我们提供一种求解分段函数值域的方法，即先求出各个子函数的值域，然后将值域取并集即可。

40 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+1), & x > 0 \\ -x^2 - 3x, & x \leq 0 \end{cases}$ ，则 $f(f(-2)) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 -1

解析 $\because -2 < 0$,

$$\therefore f(-2) = -(-2)^2 - 3(-2),$$

$$= -4 + 6 = 2 > 0,$$

$$\therefore f(2) = \log_{\frac{1}{3}}(x+1) = -1,$$

$$\therefore f[f(-2)] = -1.$$

故答案为: -1.

41 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ (\frac{1}{3})^x, & x \geq 0 \end{cases}$, 则不等式 $|f(x)| \geq \frac{1}{3}$ 的解集为 _____.

答案 $[-3, 1]$

解析

$$(1) \text{ 由 } |f(x)| \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ |\frac{1}{x}| \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x < 0.$$

$$(2) \text{ 由 } |f(x)| \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ |(\frac{1}{3})^x| \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (\frac{1}{3})^x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1.$$

$\therefore$ 不等式 $|f(x)| \geq \frac{1}{3}$ 的解集为 $\{x | -3 \leq x \leq 1\}$, $\therefore$ 应填 $[-3, 1]$.

42 设函数 $f(x) = \begin{cases} x - \frac{3}{4}, & x > 0 \\ x^2 - \frac{1}{4}, & x \leq 0 \end{cases}$, 则方程 $f(x) = 2$ 的所有实数根之和为 _____.

答案 $\frac{5}{4}$

解析

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x - \frac{3}{4}, & x > 0 \\ x^2 - \frac{1}{4}, & x \leq 0 \end{cases}, \text{ 则方程 } f(x) = 2,$$

$$\therefore x > 0 \text{ 时}, x - \frac{3}{4} = 2, x = \frac{11}{4},$$

$$x \leq 0 \text{ 时}, x^2 - \frac{1}{4} = 2, x = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore -\frac{3}{2} + \frac{11}{4} = \frac{5}{4}.$$

故答案为: $\frac{5}{4}$.