

04：函数零点综合问题（二）练习题

1. 分段函数的零点个数

1 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 零点的个数为 () .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案 B

解析 $x \leq 0$ 时, $2^x - 1 = 0$, $x = 0$, $f(x)$ 有一个零点,
 $x > 0$ 时, $\frac{1}{x} = 0$, 无解, $\therefore f(x)$ 有一个零点, 故选 B.

2 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & x > 0 \\ -x^2 - 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ 则关于 x 的函数 $y = f(x) - 1$ 的零点的个数为 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 C

解析 当 $x > 0$ 时, 由 $|\lg x| - 1 = 0$,
 得 $x = 10$ 或 $x = \frac{1}{10}$,
 当 $x \leq 0$ 时, 由 $-x^2 - 2x - 1 = 0$, 得 $x = -1$.
 $\therefore$ 函数 $y = f(x) - 1$ 的零点的个数为 3.
 故选 C.

3 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$, 则函数 $y = f(x) - 2^{|x|}$ 的零点个数是 () .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案 C

解析

$$y = f(x) - 2^{|x|} = \begin{cases} 2x - 2^{|x|}, & x \geq 0 \\ -x - 2^{|x|}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 2^x, & x \geq 0 \\ -x - \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x < 0 \end{cases},$$

若 $2x = 2^x$,

则 $x = 2$ 或 $x = 1$,

故 $x \geq 0$ 时, $y = f(x) - 2^{|x|}$ 有 2 个零点,

$\because \left(\frac{1}{2}\right)^x > -x$ 恒成立,

$\therefore x < 0$ 时, $y < 0$ 恒成立,

$\therefore x < 0$ 时, y 无零点,

$\therefore y$ 共有 2 个零点.

故选 C.

2. 利用零点个数求解参数取值范围

4 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 3^{x+1} - 1, & x \leq 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有两个零点, 则实数 m 的取值范围为 () .

A. $(-\infty, 2]$

B. $(-\infty, 2)$

C. $(-1, 2]$

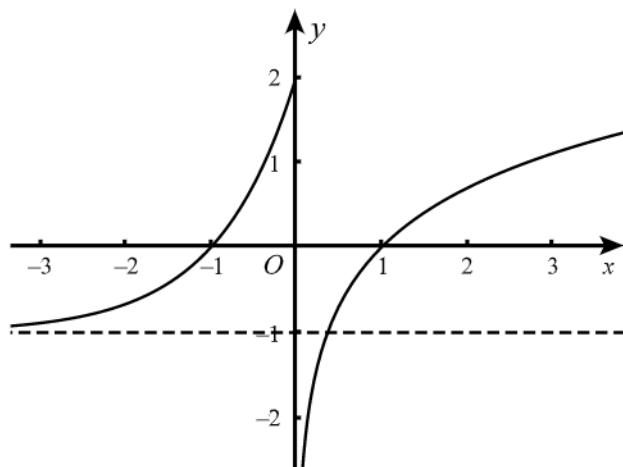
D. $(-1, 2)$

答案

C

解析

令 $g(x) = 0$ 得 $f(x) = m$, 做出 $f(x)$ 的函数图象如图所示:



$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象与 $y = m$ 有两个交点,

$\therefore m$ 的取值范围为 $-1 < m \leq 2$.

故选 C.

5

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1, & x \geq 0, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, & x < 0, \end{cases}$ 若 $g(x) = f(x) - a$ 恰好有 3 个零点, 则 a 的取值范围为 () .

A. $[0, 1)$

B. $(0, 1)$

C. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$

答案

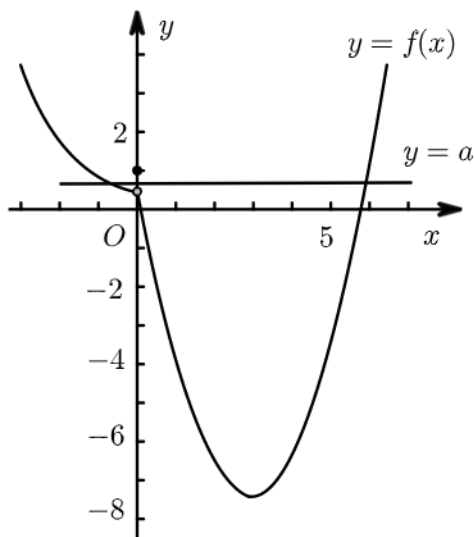
D

解析

$g(x) = f(x) - a$ 恰好有 3 个零点, 等价于 $f(x) = a$ 有 3 个根,

等价于 $y = f(x)$, $y = a$ 的图象有 3 个不同的交点.

作出 $y = f(x)$, $y = a$ 的图象, 如图,



由图可知, 当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时, $y = f(x)$ 与 $y = a$ 的图象有 3 个交点,

即当 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 时, $g(x) = f(x) - a$ 恰好有 3 个零点,

所以 a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$,

故选 D.

6

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 2 \\ (x-1)^3, & x < 2 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) + k = 0$ 有两个不同的实根, 则实数 k 的取值范围是 () .

A. $(0, 1)$

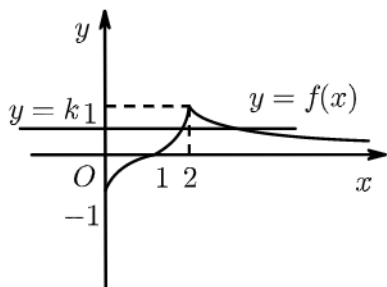
B. $[0, 1]$

C. $(-1, 0)$

D. $[-1, 0]$

答案 C

解析 如图所示：



①当 $x \geq 2$ 时，由函数 $f(x) = \frac{2}{x}$ 单调递减可得： $0 < f(x) = \frac{2}{x} \leq 1$ ；

②当 $0 < x < 2$ 时，由函数 $f(x) = (x-1)^3$ 单调递增可得： $-1 < f(x) < 1$ 。

由图象可知：满足关于 x 的方程 $f(x) = -k$ 有两个不同的实根的实数 k 的取值范围是：

$-k \in (0, 1)$ ，可得 $k \in (-1, 0)$ 。

故选 C。

7 设 $f(x) = \begin{cases} 3^{-x} & x \leq 0 \\ f(x-1) & x > 0 \end{cases}$ ，若 $f(x) = x + a$ 有且仅有三个解，则实数 a 的取值范围是 ()。

A. $(-\infty, 2)$

B. $(-\infty, 1)$

C. $[1, 2]$

D. $[1, +\infty)$

答案 A

解析 由题意得，

(1) $a \geq 3$ 时，两个图象有且只有一个公共点。

(2) $2 \leq a < 3$ ，两个图象有两个公共点。

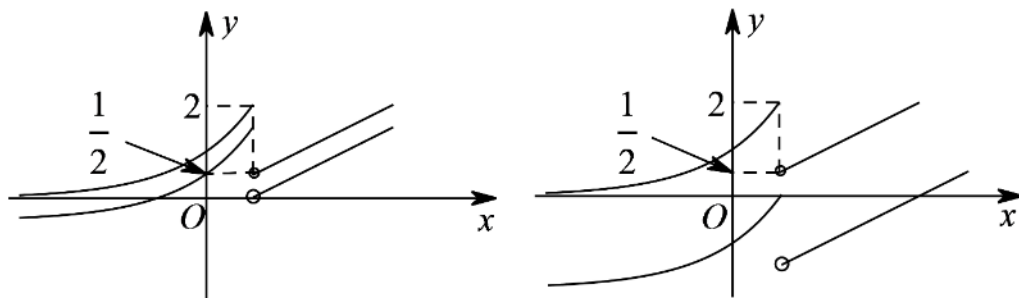
(3) $a < 2$ 时，两个图象有三个公共点。

故选 A。

已知函数 $f(x) = \begin{cases} a + 2^x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + a, & x > 1 \end{cases}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$. 如果函数 $f(x)$ 恰有两个零点, 那么 a 的取值范围是 _____.

答案 $\left[-2, -\frac{1}{2}\right)$

解析 分别在作出 $y = 2^x$ 和 $y = \frac{1}{2}x$ 的函数图象如图所示:



而 $f(x) = \begin{cases} a + 2^x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x + a, & x > 1 \end{cases}$ 可知是由 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x, & x > 1 \end{cases}$ 上下平移 a 得到,

图一和图二分别表示恰有两个零点的极限情况,

易知 $a \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right)$.

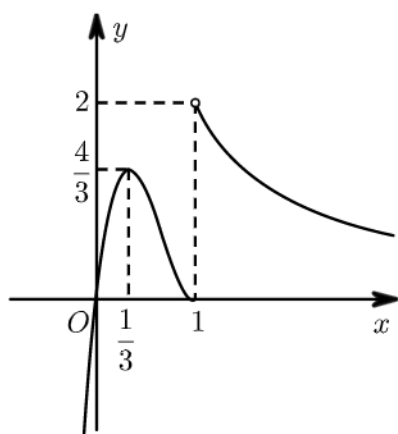
9

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x > 1, \\ 9x(1-x)^2, & x \leq 1. \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - k$ 仅有一个零点, 则 k 的取值范围是 () .

- A. $\left(\frac{4}{3}, 2\right]$
- B. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$
- C. $(-\infty, 0)$
- D. $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, 2\right)$

答案 D

解析 作出 $f(x)$ 的图象如图所示.



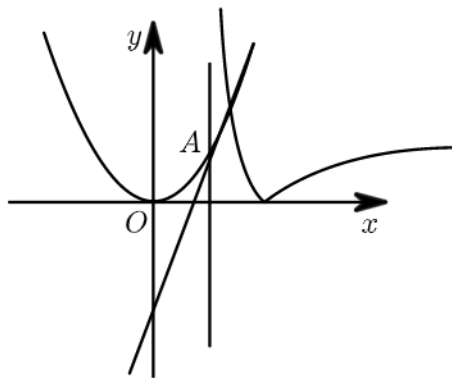
结合图象可知 $k \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, 2\right)$.

故选D.

- 10 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ |\ln(x-1)|, & x > 1 \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) = kx - 2$ 有且只有一个实数根, 则实数 k 的取值范围是 _____.

答案 $\{k | 0 < k < 3\} \cup \{-2\sqrt{2}\}$

解析 由题意, 函数 $f(x)$ 的图象与恒过点 $(0, -2)$ 的直线 $y = kx - 2$ 有且只有一个交点, 作出函数 $y = f(x)$ 的图象,



若直线过点 $(1, 1)$, 则 $k = 3$, 若直线 $y = kx - 2$ 与 $y = x^2$ 相切, 即 $x^2 - kx + 2 = 0$, 则判别式 $\Delta = k^2 - 8 = 0$, 解得 $k = 2\sqrt{2}$ (舍) 或 $k = -2\sqrt{2}$, 由图知, 实数 k 的取值范围是 $(0, 3) \cup \{-2\sqrt{2}\}$.

故答案为: $\{k | 0 < k < 3\} \cup \{-2\sqrt{2}\}$.

3. 复合函数的零点个数

11 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 + 3, & x < 2 \\ -4(x^2 - 5x + 6), & x \geq 2 \end{cases}$, 则函数 $f(f(x))$ 的零点个数为 () .

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

答案 C

解析

当 $x < 2$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 6x$,

若 $0 < x < 2$, $f'(x) < 0$; 若 $x < 0$, $f'(x) > 0$,

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值 3 ,

又 $f(-1) < 0$, $f(1) > 0$, $2^3 - 3 \times 2^2 + 3 = -1 < 0$,

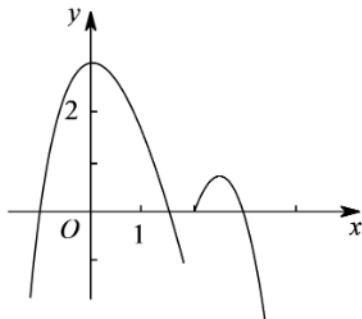
则 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$, $(1, 2)$ 上各有 1 个零点 ,

当 $x \geq 2$ 时, $f(x)_{\max} = f\left(\frac{5}{2}\right) = 1$, $f(x)$ 的零点为 2 和 3 ,

由 $f(f(x)) = 0$, 得 $f(x) = 2$ 或 $f(x) = 3$ 或 $f(x) = x_1$ 或 $f(x) = x_2$,

其中 $x_1 \in (-1, 0)$, $x_2 \in (1, 2)$.

结合 $f(x)$ 的图象可知 ,



方程 $f(x) = 2$ 的解的个数为 2 ,

方程 $f(x) = 3$ 的解的个数为 1 , 方程 $f(x) = x_1$ 的解的个数为 3 ,

方程 $f(x) = x_2$ 的解的个数为 2 , 故 $f(f(x))$ 的零点的个数为 $2 + 1 + 3 + 2 = 8$.

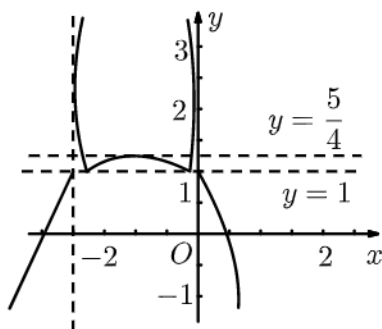
4. 利用零点个数求解参数取值范围

12 已知函数 $f(x) = -x^2 - 2x$, $g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{4x}, & x > 0 \\ x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $g[f(x)] - a = 0$ 的实数根的个数有 4

个, 则 a 的取值范围是 _____ .

答案 $\left[1, \frac{5}{4}\right)$

解析 由题意可得函数 $y = g[f(x)]$ 与函数 $y = a$ 有 4 个交点，如图所示：



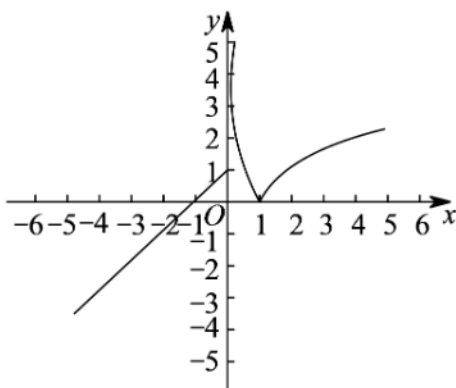
结合图象可得 $1 \leq a < \frac{5}{4}$ ，

故答案为： $\left[1, \frac{5}{4}\right)$ 。

13 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & (x \leq 0) \\ |\log_2 x|, & (x > 0) \end{cases}$ ，则函数 $y = f[f(x)] - 1$ 的零点个数是 _____。

答案 7

解析 函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & (x \leq 0) \\ |\log_2 x|, & (x > 0) \end{cases}$ 的图象如下图所示：



若 $y = f[f(x)] - 1 = 0$ ，则 $f[f(x)] = 1$ ，

则 $f(x) = 0$ ，或 $f(x) = \frac{1}{2}$ ，或 $f(x) = 2$ ，

满足 $f(x) = 0$ 的 x 有两个， $f(x) = \frac{1}{2}$ ，或 $f(x) = 2$ ，

满足 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的 x 有三个，

满足 $f(x) = 2$ 的 x 有两个，

故函数 $y = f[f(x)] - 1$ 的零点个数是 7 个，

故答案为：7 .

- 14 设函数 $f(x) = 1 - |2x - 1|$, $x \in [0, 1]$. 函数 $g(x) = f(f(x)) - ax$ 有 4 个零点. 则实数 a 的取值范围是 _____ .

答案 $\left(0, \frac{4}{3}\right)$

解析 ①当 $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ 时,

$$f(x) = 1 + 2x - 1 = 2x,$$

$$\therefore f(f(x)) = 1 - |4x - 1|,$$

$$\text{当 } x \in \left[0, \frac{1}{4}\right) \text{ 时, } f(f(x)) = 4x,$$

$$\text{当 } x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ 时, } f(f(x)) = 2 - 4x,$$

②当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时,

$$f(x) = 1 - (2x - 1) = 2 - 2x,$$

$$\therefore f(f(x)) = 1 - |3 - 4x|,$$

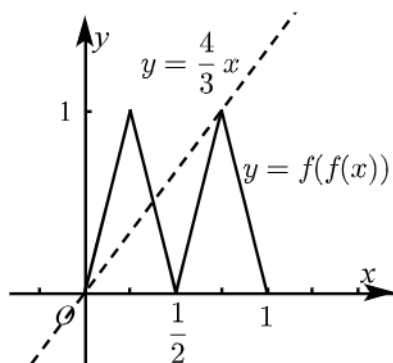
$$x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \text{ 时, } f(f(x)) = 4x - 2,$$

$$x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \text{ 时, } f(f(x)) = 4 - 4x,$$

$$\text{令 } h(x) = ax,$$

$\therefore g(x)$ 的零点个数等价于 $f(f(x))$ 和 $h(x)$ 的交点个数,

如图示:



$$\therefore 0 < a < \frac{4}{3},$$

故答案为： $\left(0, \frac{4}{3}\right)$.

- 15 函数 $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ ，关于 x 的方程 $f^2(x) - mf(x) + 1 = 0$ 恰有四个不同的实数解，则正数 m 的取值范围为 _____ .

答案 $\left(\frac{6}{e^3} + \frac{e^3}{6}, +\infty\right)$

解析 $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = (x+3)(x-1)e^x$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -3$ 或 $x = 1$.

当 $x < -3$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单调递增, 且 $f(x) > 0$;

当 $-3 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-3, 1)$ 上单调递减 ;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增 .

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(-3) = \frac{6}{e^3}$, $f(x)$ 的极小值为 $f(1) = -2e$.

令 $f(x) = t$, 则方程 $t^2 - mt + 1 = 0$ 有两个不同的实数根, 且一个根在 $\left(0, \frac{6}{e^3}\right)$ 内, 另一个根在 $\left(\frac{6}{e^3}, +\infty\right)$ 内, 或者两个根都在 $(-2e, 0)$ 内,

令 $g(x) = x^2 - mx + 1$,

因为 $g(0) = 1 > 0$,

所以只需 $g\left(\frac{6}{e^3}\right) < 0$,

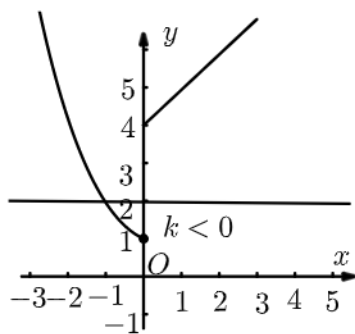
即 $\frac{36}{e^6} - \frac{6m}{e^3} + 1 < 0$, 得 $m > \frac{6}{e^3} + \frac{e^3}{6}$,

即 m 的取值范围为 $\left(\frac{6}{e^3} + \frac{e^3}{6}, +\infty\right)$.

- 16 已知函数 $f(x) = \begin{cases} kx + 4, & x \geq 0 \\ 2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$, 若方程 $f(f(x)) - 2 = 0$ 恰有三个实数根, 则实数 k 的取值范围是 _____ .

答案 $\left(-2, -\frac{1}{2}\right]$

解析 设 $t = f(x)$, 则方程等价于 $f(t) = 2$,



当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

由 $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$ 得 $x = -1$,

若 $k \geq 0$, 则 $f(x) = kx + 4 \geq 4$,

此时 $f(x) = 2$ 无解,

即此时无论 t 取何值, 方程 $f(f(x)) - 2 = 0$,

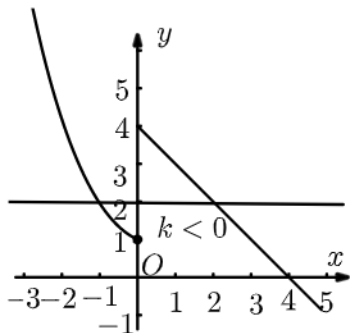
不可能有三个实数根, 故 $k < 0$,

若 $t < 0$, 则由 $f(t) = 2$ 得 $t = -1$,

若 $t \geq 0$, 则由 $f(t) = 2$ 得 $kt + 4 = 2$, 得 $t = -\frac{2}{k}$,

当 $t = -1$ 时, 由 $f(x) = -1$ 得当 $x \geq 0$ 时, $kx + 4 = -1$ 有一个解,

要使方程 $f(f(x)) - 2 = 0$ 恰有三个实数根,



等价于 $f(x) = t = -\frac{2}{k}$ 有两个根, 则满足 $1 < -\frac{2}{k} \leq 4$,

得 $\begin{cases} 1 < -\frac{2}{k} \\ -\frac{2}{k} \leq 4 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} k > -2 \\ k \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$ 即 $-2 < k \leq -\frac{1}{2}$,

即实数 k 的取值范围是 $\left(-2, -\frac{1}{2}\right]$,

故答案为: $\left(-2, -\frac{1}{2}\right]$.

- 17 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - af(x) = 0$ 恰有三个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围为 ().

A. $(0, 1]$

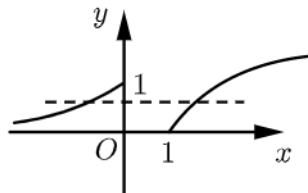
B. $(0, 1)$

C. $[1, +\infty)$

D. $(-\infty, 1)$

答案 A

解析 作出函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \log_2 x, & x > 0 \end{cases}$ 的图象如图，



令 $t = f(x)$ ，要使方程 $[f(x)]^2 - af(x) = 0$ 恰有三个不同的实数解，

则方程 $t^2 - at = 0$ 一个根为 0，另一根 $a \in (0, 1]$ 。

故选 A。

18 设函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + mf(x) - 1 = 0$ 有三个不同的实数解，则实数 m 的取值范围是 ()。

A. $(0, e)$

B. $(1, e)$

C. $\left(-\infty, e - \frac{1}{e}\right)$

D. $\left(e - \frac{1}{e}, +\infty\right)$

答案 D

解析 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，

$\therefore$ 当 $x > e$ 时， $f'(x) < 0$ ，

当 $0 < x < e$ 时， $f'(x) > 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(0, e]$ 上单调递增，在 $(e, +\infty)$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max} = f(e) = \frac{1}{e}$ ，

作出 $f(x)$ 的大致函数图象如下：

由图象可知当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时， $f(x) = k$ 有两解，

当 $k \leq 0$ 或 $k = \frac{1}{e}$ 时， $f(x) = k$ 有一解，

当 $k > \frac{1}{e}$ 时， $f(x) = k$ 无解。

令 $g(x) = x^2 + mx - 1$, 则 $g(f(x))$ 有三个零点 ,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上有一个零点 ,

在 $(-\infty, 0] \cup \{\frac{1}{e}\}$ 上有一个零点 .

$\therefore g(x)$ 的图象开口向上 , 且 $g(0) = -1$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上必有一个零点 ,

$\therefore g(\frac{1}{e}) > 0$, 即 $\frac{1}{e^2} + \frac{m}{e} - 1 > 0$,

解得 $m > e - \frac{1}{e}$.

