

03：函数零点综合问题（一）练习题

1. 零点存在性定理

1 函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 的零点一定位于区间 ()

A. (1, 2)

B. (2, 3)

C. (3, 4)

D. (4, 5)

答案 B

解析 易知函数 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 内是增函数.

$$\because f(1) = \ln 1 + 2 - 6 = -4 < 0, f(2) = \ln 2 + 4 - 6 = \ln 2 - 2 < 0,$$

$$f(3) = \ln 3 + 6 - 6 = \ln 3 > 0.$$

$\therefore f(2) \cdot f(3) < 0$, 即函数 $f(x)$ 的零点在区间 $(2, 3)$. 所以选 B.

2 函数 $f(x) = e^x + 2x - 4$ 的零点所在的区间是 () .

A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

C. (1, 2)

D. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

答案 B

解析 $f(0) = -3 < 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 3 < 0, f(1) = e - 2 > 0,$

$f(x)$ 的零点在区间 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上.

故选 B.

3 函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 x$ 的零点所在区间是 () .

A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

C. (1, 2)

D. (2, 3)

答案 C

解析 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 1 = 3 > 0$, $f(1) = 1 > 0$, $f(2) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$,

故函数 $f(x) = \frac{1}{x} - \log_2 x$ 的零点必落在区间 (1, 2) .

故选 C .

4 函数 $f(x) = x^3 - x - 3$ 的零点所在区间为 () .

A. [2, 3]

B. [1, 2]

C. (0, 1)

D. [-1, 0]

答案 B

解析 $f(1) = -3$, $f(2) = 3$, 选 B .

5 若 x_0 是方程 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = x^{\frac{1}{3}}$ 的解, 则 x_0 属于区间 () .

A. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$

B. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

D. $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

答案 C

解析 方法一: 设函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x^{\frac{1}{3}}$,

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} > 0,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} < 0,$$

故选 C .

$$\text{方法二: } \because \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$\therefore x_0$ 属于区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

故选C .

6 已知函数 $f(x) = 2\ln x$, $g(x) = x^2 - 4x + 5$, 则方程 $f(x) = g(x)$ 的根的个数为 () .

A. 0

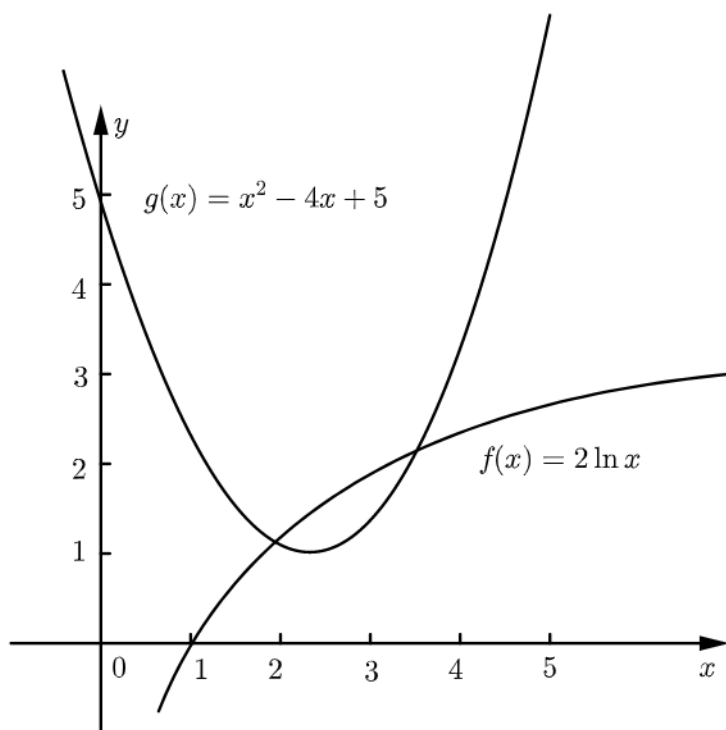
B. 1

C. 2

D. 3

答案 C

解析 在坐标系中, 分别作出函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象如图:



由图象可知两个函数图象的交点为2个 .

综上所述, 答案为: C .

7 函数 $y = 2^{-x} + x^2 - 3$ 的零点个数为 ____ .

答案 2

解析 $-2^{-x} = x^2 - 3$.

8 已知函数 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，且满足 $f(x-2) = f(x+2)$ ，当 $x \in (0, 2)$ 时， $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ ，则方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[0, 8]$ 上的解的个数是 () .

A. 3

B. 5

C. 7

D. 9

答案 D

解析 由 $f(x-2) = f(x+2)$ 得， $f(x) = f(x+4)$ ，

$\therefore f(x)$ 的周期为 4 .

$\because x \in (0, 2)$ 时， $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ ， $f(x)$ 为奇函数；

当 $x = 0$ 时， $f(0) = 0$ ，当 $-2 < x < 0$ 时， $f(x) = -\ln(x^2 + x + 1)$.

$\therefore$ 当 $-2 < x < 2$ 时， $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 - x + 1), & 0 < x < 2 \\ -\ln(x^2 + x + 1), & -2 < x \leq 0 \end{cases}$;

当 $-2 < x < 2$ 时，令 $f(x) = 0$ ，则 $x = 0$ 或 $x = \pm 1$ ，

又 $f(-2) = f(2) = -f(2)$ ，故 $f(2) = 0$ ，则 $f(6) = 0$ ，

$\therefore$ 当 $x \in [0, 8]$ 时， $f(x)$ 的零点为：0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 2, 6 共 9 个 .

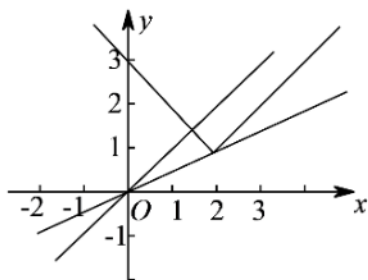
故选 D .

2. 根据零点信息确定参数取值范围

9 已知函数 $f(x) = |x-2| + 1$ ， $g(x) = kx$ ，若方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不等实数根，则实数 k 的取值范围是 _____ .

答案 $\frac{1}{2} < k < 1$

解析 根据题意，如图：



$f(x) = g(x)$ 有两个不等实根可化为函数，

$f(x) = |x - 2| + 1$ 与 $g(x) = kx$ 的图像有两个不同的交点，

$g(x) = kx$ 为过原点的直线，斜率为 k ，

如图，当过点 $(2, 1)$ 时， $k = \frac{1}{2}$ ，有一个交点，

当平行时，即 $k = 1$ 时有一个交点，综合图像可得 $\frac{1}{2} < k < 1$ 。

10 已知函数 $y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ 的图像与函数 $y = kx$ 的图像恰有两个交点，则实数 k 的取值范围是 _____。

答案 $(0, 1) \cup (1, 2)$

解析

$$\text{函数 } y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \frac{|(x - 1)(x + 1)|}{x - 1},$$

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时, } y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = |x + 1| = x + 1,$$

$$\text{当 } x < 1 \text{ 时, } y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = -|x + 1| = \begin{cases} -x - 1, & -1 \leq x < 1 \\ x + 1, & x < -1 \end{cases}$$

$$\text{综上函数 } y = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1} = \begin{cases} x + 1, & x \geq 1 \\ -x - 1, & -1 \leq x < 1 \\ x + 1, & x < -1 \end{cases}, \text{ 做出函数的}$$

图象，

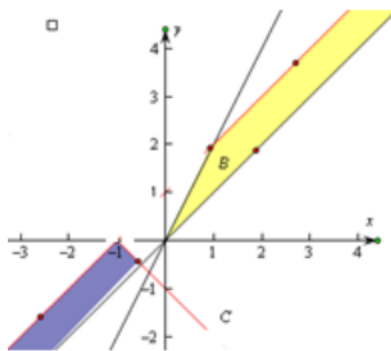
要使函数 y 与 $y = kx$ 有两个不同的交点，

则直线 $y = kx$ 必须在蓝色或黄色区域内，

如图，则此时当直线经过黄色区域时 $B(1, 2)$ ，

k 满足 $1 < k < 2$

综上实数的取值范围是 $(0, 1) \cup (1, 2)$



11 函数 $f(x) = 2^x - mx$ ($m \in \mathbf{R}$) 在 $(1, 4)$ 内有唯一零点，则 m 的取值范围是 ()。

A. $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

B. $(2, 4)$

C. $(1, 2)$

D. $(1, 4)$

答案 B

解析 $f(x) = 2^x - mx$ 与 $f(x) = 0$,

$$2x - mx = 0,$$

$$2x = mx,$$

$\therefore f(x)$ 在 $(1, 4)$ 只有 1 个零点,

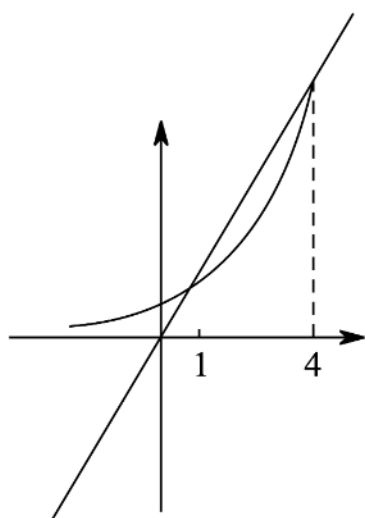
$\therefore$ 相切时 $\mathbf{R}$ 只有一个零点,

且当 $x = 1$ 时, $2^x = 2$,

直线过 $(1, 2)$ 点, $m = 2$,

当不相切时 $4m < 16$, $m < 4$,

$\therefore m \in (2, 4)$.



- 12 已知函数 $f(x) = 3^{-x} + a$ 的图像经过第二、三、四象限, $g(a) = f(a) - f(a+1)$, 则 $g(a)$ 的取值范围是 _____.

答案 $(2, +\infty)$

解析 $\because$ 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + a$ 的图象经过第二、三、四象限,

$\therefore a < -1$, 则:

$$g(a) = f(a) - f(a+1)$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^a + a - \left(\frac{1}{3}\right)^{a+1} - a$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^a \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^a,$$

$$\because a < -1,$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^a > 3,$$

$$\therefore \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^a > 2,$$

$\therefore g(a)$ 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

13 已知函数 $f(x) = |x - 2| + 1$, $g(x) = kx$. 若方程 $f(x) = g(x)$ 有两个不相等的实根, 则实数 k 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

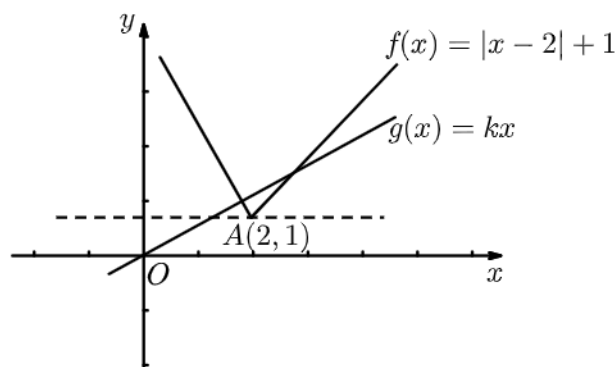
B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

C. $(1, 2)$

D. $(2, +\infty)$

答案 B

解析 由题意可得函数 $f(x)$ 的图象和函数 $g(x)$ 的图象有两个交点, 如图所示:



$$K_{OA} = \frac{1}{2},$$

数形结合可得 $\frac{1}{2} < k < 1$,

故选: B.

14 关于 x 的方程 $\ln x = kx$ 有解, 则 k 的取值范围是 _____.

答案 $k \leq \frac{1}{e}$

解析 要使方程 $\ln x = kx$ 有解，

即 $k = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$) 的值域，

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ($x > 0$)， $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = e$ ，

且当 $x \in (0, e)$ 时， $f'(x) > 0$ ， $x \in (e, +\infty)$ 时 $f'(x) < 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $x = e$ 处取极大值，

$\therefore f(x) = f(e) = \frac{1}{e}$ ，

$\therefore k \leq \frac{1}{e}$ 。

故答案为： $k \leq \frac{1}{e}$ 。

15 若关于 x 的方程 $x^2 + 2ax - 5 = 0$ 的两个实数根 x_1, x_2 满足 $x_1 < 1 < x_2$ ，则实数 a 的取值范围是 ()。

A. $(-2, 2)$

B. $(-\infty, 2)$

C. $(-\infty, 2]$

D. $(2, +\infty)$

答案 B

解析 $\because \Delta = 4a^2 + 20 > 0$ 恒成立。

$\therefore f(x)$ 在 R 上有两不相等实根。

又 $\because f(x)$ 图像与 x 轴有两个交点，分别在 l 的两侧， $f(x)$ 开口向上。

$\therefore f(1) < 0 \Rightarrow a < 2$ 。