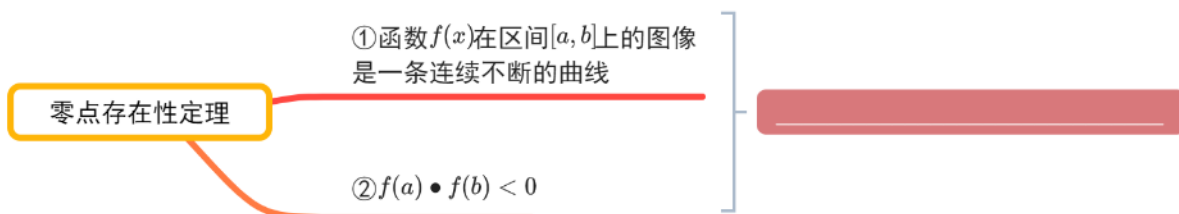


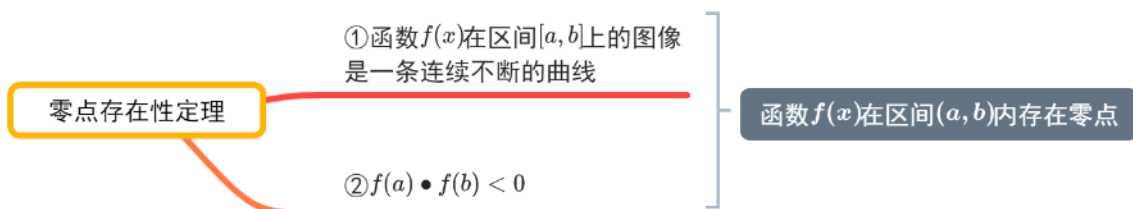
03：函数零点综合问题（一）

1. 零点存在性定理

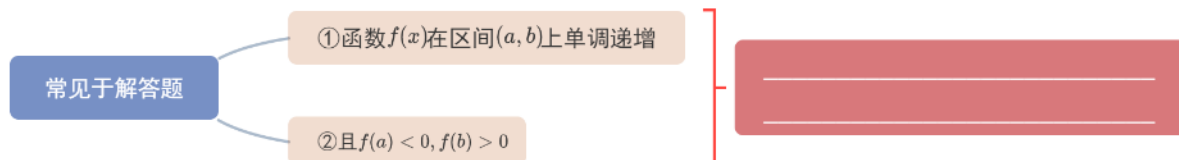
1. 零点存在性定理



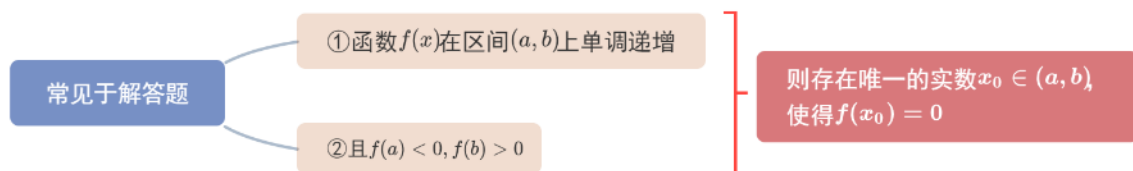
教法备注



2. 零点存在性定理的常见应用形式



教法备注



1 函数 $y = x^3$ 与 $y = 2^x + 1$ 的图象的交点为 (x_0, y_0) ，则 x_0 所在区间是（ ）。

A. (0, 1)

B. (1, 2)

C. (2, 3)

D. (3, 4)

答案 B

解析

$$\text{设 } f(x) = x^3 - 2^x - 1,$$

$$\therefore f(1) = 1 - 2 - 1 < 0, f(2) = 8,$$

$$\therefore f(1)f(2) < 0,$$

所以函数在区间(1, 2)内有零点,

2 函数 $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2}{x}$ 的零点所在的大致区间是 ().

A. (0, 1)

B. (1, 2)

C. (2, 3)

D. (3, 4)

答案

B

解析

$$\therefore f(1) = \ln(1+1) - 2 = \ln 2 - 2 < 0,$$

$$\text{而 } f(2) = \ln 3 - 1 > \ln e - 1 = 0,$$

$$\therefore \text{函数 } f(x) = \ln(x+1) - \frac{2}{x} \text{ 的零点所在区间是 } (1, 2),$$

故选 B.

3 函数 $f(x) = 3^x - \log_2(-x)$ 的零点所在区间是 ().

A. $\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$

B. $(-2, -1)$

C. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

D. $(1, 2)$

答案

B

解析

$$\therefore f(-2) = 3^{-2} - \log_2 2 < 0,$$

$$f(-1) = 3^{-1} - \log_2 1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} > 0,$$

$$\therefore f(-2) \cdot f(-1) < 0,$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = 3^x - \log_2(-x)$ 在区间 $(-2, -1)$ 必有零点.

故选: B.

4 函数 $f(x) = \ln(-x) - \frac{1}{3}x - 2$ 的零点所在区间为 ().

A. $(-4, -3)$

B. $(-3, -e)$

C. $(-e, -2)$

D. $(-2, -1)$

答案 B

解析

$\because$ 函数 $f(x) = \ln(-x) - \frac{1}{3}x - 2$,

根据复合函数单调性可知单调减,

$$f(-3) = \ln 3 - 1 > 0,$$

$$f(-e) = \frac{e}{3} - 1 < 0,$$

$$\therefore f(-3) \cdot f(-e) < 0,$$

由零点存在定理得, 零点在 $(-3, -e)$.

故选: B.

5 设函数 $f(x) = e^x + x - 2$, $g(x) = \ln x + x^2 - 3$, 若实数 a, b 满足 $f(a) = 0$, $g(b) = 0$, 则().

A. $0 < g(a) < f(b)$

B. $f(b) < g(a) < 0$

C. $f(b) < 0 < g(a)$

D. $g(a) < 0 < f(b)$

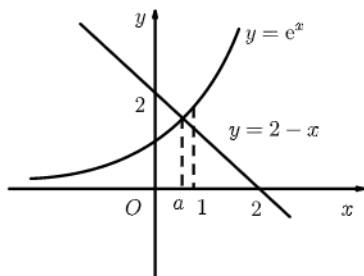
答案 D

解析

$\because y = e^x$ 和 $y = x - 2$ 是关于 x 的单调递增函数,

$\therefore$ 函数 $f(x) = e^x + x - 2$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

分别作出 $y = e^x$, $y = 2 - x$ 的图象如图所示,



$$\therefore f(0) = 1 + 0 - 2 < 0, f(1) = e - 1 > 0,$$

$$\text{又} \because f(a) = 0,$$

$$\therefore 0 < a < 1,$$

同理, $g(x) = \ln x + x^2 - 3$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上单调递增,

$$g(1) = \ln 1 + 1 - 3 = -2 < 0,$$

$$g(\sqrt{3}) = \ln \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - 3 = \frac{1}{2} \ln 3 > 0,$$

$$\text{又} \because g(b) = 0,$$

$$\therefore 1 < b < \sqrt{3},$$

$$\therefore g(a) = \ln a + a^2 - 3 < g(1) = \ln 1 + 1 - 3 = -2 < 0,$$

$$f(b) = e^b + b - 2 > f(1) = e + 1 - 2 = e - 1 > 0,$$

$$\therefore g(a) < 0 < f(b).$$

故选D.

- 6 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y = f(x)$ 对于任意的 x 都满足 $f(x+1) = -f(x)$, 当 $-1 \leq x < 1$ 时, $f(x) = x^3$, 若 $g(x) = \lg x$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象交点个数为 _____.

答案 5

解析 略.

2. 根据零点信息确定参数取值范围

由函数零点与函数图象的关系, 有些零点问题可以转化为函数图象与 x 轴的交点问题或两函数图象的交点问题解决.

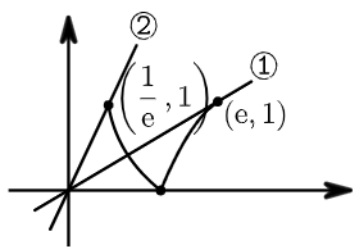
- 7 已知 $f(x) = |\ln x|$, 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上有唯一的零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

答案 $\frac{1}{e} < a < e$

备选答案: $a = 0$

解析 $g(x) = |\ln x| - ax$,

$$g(x) = \begin{cases} -\ln x - ax, & \left[\frac{1}{e}, 1\right] \\ \ln x - ax, & [1, e] \end{cases},$$



① $a \cdot e = 1, a = \frac{1}{e}$;

② $a \cdot \frac{1}{e} = 1, a = e$,

$\therefore \frac{1}{e} < a < e$ 或 $a = 0$.

故答案为: $\frac{1}{e} < a < e$ 或 $a = 0$.

8 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, 当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x) = \ln x$, 若在区间 $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ 内, 曲线

$g(x) = f(x) - ax$ 与 x 轴有三个不同的交点, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

B. $\left[\frac{\ln 3}{3}, \frac{1}{e}\right)$

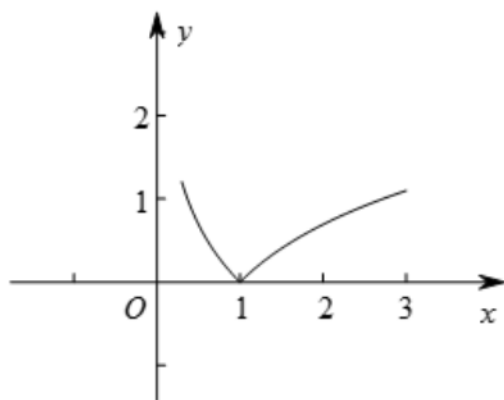
C. $\left(0, \frac{1}{2e}\right)$

D. $\left[\frac{\ln 3}{3}, \frac{1}{2e}\right)$

答案 B

解析 设 $x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$, 当 $\frac{1}{x} \in [1, 3]$ 时, 又 $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象如图所示:



当 $a \leq 0$ 时, 显然, 不合乎题意,

当 $a > 0$ 时, 如图示,

当 $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ 时, 存在一个零点,

当 $1 < x < 3$ 时, $f(x) = \ln x$, 可得 $g(x) = \ln x - ax (x \in (1, 3])$,

$$g'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1 - ax}{x},$$

若 $g'(x) < 0$, 可得 $x > \frac{1}{a}$, $g(x)$ 为减函数,

若 $g'(x) > 0$, 可得 $x < \frac{1}{a}$, $g(x)$ 为增函数,

此时 $f(x)$ 必须在 $[1, 3]$ 上有两个零点,

$$\therefore \begin{cases} g\left(\frac{1}{a}\right) > 0 \\ g(3) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{\ln 3}{3} \leq a < \frac{1}{e}.$$

故选 B.

9 函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$ 有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(0, 2)$

B. $(2, e)$

C. $(e, +\infty)$

D. $(2, +\infty)$

答案 D

解析 函数 $f(x) = (x+1)\ln x - a(x-1)$ 有 3 个零点,

即方程 $(x+1)\ln x = a(x-1)$ 有 3 个根,

也就是 $y = (x+1)\ln x$ 与 $y = a(x-1)$ 的图象有 3 个不同交点.

由 $y = (x+1)\ln x$, 得 $y' = \ln x + 1 + \frac{1}{x}$,

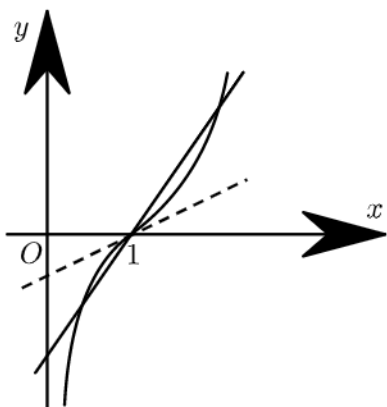
$$y'' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $y'' < 0$, y' 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, y' 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore y'$ 有极小值为 $2 > 0$,

$\therefore y = (x+1)\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增函数, 其图象如图:



而直线 $y = a(x - 1)$ 过定点 $(1, 0)$,

且函数 $y = (x + 1)\ln x$ 在 $x = 1$ 处的切线的斜率为 $y'|_{x=1} = 2$,

$\therefore$ 要使 $y = (x + 1)\ln x$ 与 $y = a(x - 1)$ 的图象有 3 个不同交点, 则 a 的取值范围为 $(2, +\infty)$.

故选 D.

10 已知 $f(x) = |x^2 - 1| + x^2 + kx$ 在 $(0, 2)$ 上有两个零点, 则实数 k 的取值范围是 _____.

答案 $\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$

解析 $f(x) = |x^2 - 1| + x^2 + kx = \begin{cases} kx + 1, & x \in (0, 1] \\ 2x^2 + kx - 1, & x \in (1, 2) \end{cases}$

当两个零点在 $(0, 1]$, $(1, 2)$ 各一个时, 应有

$$\begin{cases} f(0) = 1 > 0 \\ f(1) = k + 1 < 0 \\ f(2) = 8 + 2k - 1 > 0 \end{cases}$$

解得: $-\frac{7}{2} < k < -1$,

当两个零点都在 $(1, 2)$ 时, 显然不符合根与系数的关系 $x_1 x_2 = -\frac{1}{2} < 0$,

则实数 k 的取值范围是 $\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$,

综上所述, 答案为: $\left(-\frac{7}{2}, -1\right)$.

11 设 $f(x) = \begin{cases} 3^{-x} & x \leq 0 \\ f(x-1) & x > 0 \end{cases}$, 若 $f(x) = x + a$ 有且仅有三个解, 则实数 a 的取值范围是 ().

A. $(-\infty, 2)$

B. $(-\infty, 1)$

C. $[1, 2]$

D. $[1, +\infty)$

答案 A

解析 由题意得，

(1) $a \geq 3$ 时，两个图象有且只有一个公共点．

(2) $2 \leq a < 3$ ，两个图象有两个公共点．

(3) $a < 2$ 时，两个图象有三个公共点．

故选A．

12 已知函数 $f(x) = e^x - 2x + a$ 有零点，则 a 的取值范围是 _____．

答案 $(-\infty, 2\ln 2 - 2]$

解析 由原函数有零点，可将问题转化为方程 $e^x - 2x + a = 0$ 有解问题，即方程 $a = 2x - e^x$ 有解．

令函数 $g(x) = 2x - e^x$ ，则 $g'(x) = 2 - e^x$ ，令 $g'(x) = 0$ ，得 $x = \ln 2$ ，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上是增函数，在 $(\ln 2, +\infty)$ 上是减函数，

所以 $g(x)$ 的最大值为： $g(\ln 2) = 2\ln 2 - 2$ ．

$\therefore$ 当 $a \leq 2\ln 2 - 2$ 时，方程有解，即原函数有零点．

$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\infty, 2\ln 2 - 2]$ ．

13 若函数 $y = x + \frac{a}{x} + 1$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是 _____．

答案 $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right)$ ．

解析 若 $y = \frac{x^2 + x + a}{x}$ 有2个零点，

即方程 $f(x) = x^2 + x + a$ 有2个不同的根，且根不等于0，故 $a \neq 0$ ，

故 $\Delta = 1 - 4a > 0$ ，解得： $a < \frac{1}{4}$ ，

故答案为 $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right)$ ．

已知当 $x \in [0, 1]$ 时，函数 $y = (mx - 1)^2$ 的图象与 $y = \sqrt{x} + m$ 的图象有且只有一个交点，则正实数 m 的取值范围是 () .

- A. $(0, 1] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$
- B. $(0, 1] \cup [3, +\infty)$
- C. $(0, \sqrt{2}] \cup [2\sqrt{3}, +\infty)$
- D. $(0, \sqrt{2}] \cup [3, +\infty)$

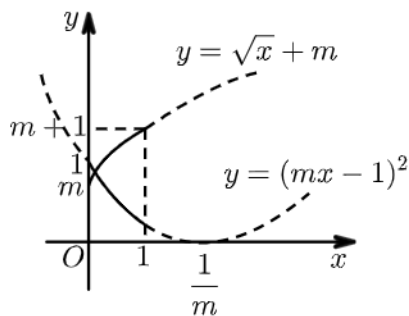
答案 B

解析 当 $x \in [0, 1]$ 时， $y = \sqrt{x} + m$ 的值域为 $[m, m+1]$ ，且在 $[0, 1]$ 上单调递增 .

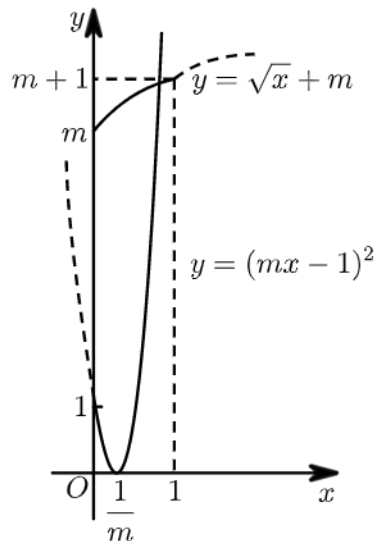
$y = (mx - 1)^2 = m^2 \left(x - \frac{1}{m}\right)^2$. 由于 $m > 0$,

①当 $\frac{1}{m} \geq 1$, 即 $0 < m \leq 1$ 时，函数 $y = (mx - 1)^2$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减，值域为 $[(m-1)^2, 1]$.

两函数图象有且只有一个交点，如图 .



②当 $\frac{1}{m} < 1$, 即 $m > 1$ 时，函数 $y = (mx - 1)^2$ 在 $\left[0, \frac{1}{m}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\frac{1}{m}, 1\right]$ 上单调递增，值域为 $\left[0, \max\left\{1, (m-1)^2\right\}\right]$. 如图，



若两函数图象在 $[0, 1]$ 上有且只有一个交点，则 $\begin{cases} (m-1)^2 \geq m+1 \\ m > 1 \end{cases}$ ，解得 $m \geq 3$.

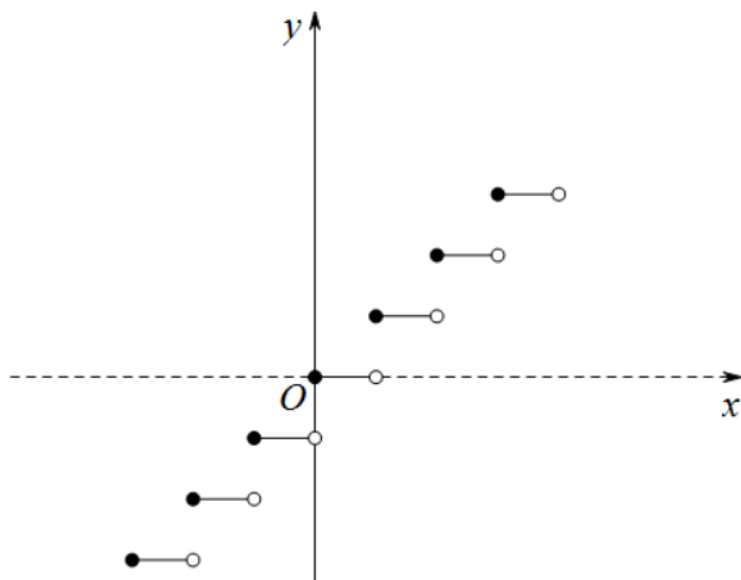
综上所述, m 的取值范围是 $(0, 1] \cup [3, +\infty)$.

故选B.



补充: 取整函数 (高斯函数)

$f(x) = [x]$ ($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 如 $[-1.2] = -2$, $[1] = 1$, $[2.5] = 2$), 其图象如下:



15 已知函数 $f(x) = x - [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 若关于 x 的方程 $f(x) = kx + k$ 有三个不同的实根, 则实数 k 的取值范围是 ().

- A. $[-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$
- B. $(-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$
- C. $[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$
- D. $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, 1)$

答案 B

解析 画出函数 $y = f(x)$ 的图象, 其图象

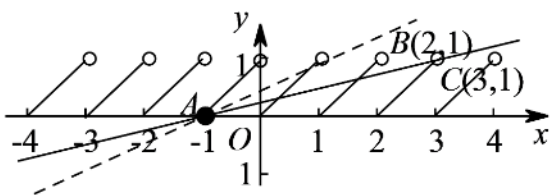
为具有周期性, 并且在区间 $[0, 1)$ 上的解析式为

$y = x$. 函数 $y = kx + k$ 可能是任意一条经过点

$(-1, 0)$ 且不与 x 轴垂直的直线. 斜率 k 使得函数

$y = f(x)$ 的图象与函数 $y = kx + k$ 的图象恰有 3 个

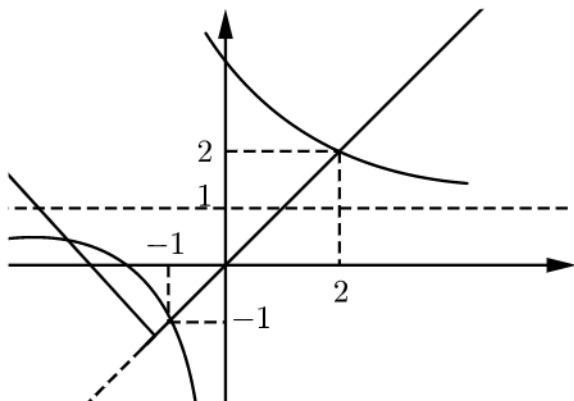
交点根据图像可知 $k \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$.



- 16 已知函数 $f(x) = |x - a| - \frac{2}{x} + a$, $a \in \mathbf{R}$, 若方程 $f(x) = 1$ 有且只有三个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是 _____.

答案 $(-\infty, \frac{1-2\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{1+2\sqrt{2}}{2}, 2)$.

解析



由 $f(x) = 1$ 得 $|x - a| - \frac{2}{x} + a = 1$, 即 $|x - a| + a = \frac{2}{x} + 1$,

设 $h(x) = |x - a| + a$, $g(x) = \frac{2}{x} + 1$, $h(x) = |x - a| + a$ 的顶点 (a, a) 在 $y = x$ 上, 而 $y = x$ 与 $g(x)$ 的交点坐标为 $(2, 2)$, $(-1, -1)$,

当 $x < a$ 时, $f(x) = -x + 2a$,

联立 $\begin{cases} y = -x + 2a \\ y = \frac{2}{x} + 1 \end{cases}$, 可得 $x^2 + (1 - 2a)x + 2 = 0$,

由 $\Delta = (1 - 2a)^2 - 8 = 0$, 解得 $a = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}$ 或 $a = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}$,

由图可知, 要使方程 $f(x) = 1$ 有且只有三个不同的实数根, 则实数 a 的取值范围是

$(-\infty, \frac{1 - 2\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2}, 2)$.

3. 函数零点的关系

一般借助函数的图像, 研究零点满足的**对称性或周期性**, 探究两个或多个零点之间的关联性。

17 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} + 2\cos \pi x$ ($-4 \leq x \leq 6$) 的所有零点之和为 _____ .

答案 10

解析 方法一：由题意，问题转化为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$ 与 $y = -2\cos \pi x$ 在 $-4 \leq x \leq 6$ 的交点的和，

因为两个函数均关于 $x = 1$ 对称，

所以直线 $x = 1$ 两侧的交点关于 $x = 1$ 对称，

那么对称点的和为 2，

分别画出两个函数的图象，知图象在直线 $x = 1$ 的两侧各有 5 个交点，

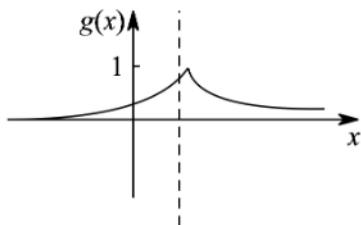
所以零点之和为 $5 \times 2 = 10$.

方法二：若要求 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} + 2\cos \pi x$ ($-4 \leq x \leq 6$) 的所有零点，

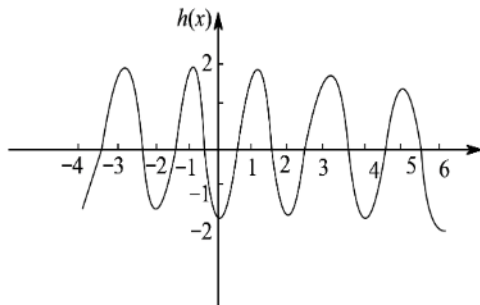
则只需求 $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} = -2\cos \pi x$ ，在 $(-4 \leq x \leq 6)$ 上的交点，

设 $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$ ， $h(x) = -2\cos \pi x$ ，

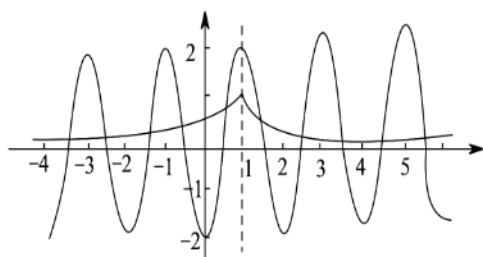
可得 $g(x)$ 图象为：



$h(x)$ 的图象为：



$\therefore g(x)$ 与 $h(x)$ 图象为：



可得，以 $x=1$ 为对称轴，左边5个交点与右边5个交点是关于 $x=1$ 对称的，

$\therefore$ 所有交点和为 $5 \times 2 \times 1 = 10$ 。

故答案为10。

- 18 定义在 $\{x|x \in \mathbf{R}, x \neq 1\}$ 上的函数 $f(1-x) = -f(1+x)$ ，当 $x > 1$ 时， $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，则函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\cos\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($-3 \leq x \leq 5$)的所有零点之和等于_____。

答案 8

解析 因为函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = -f(1+x)$ ，

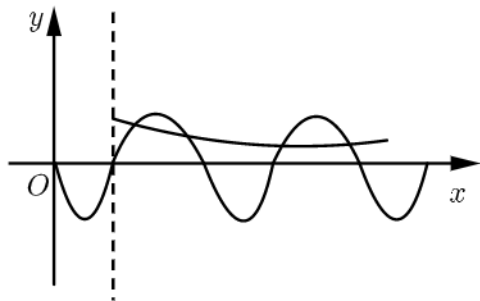
所以 $f(1-x) + f(1+x) = 0$ ，

所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称。

令 $h(x) = \frac{1}{2}\cos\pi\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\sin\pi x$ ($-3 \leq x \leq 5$)，

则函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\cos\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($-3 \leq x \leq 5$)的零点为函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 与函数 $h(x) = -\frac{1}{2}\sin\pi x$ 图象的交点。

如图所示，



当 $x > 1$ 时，两函数图象的交点共有4个，

所以根据对称性，可得两函数图象的交点共有8个，

又因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 中心对称，

所以函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\cos\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($-3 \leq x \leq 5$)所有零点之和等于8。

故答案为8 .

19 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 当 $-1 \leq x < 0$ 时,

$f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(-x)$, 则方程 $f(x) - \frac{1}{2} = 0$ 在 $(0, 6)$ 内的所有根之和为 _____ .

答案 12

解析 略 .