

02：幂函数与函数零点初步练习题

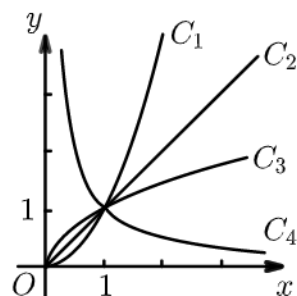
1. 幂函数典型题



图像及定义问题

1

已知幂函数 $y = x^\alpha$ 在第一象限内的图象如图所示，且 α 分别取 $-1, 1, \frac{1}{2}, 2$ ，则相应于曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 的 α 的值依次为 () .



A. $\frac{1}{2}, 1, 2, -1$

B. $2, 1, \frac{1}{2}, -1$

C. $\frac{1}{2}, -1, 2, 1$

D. $2, -1, \frac{1}{2}, 1$

答案

B



利用定义判断函数单调性、奇偶性问题

2

2020~2021学年12月天津南开区天津市南开中学高三上学期月考第2题5分

下列函数中，在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递增的是 () .

A. $y = 2^{-x}$

B. $y = x^{\frac{1}{2}}$

C. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

D. $y = \frac{1}{x}$

答案

B

解析

A选项： $\because y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x, 0 < \frac{1}{2} < 1,$

$\therefore y = 2^{-x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减；

B选项： $\because \frac{1}{2} > 0$,

$\therefore y = x^{\frac{1}{2}}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增；

C选项： $\because 0 < \frac{1}{2} < 1$,

$\therefore y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减；

D选项： $\because y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $-1 < 0$,

$\therefore y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

故选B.

3 2020~2021学年10月天津河西区天津市第四十二中学高三上学期月考第13题5分

已知幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2}$ 为偶函数则 m 的值为 _____ .

答案 2

解析 幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 1)x^{m^2}$,

则 $m^2 - m - 1 = 1$,

$\therefore m = 2$ 或 $m = -1$,

当 $m = -1$ 时, $f(x) = x$ 为奇函数, 舍去;

当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^4$ 为偶函数, 满足.

4 2018~2019学年天津红桥区天津市第三中学高三下学期开学考试理科第3题5分

下列函数中, 是偶函数且在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数是 ().

A. $y = \log_{0.5} x$

B. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$

C. $y = -x^{-2}$

D. $y = x^{\frac{1}{3}}$

答案 C

解析 A选项： $y = \log_{0.5} |x| = \log_{0.5} |-x|$, $\therefore$ 函数为偶函数,

当 $x > 0$ 时, $y = \log_{0.5} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 故A错误;

B选项： $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} = \left(\frac{1}{3}\right)^{|-x|}$, $\therefore$ 函数为偶函数,

当 $x > 0$ 时, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数, 故B错误;

C选项: $y = -x^{-2} = -(-x)^{-2}$, $\therefore$ 函数为偶函数,

当 $x > 0$ 时, $y = -x^2$, $y' = 2x^{-3} > 0$, $\therefore f(x)$ 为增函数, 故C正确;

D选项: $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y|_{-x} = (-x)^{\frac{1}{3}} = -y$, $\therefore$ 函数为奇函数, 故D错误.

故选C.

5 2018~2019学年天津滨海新区高二下学期期末第7题5分

“ $\alpha = 3$ ”是“ $f(x) = x^\alpha$ ”在 $(0, +\infty)$ 内单调递增”的().

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 B

解析 $\alpha = 3$ 时, $f(x) = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore$ “ $\alpha = 3$ ”是“ $f(x) = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”的充分条件成立,

又 $\because$ 当 $f(x) = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增时由幂函数性质得 $\alpha > 0$,

$\therefore$ “ $\alpha = 3$ ”是“ $f(x) = x^\alpha$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”的充分不必要条件.

故选B.

比较大小

6 2017~2018学年天津南开区天津市南开中学高三上学期周测理科第四周第5题5分

若 $\frac{1}{5} < \left(\frac{1}{5}\right)^b < \left(\frac{1}{5}\right)^a < 1$, 则().

A. $a^a < a^b < b^a$

B. $a^a < b^a < a^b$

C. $a^b < b^a < a^a$

D. $a^b < a^a < b^a$

答案 D

解析 由题可得: $\left(\frac{1}{5}\right)^1 < \left(\frac{1}{5}\right)^b < \left(\frac{1}{5}\right)^a < \left(\frac{1}{5}\right)^0$,

$$\therefore 0 < a < b < 1,$$

$$\therefore a^b < a^a, a^a < b^a, \text{ 即 } a^b < a^a < b^a.$$

$\therefore$ 选D.

7 2018~2019学年4月天津和平区天津市耀华中学高三下学期月考文科第4题5分

已知 $f(x) = x^3 + 3x$, $a = 2^{0.3}$, $b = 0.3^2$, $c = \log_2 0.3$, 则 ().

A. $f(a) < f(b) < f(c)$

B. $f(b) < f(c) < f(a)$

C. $f(c) < f(b) < f(a)$

D. $f(b) < f(a) < f(c)$

答案 C

解析 $f(x) = x^3 + 3x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

$$\therefore 2^{0.3} > 2^0 = 1, 0 < 0.3^2 < 1, \log_2 0.3 < \log_2 1 = 0,$$

$$\therefore c < b < a,$$

$$\therefore f(c) < f(b) < f(a).$$

故选: C.

8 2015~2016学年天津高三上学期期中文科六校联考第4题5分

已知 $0 < a < b < 1$, e 是自然对数的底数, 则正确的是 ().

A. $\left(\frac{1}{e}\right)^a < \left(\frac{1}{e}\right)^b$

B. $3^b < 3^a$

C. $(\lg a)^2 < (\lg b)^2$

D. $\log_a 3 > \log_b 3$

答案 D

解析 $\therefore 0 < a < b < 1,$

$\therefore \left(\frac{1}{e}\right)^a > \left(\frac{1}{e}\right)^b, 3^a < 3^b, (\lg a)^2 > (\lg b)^2, \lg a < \lg b < 0,$
 可得 $\frac{\lg 3}{\lg a} > \frac{\lg 3}{\lg b}$ 即 $\log_a 3 > \log_b 3$.
 故选D.

9 2019~2020学年天津河西区高二上学期期中第10题5分

如果 $a > b > 0, n \in \mathbf{N}^*$, 则 a^n _____ b^n . (填“>”, “<”或“=”)

答案 >

解析 设函数 $f(x) = x^n (n \in \mathbf{N}^*)$,
 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增,
 如果 $a > b > 0$, 则 $f(a) > f(b)$,
 则 $a^n > b^n$.

解不等式

10 2015~2016学年天津高三上学期期末文科六校联考第6题5分

设 $f(x) = a^x, g(x) = x^{\frac{1}{3}}, h(x) = \log_a x$, 且 a 满足 $\log_a (1 - a^2) > 0$, 那么当 $x > 1$ 时必有 ().

- A. $h(x) < g(x) < f(x)$
- B. $h(x) < f(x) < g(x)$
- C. $f(x) < g(x) < h(x)$
- D. $f(x) < h(x) < g(x)$

答案 B

解析 $\because a$ 满足 $\log_a (1 - a^2) > 0, \therefore 0 < a < 1$.
 $\therefore$ 当 $x > 1$ 时, $0 < f(x) = a^x < 1, g(x) = x^{\frac{1}{3}} > 1, h(x) = \log_a x < 0$;
 $\therefore h(x) < 0 < f(x) < 1 < g(x)$.

2. 不含参函数零点典型题



求解确定函数零点

11

2020~2021学年12月天津和平区天津市第二十中学高一上学期月考第19题

已知函数 $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$.

求方程 $f(x) = \frac{1}{4}$ 的实数解 .

答案

$$x = \log_2 \frac{5}{3} .$$

解析

$$\frac{2^x - 1}{2^x + 1} = \frac{1}{4} ,$$

$$\therefore 4 \cdot 2^x - 4 = 2^x + 1 ,$$

$$\therefore 3 \cdot 2^x = 5 ,$$

$$\therefore 2^x = \frac{5}{3} ,$$

$$\therefore x = \log_2 \frac{5}{3} .$$



根据函数图像判断零点个数

12

函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的零点个数为 () .

A. 1个

B. 2个

C. 3个

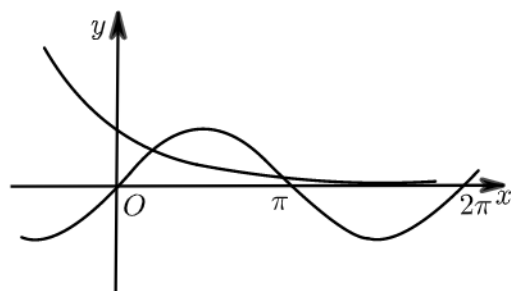
D. 4个

答案

B

解析

如图：

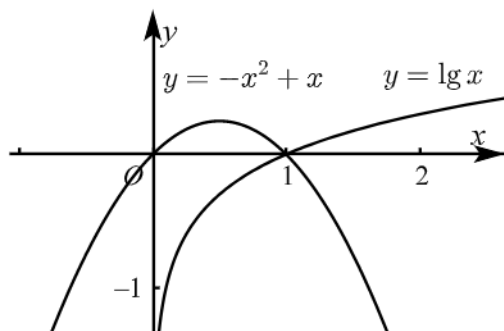


可以看到 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y = \sin x$ 有2个交点 .

13 函数 $f(x) = -x^2 + x - \lg x$ 的零点个数 _____ .

答案 1

解析 画出 $y = -x^2 + x$ 和 $y = \lg x$ 的图像，观察交点即可 .



14 2015~2016 学年天津高一上学期期中六校联考第7题4分

函数 $f(x) = 2^x |\log_{0.5} x| - 1$ 的零点个数为 () .

A. 1

B. 2

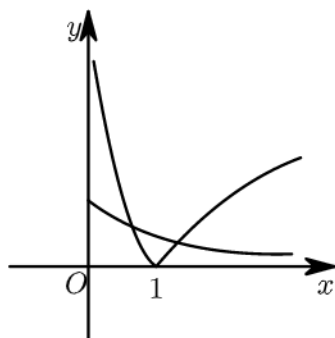
C. 3

D. 4

答案 B

解析 函数 $f(x) = 2^x |\log_{0.5} x| - 1$ ，令 $f(x) = 0$ ，

在同一坐标系中作出 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ，与 $y = |\log_{0.5} x|$ ，如图，



由图可得零点的个数为2 .

故选B .

15 2018~2019学年天津蓟县高二上学期期中第14题4分

若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m+1)x - m = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是_____.

答案 $(-\infty, -3 - 2\sqrt{2}) \cup (-3 + 2\sqrt{2}, +\infty)$

解析 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (m+1)x - m = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = (m+1)^2 + 4m > 0,$$

$$\therefore m^2 + 6m + 1 > 0,$$

$$\therefore m < -3 - 2\sqrt{2} \text{ 或 } m > -3 + 2\sqrt{2}.$$

故答案为： $(-\infty, -3 - 2\sqrt{2}) \cup (-3 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

16 2014年高考真题天津卷文科第9题

函数 $f(x) = 2x^2 - ax + 3$ 有一个零点为 $\frac{3}{2}$ ，则 $f(1) =$ _____.

答案 0

解析 因为 $f(\frac{3}{2}) = 2 \times \frac{9}{4} - \frac{3}{2}a + 3 = 0$ ，所以 $a = 5$ ，

所以 $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ ，故 $f(1) = 2 - 5 + 3 = 0$.

4. 三次函数零点分析

17 已知 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ ，则 $f(x)$ 零点个数_____.

答案 3

解析 $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x-1)(x+2)$ ，

令 $f'(x) = 0$ ，得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = -2$ ，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $(1 + \infty)$ 单调递增 , 在 $(-2, 1)$ 单调递减 .

又 $f(-2) = -16 + 12 + 24 = 20$, $f(1) = 2 + 3 - 12 = -9$, 故有 3 个零点 .

故答案为 : 3 .