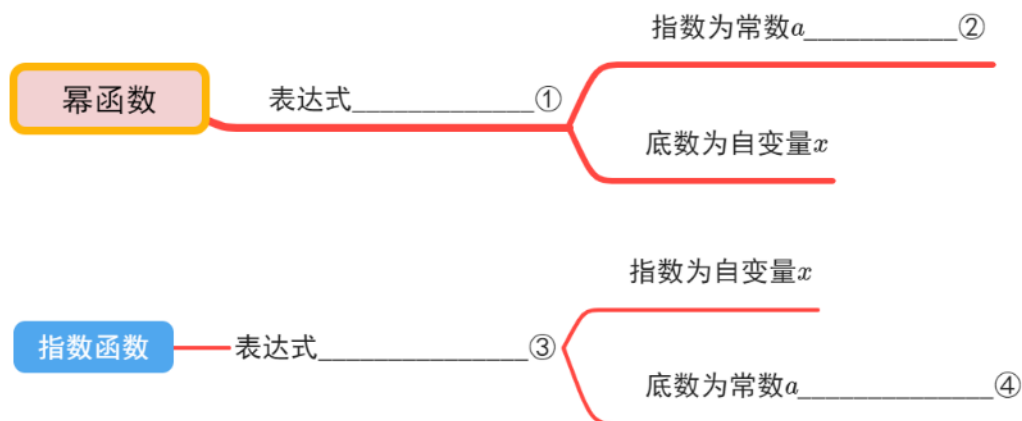


02：幂函数与函数零点初步

1. 幂函数的相关知识

1. 幂函数与指数函数的区别



教法备注

① $y = x^a$ ② $a \in \mathbb{R}$ ③ $y = a^x$ ④ $a > 0$ 且 $a \neq 1$

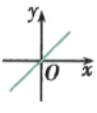
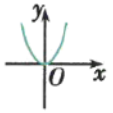
【备注】函数式容易搞混，注意两个常数 a 的不同取值

【特别注意】**幂函数系数必为1**！

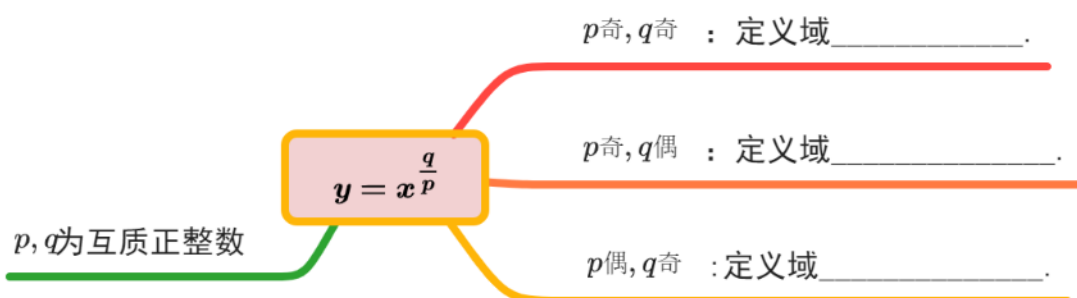
2. 借助图像观察幂函数的特征

	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{-1}$
图像					
定义域					
值域					
奇偶性					
单调性					
定点					
所在象限					

【仅教师可见】

	$y = x$	$y = x^2$	$y = x^3$	$y = x^{\frac{1}{2}}$	$y = x^{-1}$
图像					
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
值域	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$\mathbf{R}$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	单调递增	在 $(-\infty, 0]$ 上 减 在 $[0, +\infty)$ 上 增	单调递增	单调递增	在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减
定点	$(0, 0), (1, 1)$	$(0, 0), (1, 1)$	$(0, 0), (1, 1)$	$(0, 0), (1, 1)$	$(1, 1)$
图象所在 象限	一、三	一、二	一、三	一	一、三

3. 幂函数定义域的判断



教法备注

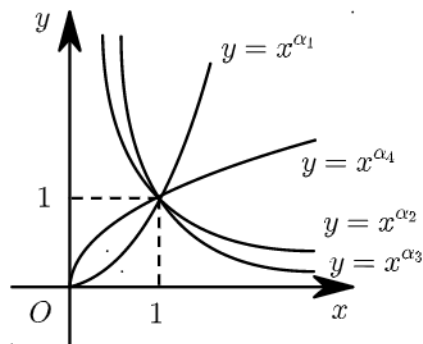
① $\mathbf{R}$ ② $\mathbf{R}$ ③ $[0, +\infty)$

【备注】一般我们将以上分数指数幂的形式改写为**根式**，之后就比较好判断啦~

2. 幂函数典型题

图像及定义问题

1 如图所示，幂函数 $y = x^\alpha$ 在第一象限的图象，比较 $0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 1$ 的大小 () .



- A. $\alpha_1 < \alpha_3 < 0 < \alpha_4 < \alpha_2 < 1$
- B. $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < 1$
- C. $\alpha_2 < \alpha_4 < 0 < \alpha_3 < 1 < \alpha_1$
- D. $\alpha_3 < \alpha_2 < 0 < \alpha_4 < 1 < \alpha_1$

答案 D

解析 作直线 $x = x_0$ (其中 $x_0 > 1$) 与各图象有交点, 则“点低指数小”, 可得

$$\alpha_3 < \alpha_2 < 0 < \alpha_4 < 1 < \alpha_1 .$$

故选D.

2 2016~2017学年天津蓟县高三上学期期中文科第3题5分

设 $a \in \left\{-1, 1, \frac{1}{2}, 3\right\}$, 则使函数 $y = x^a$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 的所有 a 的值为 ().

- D. $-1, 1, 3$

答案 A

解析 $a = -1$ 时, $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 中, $x \neq 0$.

$$a = \frac{1}{2} \text{ 时 } , y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} , x \geqslant 0 .$$

只有 $x = 1$ 和 3 时, 定义域为 $\mathbf{R}$.

故选A.



利用定义判断函数单调性、奇偶性问题

3 2017~2018学年天津南开区天津市南开中学高三上学期周测理科第七周第3题5分

若 $x > y > 1$, $0 < a < 1$, 则下列各式中正确的是().

- D. $x^a > y^a$

答案 D

解析 指数函数中，底数大于1，真数相同时，底数越大，值越大，

$\because x > y > 1$, 而真数相同都为 a ,

$$\therefore x^a > y^a .$$

故选D .

4 2016~2017学年9月天津静海县静海县第一中学高三上学期月考理科第17题13分

已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{3+2m-m^2}$ ($m \in \mathbf{Z}$) 在 $(0, +\infty)$ 是单调减函数, 且为偶函数.

求 $f(x)$ 的解析式.

答案 $f(x) = x^{-4}$.

解析 函数 $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{3+2m-m^2} = x^{m^2-2m-3}$, 在 $(0, +\infty)$ 是单调减函数, 且为偶函数,
可知 $m^2 - 2m - 3 < 0$, 解得 $-1 < m < 3$, 又 m 为整数, 所以 $m = 1$, 即 $f(x) = x^{-4}$.

5 2018~2019学年天津宁河县芦台一中高二下学期期末第10题5分

已知幂函数 $f(x) = (m-1)^2 x^{m^2-4m+2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 2

解析 依题意幂函数 $f(x) = (m-1)^2 x^{m^2-4m+2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore (m-1)^2 = 1 ,$$

解得 $m = 0$ 或 $m = 2$,

当 $m = 0$ 时, $f(x) = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 与题设矛盾, 舍去,

$$\therefore m = 2 .$$

故答案为: 2 .

比较大小

6 2018~2019学年4月天津宁河县芦台一中高三下学期月考文科(十二重点中学联考)第5题5分

已知点 $(m, 9)$ 在幂函数 $f(x) = (m-2)x^n$ 的图象上, 设 $a = f(m^{-\frac{1}{3}})$, $b = f\left(\ln \frac{1}{3}\right)$, $c = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系为().

A. $a < c < b$

B. $b < c < a$

C. $c < a < b$

D. $b < a < c$

答案 A

解析

$\because f(x) = (m-2)x^n$ 为幂函数,

$\therefore m-2=1$, 得 $m=3$,

$\therefore f(3) = 3^n = 9$, 得 $n=2$,

$\therefore f(x) = x^2$ 且 $f(x)$ 为偶函数且在 $(0, +\infty)$ 递增, $a = f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$, $c = f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$,

$b = f\left(\ln \frac{1}{3}\right) = f(\ln 3)$,

$\therefore \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^6 = \frac{1}{9} < \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^6 = \frac{1}{8}$,

$\therefore c > a$,

又 $\ln 3 > 1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$,

$\therefore a < c < b$.

故选A.

7

2017~2018学年12月天津静海县静海县第一中学高三上学期月考理科第7题5分

已知点 $(m, 8)$ 在幂函数 $f(x) = (m-1)x^n$ 的图象上, 设 $a = f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$, $b = f(\ln \pi)$, $c = f\left(-\frac{1}{2}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系为().

A. $c < a < b$

B. $a < b < c$

C. $b < c < a$

D. $b < a < c$

答案 A

解析

根据题意, $m-1=1$,

所以 $m=2$, 所以 $2^n=8$,

所以 $n=3$, 所以 $f(x) = x^3$,

因为 $f(x) = x^3$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

$$\text{又} -\frac{1}{2} < 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 < \ln \pi .$$

所以 $c < a < b$.

故选A .

8 2017~2018学年11月天津南开区天津市南开中学高三上学期周测理科第十周第2题5分

若 $x > y > 1$, $0 < a < b < 1$, 则下列各式中一定成立的是 () .

A. $x^a > y^b$

B. $x^a < y^b$

C. $a^x < b^y$

D. $a^x > b^y$

答案 C

解析 $y = a^x (0 < a < 1)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调递减 ,

$$\because x > y > 1, 0 < a < b < 1,$$

$$\text{故 } a^x < a^y < b^y .$$

故选C .

解不等式

9 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十一中学高三上学期月考第1题4分

设 $x \in \mathbf{R}$, 则 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 是 “ $x^3 < 1$ ” 的 () .

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 A

解析 由 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 得 $0 < x < 1$, 所以 $0 < x^3 < 1$;

由 $x^3 < 1$, 得 $x < 1$, 不能推出 $0 < x < 1$,

所以 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 是 “ $x^3 < 1$ ” 的充分而不必要条件 .

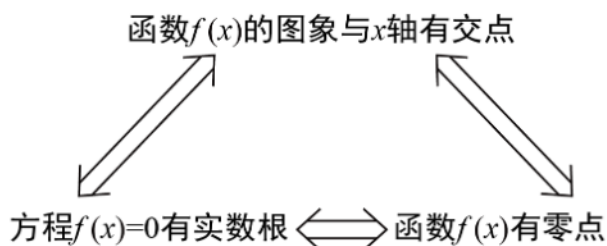
故选A .

3. 零点的概念

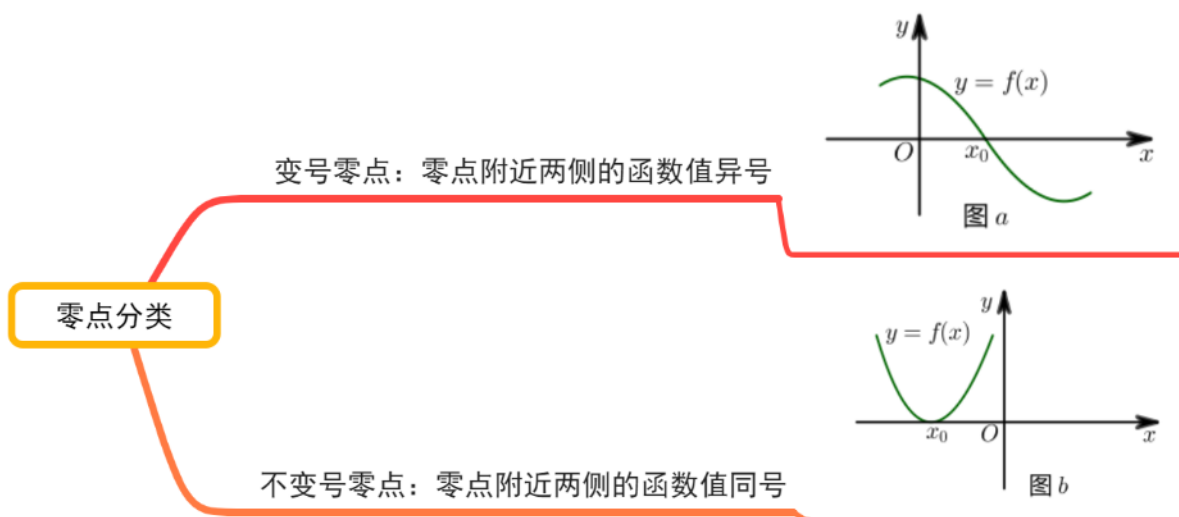
1. 零点的概念

①使 $f(x) = 0$ 的实数 x 叫做函数 $f(x)$ 的零点

②不同表述：



2. 零点的分类



4. 不含参函数零点典型题



求解确定函数零点

10

2017~2018学年黑龙江哈尔滨双城市双城市兆麟中学高一上学期期中第10题5分

已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，当 $x \geq 0$ 时， $f(x) = x^2 - 3x$ 。则函数 $g(x) = f(x) - x + 3$ 的零点的集合为（ ）。

A. $\{1, 3\}$

B. $\{-3, -1, 1, 3\}$

C. $\{2 - \sqrt{7}, 1, 3\}$

D. $\{-2 - \sqrt{7}, 1, 3\}$

答案 D

解析

因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 3x$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \geq 0 \\ -x^2 - 3x, & x < 0 \end{cases}, \text{ 所以 } g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3, & x \geq 0 \\ -x^2 - 4x + 3, & x < 0 \end{cases},$$

$$\text{由 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}, \begin{cases} x < 0 \\ -x^2 - 4x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 - \sqrt{7}.$$

11 2018~2019学年山东青岛李沧区青岛第五十八中学高一上学期期末第12题5分

下列函数没有零点的是 () .

A. $f(x) = (x+2) \ln x$

B. $f(x) = \cos \pi x - e^{|x|}$

C. $f(x) = e^x + \ln(x+1) - 1$

D. $f(x) = e^{-\ln x} + \sin x + 1$

答案 D

解析

A选项: 当 $x = -2$ 时, $f(x) = 0$. $\therefore$ 有零点, 故A错误;

B选项: 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$. $\therefore$ 有零点, 故B错误;

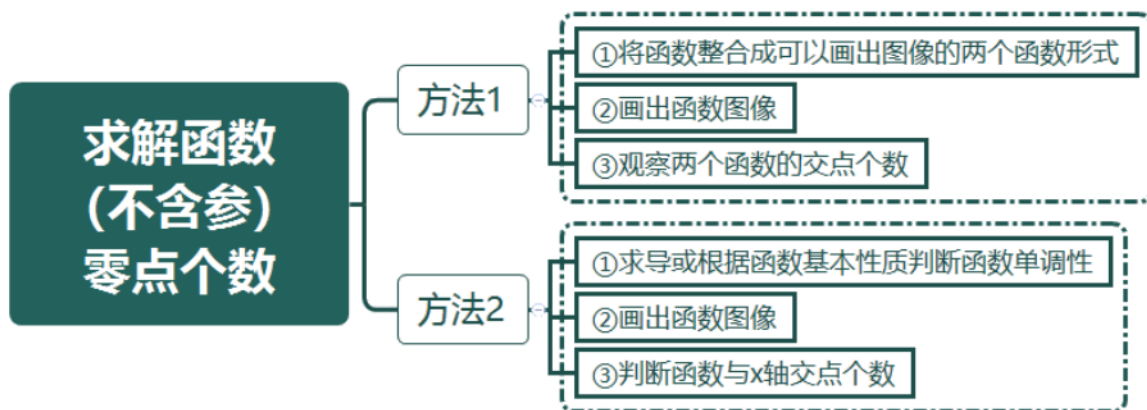
C选项: 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$. $\therefore$ 有零点, 故C错误;

D选项: $f(x) = e^{-\ln x} + \sin x + 1$ 恒大于0无零点, 故D正确;

故选D.



根据函数图像判断零点个数



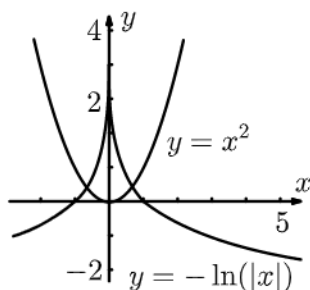
12 2015~2016学年天津红桥区高一上学期期中理科第8题4分

函数 $f(x) = x^2 + \ln|x|$ 的零点的个数为 () .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案 B

解析 由题意，作函数 $y = x^2$ 与 $y = -\ln|x|$ 的图象如下，



结合图象知，函数 $y = x^2$ 与 $y = -\ln|x|$ 的图象有两个交点，

即函数 $f(x) = x^2 + \ln|x|$ 的零点的个数为2 .

故选B .

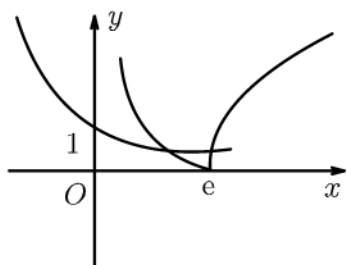
13 2016~2017学年天津武清区高三上学期期中理科第8题5分

函数 $f(x) = e^x |\ln x - 1| - 1$ 的零点个数是 () .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案 B

解析 由题意，函数 $f(x) = e^x |\ln x - 1| - 1$ 的零点个数 $\Leftrightarrow$ 两个函数 $y = e^{-x}$ 与 $y = |\ln x - 1|$ 的交点个数，两个函数的图象如图．



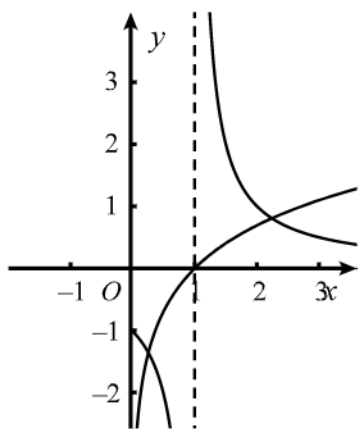
由图知，两个函数有2个交点，故函数 $f(x) = e^x |\ln x - 1| - 1$ 的零点个数是2，故选B．

14 2019~2020学年11月天津和平区天津市耀华中学高一上学期月考第9题4分

函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x-1}$ 的零点的个数为 _____ ．

答案 2

解析



令 $y_1 = \ln x$ ， $y_2 = \frac{1}{x-1}$ ，

将两个函数图象在同一坐标系中可得：

两图象有2个公共点，

故 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x-1}$ 有2个零点．

15 已知 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ ，则 $f(x)$ 零点个数 _____ ．

答案 3

解析 $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x-1)(x+2)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 1$, $x_2 = -2$,

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $(1, +\infty)$ 单调递增, 在 $(-2, 1)$ 单调递减.

又 $f(-2) = -16 + 12 + 24 = 20$, $f(1) = 2 + 3 - 12 = -9$, 故有 3 个零点.

故答案为: 3.

精进不休 日新月异

16 2015年天津河西高三二模理科第4题5分

函数 $f(x) = x^2 - 4x - 2\ln x + 5$ 的零点个数为 ().

A. 3

B. 2

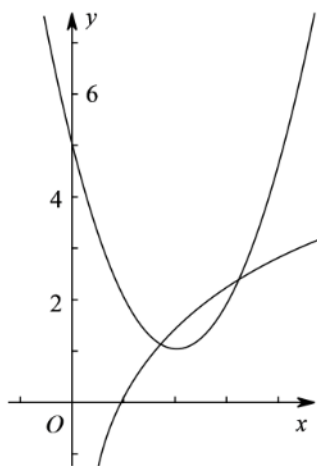
C. 1

D. 0

答案 B

解析 函数 $f(x) = x^2 - 4x - 2\ln x + 5$ 的零点个数即函数 $y = x^2 - 4x + 5$ 与函数 $y = 2\ln x$ 的交点的个数,

作函数 $y = x^2 - 4x + 5$ 与函数 $y = 2\ln x$ 的图象如下,



结合图象可得,

函数 $f(x) = x^2 - 4x - 2\ln x + 5$ 的零点个数为 2.

故选: B.

豪厘不伐 将用斧柯

17 2018~2019学年12月天津南开区南开大学附属中学高一上学期月考第3题3分

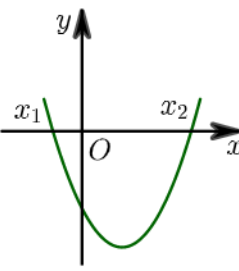
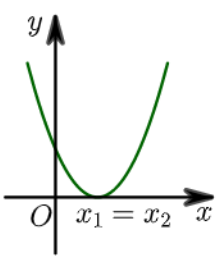
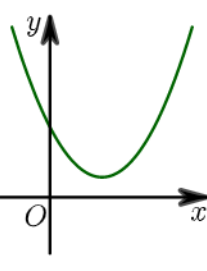
函数 $f(x) = x^2 - 2^x$ 零点个数是 () .

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案 C

解析 根据指数函数与二次函数的图象, 可知 $x < 0$ 时, $y = 2^x$ 递增, 值域 $(0, 1)$, $y = x^2$ 递减, 值域 $(0, +\infty)$, 有一个交点, $x > 0$ 时, $f(2) = 2^2 - 2^2 = 0$, $f(4) = 4^2 - 2^4 = 0$, 综上 $f(x) = x^2 - 2^x$ 有3个零点. 故选C.

5. 一元二次方程根的分布

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$)的图象			
判别式的情况			
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根			
零点个数			

教法备注

判别式的情况	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$ax^2 + bx + c = 0$ 的根	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	方程无实根
零点个数	两个	一个	无

18 2018~2019学年天津河西区高一上学期期末第20题10分

函数 $f(x) = x^2 + 2mx + 3m + 4$.

- (1) 若 $f(x)$ 有且只有一个零点, 求 m 的值 .
- (2) 若 $f(x)$ 有两个零点且均比 -1 大, 求 m 的取值范围 .

答案

- (1) $m = 4$ 或 $m = -1$.
- (2) $(-5, -1)$.

解析

- (1) 由函数 $f(x) = x^2 + 2mx + 3m + 4$, 有且仅有一个零点可知,

$$\Delta = 4m^2 - 4(3m + 4) = 0 ,$$

$$\therefore m^2 - 3m - 4 = 0 .$$

$$m = 4 \text{ 或 } m = -1 .$$

- (2) 由题可知

$$\begin{cases} 4m^2 - 4(3m + 4) > 0 \\ -m > -1 \\ f(-1) > 0 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} m^2 - 3m - 4 > 0 \\ m < 1 \\ 1 - 2m + 3m + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } -5 < m < -1 .$$

$$m \text{ 的取值范围为 } (-5, -1) .$$

19 2018~2019 学年天津河东区高一上学期期中第13题4分

关于 x 的方程 $x^2 - 2|x| - a = 1$ 有两个不等的实根, 则 a 的取值范围是 _____ .

答案

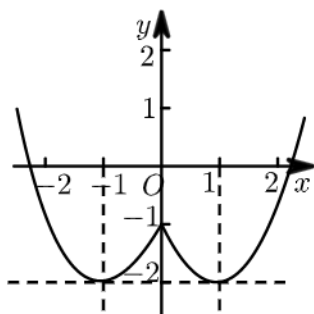
$$\{a | a > -1 \text{ 或 } a = -2\}$$

解析

$$\text{由题意得 } x^2 - 2|x| - 1 = a ,$$

$$\text{即 } y = x^2 - 2|x| - 1 \text{ 与 } y = a \text{ 有 2 个交点 ,}$$

$$\therefore y = \begin{cases} (x-1)^2 - 2, x \geq 0 \\ (x+1)^2 - 2, x < 0 \end{cases} ,$$



由图知 $a > -1$ 或 $a = -2$.

故答案为 : $\{a | a > -1 \text{ 或 } a = -2\}$.

20 2018~2019学年天津南开区天津中学高二上学期期中第12题

已知 $f(x) = x^2 + (a^2 - 1)x + (a - 2)$ 的一个零点比1大, 一个零点比1小, 则实数 a 的取值范围是 _____ .

答案 $(-2, 1)$

解析 由二次函数性质知,

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + a^2 - 1 + a - 2 \\ &= a^2 + a - 2 = (a + 2)(a - 1) < 0, \\ \text{则 } -2 &< a < 1. \end{aligned}$$

21 2017~2018学年12月天津河西区天津市新华中学高一上学期月考第18题

关于 x 的方程 $x^2 + 2mx + 2m^2 - 3 = 0$ 的两实根都大于2, 则实数 m 的取值的集合是 _____ .

答案 $\emptyset$

解析 两个实数根均大于2,

$$\begin{aligned} \text{则 } x_1 + x_2 &= -2m > 4, \quad m < -2, \\ x_1 x_2 &= 2m^2 - 3 > 4, \quad 2m^2 > 7, \quad m^2 > \frac{7}{2}, \\ m &> \sqrt{\frac{7}{2}} \text{ 或 } m < -\sqrt{\frac{7}{2}}, \\ \text{方程有解要求:} \end{aligned}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4m^2 - 4 \times (2m^2 - 3) = -4m^2 + 12 \geqslant 0,$$

$$m^2 \leqslant 3, -\sqrt{3} \leqslant m \leqslant \sqrt{3},$$

综合, m 为 $\emptyset$.

22 2016年天津和平区高三一模理科第7题5分

若方程 $x^2 + (1-k)x - 2(k+1) = 0$ 的一个根在区间 $(2, 3)$ 内, 则实数 k 的取值范围是 ().

A. $(3, 4)$

B. $(2, 3)$

C. $(1, 3)$

D. $(1, 2)$

答案 D

解析 若方程 $x^2 + (1-k)x - 2(k+1) = 0$ 有两相等的实根,

则 $\Delta = (1-k)^2 + 8(k+1) = 0$ 解得 $k = -3$, 此时 $x = -2$, 不在区间 $(2, 3)$ 内.

令 $f(x) = x^2 + (1-k)x - 2(k+1)$,

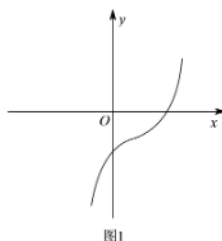
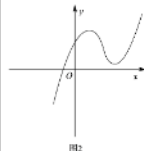
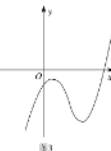
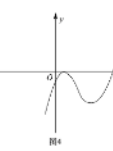
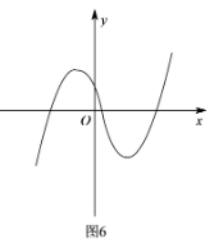
若方程 $x^2 + (1-k)x - 2(k+1) = 0$ 有两不相等的实根, 且一个根在区间 $(2, 3)$ 内,

则 $f(2)f(3) < 0$, 即 $(4-4k)(10-5k) < 0$, 得 $1 < k < 2$.

6. 三次函数零点分析

三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a > 0)$				
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \Delta = 4b^2 - 12ac.$				
判别式				
导数值 情况				
$f(x)$ 单调性				
$f(x)$ 极值				
图像				
零点 个数				

【仅教师可见】

三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d(a > 0)$						
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $\Delta = 4b^2 - 12ac$.						
判别式	$\Delta \leq 0$	$\Delta > 0$				
导数值情况	$f'(x) \geq 0$ 恒成立 且恒不为0	$f'(x) = 0 \Rightarrow$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$				
$f(x)$ 单调性	$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增	$f(x)$ 在 $(-\infty, x_1) \uparrow$ $(x_1, x_2) \downarrow$ $(x_2, +\infty) \uparrow$				
$f(x)$ 极值	无极值	$f(x)$ 有极大值 $f(x_1)$, 极小值 $f(x_2)$				
		极大值小于0或 极小值大于0	极大值或极小值等于0	极大值大于0且极 小值小于0		
图像	 图1	 图2	 图3	 图4	 图5	 图6
零点 个数	1个	1个	2个	3个		

23 若方程 $x^3 - 3ax + 2 = 0$ 有三个不同实根, 则实数 a 的取值范围为 () .

- A. $a > 0$ B. $a > 1$ C. $1 < a < 3$ D. $0 < a < 1$

答案 B

解析 令 $f(x) = x^3 - 3ax + 2, f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$, 要方程有三个不同实根, 必须 $a > 0$ (否则 $f'(x) \geq 0, f(x)$ 单调增长, 最多只有一根) .

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{a})$ 上单调增加, 在 $(-\sqrt{a}, \sqrt{a})$ 上单调减少, 在 $(\sqrt{a}, +\infty)$ 上单调增加 .

要 $f(x) = 0$ 有三个零点, 当且仅当 $f(-\sqrt{a}) > 0$, 且 $f(\sqrt{a}) < 0$.

解得 $a > 1$.

24 已知函数 $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a$ ($a > 0$) 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 求 a 的取值范围.

答案 见解析.

解析 $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1-a}{2}x^2 - ax - a$,

$h'(x) = x^2 + (1-a)x - a = (x+1)(x-a)$, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x_1 = -1, x_2 = a > 0$.

当 x 变化时, $h'(x), h(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, a)$	a	$(a, +\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1), (a, +\infty)$; 单调递减区间为 $(-1, a)$,

故 $h(x)$ 在区间 $(-2, -1)$ 内单调递增, 在区间 $(-1, 0)$ 内单调递减,

从而函数 $h(x)$ 在区间 $(-2, 0)$ 内恰有两个零点, 当且仅当

$$\begin{cases} h(-2) < 0, \\ h(-1) > 0, \\ h(0) < 0 \end{cases} \text{ 解得 } 0 < a < \frac{1}{3}, \text{ 所以 } a \text{ 的取值范围是 } \left(0, \frac{1}{3}\right).$$

包罗万象 举一千从

25 2018~2019 学年 3 月天津和平区天津市第二十中学高二下学期月考第 11 题 4 分

若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - a$ 有三个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

答案 $\left(-9, \frac{5}{3}\right)$

解析 由题意可得: $f'(x) = x^2 - 2x - 3$.

令 $f'(x) > 0$, 则 $x > 3$ 或 $x < -1$, 令 $f'(x) < 0$, 则 $-1 < x < 3$,

所以函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(3, +\infty)$, 减区间为 $(-1, 3)$,

所以当 $x = -1$ 时函数有极大值 $f(-1) = \frac{5}{3} - a$, 当 $x = 3$ 时函数有极小值 $f(3) = -9 - a$,

因为函数 $f(x)$ 存在三个不同的零点,

所以 $f(-1) > 0$ 并且 $f(3) < 0$,

解得: $-9 < a < \frac{5}{3}$.

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-9, \frac{5}{3}\right)$.

故答案为： $\left(-9, \frac{5}{3}\right)$.