

01：指数函数与对数函数练习题

1. 指对数的运算

1 2017~2018学年北京朝阳区北京化工学院附属中学高一上学期期中第12题

函数 $y = a^{x-2} + 1$ ($a > 0, a \neq 1$) 的图象必经过点 _____ .

答案 (2, 2)

解析 当 $x = 2$ 时, $y = a^0 + 1 = 2$, $\therefore$ 图象必过 (2, 2) 点 .

2 已知函数 $f(x) = 4a^{x-1}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象恒过一个定点 P , 且点 P 在直线 $mx + ny - 1 = 0$ 上, 则 $2^m \times 16^n$ 的值是 _____ .

答案 2

解析 当 $x - 1 = 0$, 即 $x = 1$ 时, $f(x) = 4$,
 $\therefore$ 函数 $f(x) = 4a^{x-1}$ 的图象恒过定点 $P(1, 4)$,
 又点 P 在直线 $mx + ny - 1 = 0$ 上,
 $\therefore m + 4n = 1$,
 $\therefore 2^m \times 16^n = 2^m \cdot 2^{4n} = 2^{m+4n} = 2^1 = 2$.
 故答案为: 2 .

3 2020~2021学年山东滨州高一上学期期末第13题5分

函数 $f(x) = \log_a(2x - 3) + 1$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象恒过定点 P , 则点 P 的坐标是 _____ .

答案 (2, 1)

解析 根据题意：令 $2x - 3 = 1$ ，

$\therefore x = 2$ ，此时 $y = 1$ ，

$\therefore$ 定点坐标是 $(2, 1)$ 。

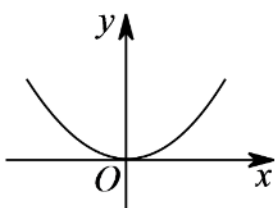
故答案为： $(2, 1)$ 。

2. 判断函数图像

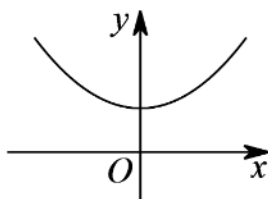
4 2016~2017学年北京西城区北京市第一五九中学高一上学期期中第3题4分

函数 $y = a^{|x|}$ ($0 < a < 1$) 的图象是 ()。

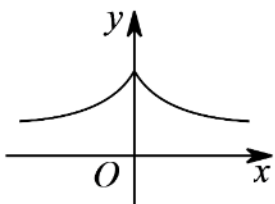
A.



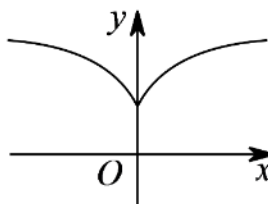
B.



C.



D.



答案 C

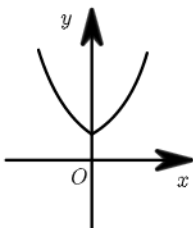
解析 $\because y = a^{|x|}$ ($0 < a < 1$)，函数图象关于 y 轴对称，

当 $x > 0$ 时， $y = x^a$ 是减函数，只有 C 项符合题意。

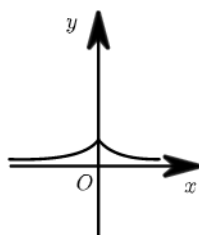
5 2018~2019学年10月天津南开区天津市崇化中学高三上学期月考理科第4题5分

函数 $y = \log_2|x|$ 的图象大致是 ()。

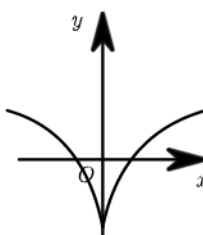
A.



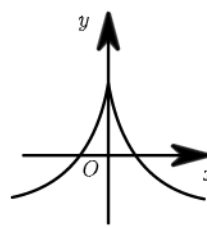
B.



C.



D.



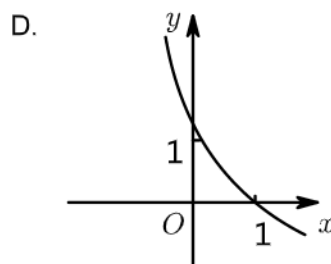
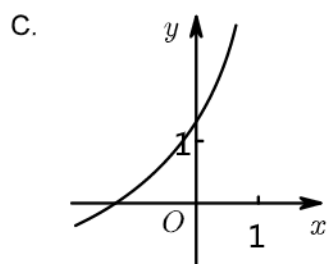
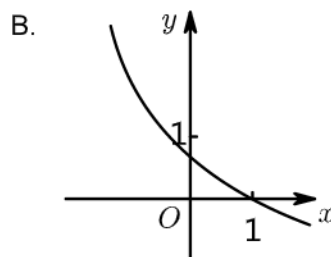
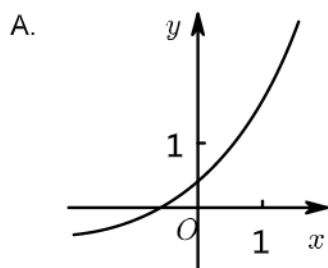
答案 C

解析 $y = \log_2|x|$ 为偶函数，当 $x > 0$ 时， $y = \log_2 x$.

故选C .

6 2015~2016学年北京海淀区首都师范大学附属中学高一上学期期中第6题4分

函数 $y = a^x - \frac{1}{a}$ (其中 $a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象可能是 () .



答案 A

解析 当 $a > 1$ 时， $0 < \frac{1}{a} < 1$.

$y = a^x - \frac{1}{a}$ 可以看作将 $y = a^x$ 图象向下移 $\frac{1}{a}$ 个单位 .

故选A .

3. 比较大小



指对数比较大小

7 2018~2019学年天津和平区高一上学期期中第7题4分

设 $a = \log_{0.7} 0.8$, $b = \log_{1.1} 0.9$, $c = 1.1^{0.9}$, 则 a 、 b 、 c 的大小顺序是 () .

A. $a < b < c$

B. $b < c < a$

C. $b < a < c$

D. $c < a < b$

答案 C

解析 $a = \lg_{0.7} 0.8 < \lg_{0.7} 0.7 = 1$,

即 $0 < a < 1$, $b = \lg_{1.1} 0.9 < 0$, $c = 1.1^{0.9} > 1.1^0 = 1$,

即 $c > 1$,

$\therefore c > a > b$.

故选 C.

8 2017年天津南开区高三二模文科第3题5分

设 $a = \left(\frac{3}{4}\right)^{0.5}$, $b = \left(\frac{4}{3}\right)^{0.4}$, $c = \log_{\frac{3}{4}} (\log_3 4)$, 则 () .

A. $a < b < c$

B. $a < c < b$

C. $c < a < b$

D. $c < b < a$

答案 C

解析 $\because a = \left(\frac{3}{4}\right)^{0.5} \in (0, 1)$,

$b = \left(\frac{4}{3}\right)^{0.4} > 1$,

$c = \log_{\frac{3}{4}} (\log_3 4) < 0$,

$\therefore c < a < b$.

故选: C.

9 2019年高考真题天津卷文科第5题5分

已知 $a = \log_2 7$, $b = \log_3 8$, $c = 0.3^{0.2}$, 则 a , b , c 的大小关系为 () .

A. $c < b < a$

B. $a < b < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

答案 A

解析 由题意, 可知:

$$a = \log_2 7 > \log_2 4 = 2,$$

$$b = \log_3 8 < \log_3 9 = 2,$$

$$b = \log_3 8 > \log_3 3 = 1,$$

$$c = 0.3^{0.2} < 1,$$

$$\therefore c < b < a.$$

故选: A.

10 2017~2018学年广东广州黄埔区广州市第二中学科学城校区高二下学期期末文科第6题5分

已知 $a = \log_3 \frac{7}{2}$, $b = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ().

A. $a > b > c$

B. $b > a > c$

C. $c > b > a$

D. $c > a > b$

答案 D

解析 $\because c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{5} = \log_3 5$, $a = \log_3 \frac{7}{2}$,

又 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数,

$$\therefore \log_3 5 > \log_3 \frac{7}{2} > \log_3 3 = 1,$$

$$\therefore c > a > 1,$$

$\because y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,

$$\therefore \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1, \text{ 即 } b < 1,$$

$$\therefore c > a > b,$$

故选D.

11 若 $a = 2^{0.3}$, $b = 3^{1.2}$, $c = 0.6^{2.5}$, 则下列结论正确的是 ().

A. $b < a < c$

B. $a < b < c$

C. $c < a < b$

D. $b < c < a$

答案 C



结合单调性、奇偶性比较大小

12

已知函数 $y = f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 时, 都有 $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0$ 成立, 若 $a = \ln \frac{1}{\pi}$, $b = (\ln \pi)^2$, $c = \ln \sqrt{\pi}$, 则 ().

- A. $f(a) > f(b) > f(c)$ B. $f(c) > f(a) > f(b)$ C. $f(b) > f(a) > f(c)$ D. $f(c) > f(b) > f(a)$

答案

B

解析

根据已知条件便知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数;

且 $f(a) = f(|a|)$, $f(b) = f(|b|)$, $f(c) = f(|c|)$;

$|a| = \ln \pi > 1$, $b = (\ln \pi)^2 > |a|$, $c = 0 < \frac{\ln \pi}{2} < |a|$;

$\therefore f(c) > f(a) > f(b)$.

故选: B.

13

2019年天津河北区高三一模文科第4题5分

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 则 ().

- A. $f(0) < f(\log_3 2) < f(-\log_2 3)$
 B. $f(\log_3 2) < f(0) < f(-\log_2 3)$
 C. $f(-\log_2 3) < f(\log_3 2) < f(0)$
 D. $f(\log_3 2) < f(-\log_2 3) < f(0)$

答案

C

解析

$\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为偶函数,

$\therefore f(-\log_2 3) = f(\log_2 3)$,

$\because \log_2 3 > 1$, $0 < \log_3 2 < 1$,

$\because f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减,

$\therefore f(-\log_2 3) < f(\log_3 2) < f(0)$.



利用对称性、单调性比较大小

14 2020年天津高三一模十二重点中学毕业班联考(一)第7题5分

已知函数 $y = f(x - 2)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 在 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增. 若 $a = f(4^{\ln 3})$, $b = f(2^{-e})$, $c = f\left(\ln \frac{1}{\pi}\right)$ (其中 e 为自然对数的底数, π 为圆周率), 则 a, b, c 的大小关系为().

- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

答案 A

解析 根据题意, 函数 $y = f(x - 2)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 则函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 即函数 $f(x)$ 为偶函数, 满足 $f(-x) = f(x)$, 则 $c = f\left(\ln \frac{1}{\pi}\right) = f(\ln \pi)$
 $4^{\ln 3} > 4^1 = 4 > \ln \pi > \ln e = 1 > 2^{-e} > 0$,
 又由 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增,
 则有 $a > c > b$.
 故选A.

15 2018~2019学年2月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考理科第6题5分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x - 1)$ 的图像关于 $x = 1$ 对称, 且当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 若 $a = f(\log_{0.5} 3)$, $b = f(0.5^{-1.3})$, $c = f(0.7^6)$, 则 a, b, c 的大小关系是().

- A. $c > a > b$ B. $b > a > c$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

答案 A

解析 $\because f(x - 1)$ 关于 $x = 1$ 对称, 则 $f(x)$ 关于 y 轴对称, 为偶函数,
 $\therefore f(-x) = f(x)$,
 $\because \log_{0.5} 3 < 0$, $\log_{0.5} 3 = \log_{\frac{1}{2}} 3 = -\log_2 3$,
 $\therefore f(-\log_2 3) = f(\log_2 3)$,
 $\because 1 < \log_2 3 < 2$,
 又 $\because 0.5^{-1.3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1.3} = 2^{1.3} > 2$,

$$\text{又} \because 0.7^6 < 1,$$

$$\therefore 0.7^6 < \log_2 3 < 0.5^{-1.3},$$

又 $\because$ 在 $x > 0$, $f(x)$ 单调递减,

$$\therefore f(0.7^6) > f(\log_2 3) > \log(0.5^{-1.3}),$$

$$\therefore c > a > b.$$

故选 A.

4. 求解不等式



基础求解

16 2008年高考真题江西卷文科第13题4分

不等式 $2^{x^2+2x-4} \leq \frac{1}{2}$ 的解集为 _____.

答案 $[-3, 1]$

解析 $2^{x^2+2x-4} \leq \frac{1}{2} = 2^{-1},$

依题意得: $x^2 + 2x - 4 \leq -1,$

因式分解得 $(x+3)(x-1) \leq 0,$

可化为: $\begin{cases} x+3 \leq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \leq 0 \end{cases}$, 解得 $-3 \leq x \leq 1,$

$\therefore$ 原不等式得解集为 $[-3, 1].$

故答案为 $[-3, 1].$

17 2017~2018学年4月陕西西安雁塔区西安高新第一中学高三下学期月考理科(十四模)第14题5分

分

已知 $f(x) = \begin{cases} 4^x, & x \leq 1 \\ \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$, 若 $f(x) \geq 2$, 则 x 的取值范围为 _____.

答案 $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup [4, +\infty)$

解析 当 $x \leq 1$ 时, 解 $4^x \geq 2$ 得 $x \geq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$,
 当 $x > 1$ 时, 解 $\log_2 x \geq 2$ 得 $x \geq 4$.
 综上 $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cup [4, +\infty)$.

18 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{1-x}, & x \leq 1 \\ 1 - \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(f(-3))$ 为 _____; 不等式 $f(x) \leq 2$ 的解集是 _____.

答案 1: -3
 2: $[0, +\infty)$

解析 $f(f(-3)) = f(2^{1-(-3)})$
 $= f(2^4) = 1 - \log_2 2^4 = 1 - 4 = -3$;
 $\begin{cases} x \leq 1 \\ 2^{1-x} \leq 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1, \begin{cases} x > 1 \\ 1 - \log_2 x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x > 1$
 综上不等式 $f(x) \leq 2$ 的解集是 $[0, +\infty)$.

利用单调性、奇偶性

19 2016~2017 学年 10 月北京海淀区北京石油学院附属中学高一上学期月考第 12 题 3 分

已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调增加, 则满足 $f(x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围 ().

- A. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ B. $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$
 C. $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ D. $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$

答案 C

解析 $\because$ 偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore$ 不等式 $f(x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow f(|x-1|) < f\left(\frac{1}{3}\right)$,
 $\therefore |x-1| < \frac{1}{3}$, 解得 $\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$,
 即不等式的解集为 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

20 2017~2018学年广东广州越秀区广东华侨中学高一上学期期中第10题5分

已知奇函数 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上单调递增, 且 $f(t) + f(2t - 1) > 0$, 则实数 t 的取值范围是().

- A. $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ B. $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$
C. $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ D. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

答案 B

解析 $\because f(x)$ 是奇函数且在 $(-2, 2)$ 单调增,

$$\therefore t \in (-2, 2), -2 < 2t - 1 < 2 \text{ 即 } -\frac{1}{2} < t < \frac{3}{2},$$

$$\therefore t \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{由 } f(t) + f(2t - 1) > 0,$$

$$\therefore \text{当 } f(t) > -f(2t - 1) = f(1 - 2t),$$

$$\therefore t > 1 - 2t, t > \frac{1}{3},$$

$$\therefore t \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right).$$

故选B.

21 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 若 $f(\log_2 x) > f(1)$, 则 x 的取值范围是().

- A. $(2, +\infty)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ C. $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$ D. $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

答案 C

解析 略.

22 2017~2018学年广东广州越秀区广州市第十六中学高一上学期期中第16题5分

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递增. 若实数 a 满足

$$f(2^{|a-1|}) > f(-\sqrt{2}), \text{ 则 } a \text{ 的取值范围是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

解析 $\because f(x)$ 是偶函数, 且在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,
 $\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})$,
 $\therefore f(2^{|a-1|}) > f(\sqrt{2})$,
 $\therefore 2^{|a-1|} < \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$,
 $\therefore |a-1| < \frac{1}{2}$, 即 $-\frac{1}{2} < a-1 < \frac{1}{2}$, 即 $\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$.

函数定义域、值域典型问题

23 2018~2019 学年 12 月陕西西安碑林区西北工业大学附属中学高一上学期月考第 13 题 4 分

已知 $f(x) = \lg(ax^2 - 2x + 1)$, 若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 求 a 的取值范围 _____.

答案 $[0, 1]$

解析 依题意: 当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$ 满足题意,
 当 $a \neq 0$ 时,
 $\because f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$,
 $\therefore \begin{cases} \Delta = 4 - 4a \geq 0 \\ a > 0 \end{cases}$,
 $\therefore 0 < a \leq 1$,
 综上, a 的取值范围是 $[0, 1]$.

24 已知函数 $y = \log_2(x^2 - ax - a)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

答案 $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$

解析 要使 $f(x) = x^2 - ax - a$ 的值能取遍一切正实数, 应有 $\Delta = a^2 + 4a \geq 0$, 解之得 $a \geq 0$ 或 $a \leq -4$,
 即 a 的取值范围为 $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$.

5. 单调性问题

25 2019~2020学年广东深圳龙岗区深圳科学高中高一上学期期中模拟(二)第7题5分

函数 $y = 5^{2x^2-3x+1}$ 的单调递增区间为 () .

- A. $(1, +\infty)$
B. $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$
C. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
D. $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$

答案 D

解析 因函数 $y = 5^x$ 为增函数,

故问题就是求 $y = 2x^2 - 3x + 1$ 的增区间，

因 $2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$, 其图象开口向上, 对称轴方程为 $x = \frac{3}{4}$,

故函数 $2x^2 - 3x + 1$ 在 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 上递增,

从而函数 $y = 5^{2x^2-3x+1}$ 相在 $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right)$ 上递增.

故选D.

26 2020年陕西西安雁塔区西安高新第一中学高三二模文科第5题5分

函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是()

- A. $(-\infty, -2)$
B. $(-\infty, -1)$
C. $(1, +\infty)$
D. $(4, +\infty)$

答案 D

解析 由 $x^2 - 2x - 8 > 0$ 得: $x \in (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$,

令 $t = x^2 - 2x - 8$, 则 $y = \ln t$,

$\therefore x \in (-\infty, -2)$ 时, $t = x^2 - 2x - 8$ 为减函数;

$x \in (4, +\infty)$ 时, $t = x^2 - 2x - 8$ 为增函数;

$y = \ln t$ 为增函数,

故函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是 $(4, +\infty)$,

故选：D.

27 2019~2020学年浙江杭州拱墅区杭州第十四中学康桥校区高二上学期期中第3题3分

函数 $f(x) = \ln(4 + 3x - x^2)$ 的单调递减区间是 ().

- A. $(-\infty, \frac{3}{2}]$ B. $[\frac{3}{2}, +\infty)$
C. $(-1, \frac{3}{2}]$ D. $[\frac{3}{2}, 4)$

答案 D

解析 要使函数有意义，则 $4 + 3x - x^2 > 0$ ，即 $x^2 - 3x - 4 < 0$ 解得 $-1 < x < 4$ ，
设 $t = 4 + 3x - x^2$ ，则函数在 $(-1, \frac{3}{2}]$ 上单调递增，在 $[\frac{3}{2}, 4)$ 上单调递减。
因为函数 $y = \ln t$ ，在定义域上为增函数，
所以由复合函数的单调性性质可知，则此函数的单调递减区间是 $[\frac{3}{2}, 4)$ 。
故选 D.

含参

28 2019~2020学年10月河南新乡辉县市辉县市第一高级中学高一上学期月考第7题5分

函数 $f(x) = \log_a(6 - ax)$ 在 $(0, 3]$ 上为减函数，则 a 的取值范围是 ().

- A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$
C. $(1, 2]$ D. $[2, +\infty)$

答案 B

解析 若函数 $f(x) = \log_a(6 - ax)$ 在 $(0, 3]$ 上为减函数，
则 $\begin{cases} a > 1 \\ 6 - 3a > 0 \end{cases}$ ，解得 $a \in (1, 2)$ 。
故选：B.