

02：函数的对称性与周期性

1. 函数的对称性与周期性的判断

1. 判断下面函数满足的对称性

- ① $f(-x) = f(x)$: _____
- ② $f(-x) = -f(x)$: _____
- ③ $f(a+x) = f(a-x)$ 或 $f(x) = f(2a-x)$: _____
- ④ $f(x) = 2b - f(2a-x)$ 或 $f(a+x) - b = b - f(a-x)$: _____

答案：①关于y轴对称 ②关于原点对称 ③关于直线 $x = a$ 对称 ④关于点 (a, b) 对称

2. 利用迭代法推导下列函数的周期性——

函数 $y = f(x)$ 满足对定义域内任一实数 x (其中 a 为常数),

- ① $f(x) = f(x+a)$, 则 $y = f(x)$ 是以_____为周期的周期函数;
- ② $f(x+a) = -f(x)$, 则 $f(x)$ 是以_____为周期的周期函数;
- ③ $f(x+a) = \pm \frac{1}{f(x)}$, 则 $f(x)$ 是以_____为周期的周期函数;
- ④ $f(x+a) = f(x-a)$, 则 $f(x)$ 是以_____为周期的周期函数;
- ⑤ $f(x+a) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, 则 $f(x)$ 是以_____为周期的周期函数;
- ⑥ $f(x+a) = -\frac{1-f(x)}{1+f(x)}$, 则 $f(x)$ 是以_____为周期的周期函数;
- ⑦ $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, 则 $f(x)$ 是以_____为周期的周期函数;

答案：① $T = a$ ② $T = 2a$ ③ $T = 2a$ ④ $T = 2a$ ⑤ $T = 2a$ ⑥ $T = 4a$ ⑦ $T = 4a$

2. 函数对称性与周期性的一般应用



利用对称性与奇偶性进行赋值运算

1

2018年天津河东区高三一模理科第12题5分

设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, 则

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) =$ _____ .

答案 0

解析 $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $f(-x) = -f(x)$, $f(0) = 0$. 又 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称,

$$\therefore f(1+x) = f(-x), \text{ 且 } f(1) = f(0) = 0, f(2) = f(-1) = 0.$$

$$\therefore f(1+x) = -f(x), \therefore T=2 \text{ 是 } f(x) \text{ 的一个周期. 故 } f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)=0.$$

2 2019年天津河北区高三会考模拟学业水平模拟第28题5分

已知奇函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 且 $f(m) = 3$, 则 $f(m-4)$ 的值为 _____.

答案 -3

解析 函数 $y = f(x)$ 关于直线 $x = 2$ 对称.

$$\therefore f(2+x) = f(2-x) = -f(x-2).$$

$$\therefore f(4+x) = -f(x).$$

$$\therefore f(x) = -f(x-4).$$

$$\therefore f(m) = -f(m-4) = 3.$$

$$\therefore f(m-4) = -3.$$

利用周期性与奇偶性进行赋值运算

3 2020~2021学年天津南开区南开大学附属中学高一上学期期中第14题4分

设偶函数 $f(x)$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$, 且当 $x \in [-3, -2]$ 时 $f(x) = 4x$, 则 $f(113.5) =$ _____.

答案 $\frac{1}{10}$

解析 $\because$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 有 $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$,

$$\therefore f(x+6) = -\frac{1}{f(x+3)} = f(x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 是周期为 6 的函数,

$$\therefore f(113.5) = f(6 \times 18 + 5.5) = f(5.5) = -\frac{1}{f(2.5)},$$

当 $x \in [-3, -2]$ 时, $f(x) = 4x$, 函数 $f(x)$ 又是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,

$$\therefore f(-2.5) = 4 \times (-2.5) = -10 = f(2.5),$$

$$\therefore f(113.5) = \frac{1}{10}.$$

故答案为: $\frac{1}{10}$.

4 2019~2020 学年 9 月天津河西区天津市新华中学高三上学期月考第 7 题

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+5) = f(x)$, 且当 $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$ 时, $f(x) = x^3 - 3x$, 则

$f(2019) = (\quad)$.

A. 2

B. -18

C. 18

D. -2

答案 A

解析 由 $f(x+5) = f(x)$, 可知: $f(x)$ 为周期为 5 的周期函数,

$$\therefore 2019 = 5 \times 404 - 1,$$

$$\therefore f(2019) = f(-1),$$

又 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数且当 $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$ 时,

$$f(x) = x^3 - 3x,$$

$$\therefore f(2019) = f(-1) = -f(1) = -(1^3 - 3 \times 1) = 2.$$

故答案选 A.

5 2019~2020 学年天津红桥区天津市第三中学高三上学期期中第 8 题 5 分

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且 $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)}$, 当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = x(x+1)$, 则

$f(4) + f(5) = (\quad)$.

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

答案 D

解析 根据题意, $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -\frac{1}{f(x)}$, 则 $f(x+4) = -\frac{1}{f(x+2)} = f(x)$, 即函数 $f(x)$ 是周期为4的周期函数,

则 $f(4) = f(0)$, $f(5) = f(1)$,

又由函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 则 $f(0) = 0$, 则 $f(4) = f(0) = 0$,

又由当 $0 < x \leq 1$ 时 $f(x) = x(x+1)$, 则 $f(1) = 2$, 则 $f(5) = 2$;

故 $f(4) + f(5) = 2$.

故选D.

精进不休 日新月异

6 2020~2021学年9月重庆九龙坡区重庆外国语学校高三上学期月考第10题5分

已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数, 满足 $f(1-x) = f(1+x)$, 若 $f(1) = 2$, 则 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2018) = (\quad)$.

- A. 50 B. 2 C. 0 D. -2018

答案 B

解析 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数,

可得 $f(-x) = -f(x)$,

$f(1-x) = f(1+x)$, 即有 $f(x+2) = f(-x)$,

即 $f(x+2) = -f(x)$,

进而得到 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$,

$f(x)$ 为周期为4的奇函数,

若 $f(1) = 2$, 可得 $f(3) = f(-1) = -f(1) = -2$,

$f(2) = f(0) = 0$, $f(4) = f(0) = 0$,

则 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 2 + 0 - 2 + 0 = 0$,

可得 $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(2018) = 504 \times 0 + 2 + 0 = 2$.

故选B.

7 2016~2017学年天津高三上学期期中理科六校联考第11题5分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) \cdot f(x) = 1$ 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 且 $f(x) > 0$, 则 $f(2015) =$ _____ .

答案 1

解析 $\because$ 偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) \cdot f(x) = 1$,

$$\therefore f(x+2) = \frac{1}{f(x)},$$

$$\therefore f(x+4) = f(x),$$

所以函数的周期 $T = 4$, $f(2015) = f(3)$;

$$\text{令 } x = -1, f(1) \cdot f(-1) = 1 = f^2(1),$$

又 $f(x) > 0$,

$$\therefore f(1) = 1, f(3) = \frac{1}{f(1)} = 1;$$

$$\therefore f(2015) = 1.$$

故答案为: 1.

8 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高三下学期开学考试理科第6题5分

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$. 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^3 - 1$; 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $f(-x) = -f(x)$; 当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$. 则 $f(6) = (\quad)$.

A. -2

B. -1

C. 0

D. 2

答案 D

解析 $\because x > \frac{1}{2}$ 时, $f\left(x + \frac{1}{2}\right) = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$,

$$\therefore f\left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore f(x+1) = f(x),$$

$$\therefore T = 1.$$

$$\because x < 0 \text{ 时, } f(x) = x^3 - 1,$$

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ 时, } f(-x) = f(x),$$

$$\therefore f(6) = f(1) = -f(-1) = -(-(-1)^3 - 1) = 2 .$$

故选D .

豪厘不伐 将用斧柯

9 2017年天津河北区高三二模理科第14题5分

设函数 $y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以1为周期的函数, 若 $g(x) = f(x) - 2x$ 在区间 $[2, 3]$ 上的值域为 $[-2, 6]$, 则函数 $g(x)$ 在 $[-2017, 2017]$ 上的值域为 _____ .

教法备注

$y = -2x$ 在区间 $[2, 3]$ 上的值域为 $[-6, -4]$, 从而可知函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上的值域为 $[4, 10]$.

由函数 $f(x)$ 的周期为1可知, 函数 $f(x)$ 在 $[-2017, 2017]$ 上的值域仍为 $[4, 10]$.

而 $y = -2x$ 在区间 $[-2017, 2017]$ 上的值域为 $[-4034, 4034]$, 相加即得 $g(x)$ 的值域.

答案 $[-4030, 4044]$

解析 由 $g(x)$ 在区间 $[2, 3]$ 上的值域为 $[-2, 6]$,

可设 $g(x_0) = -2$, $g(x_1) = 6$, $x_0, x_1 \in [2, 3]$, $g(x_0) = f(x_0) - 2x_0 = -2$,

$\therefore y = f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以1为周期的函数,

$$\therefore g(x_0 + n) = f(x_0 + n) - 2(x_0 + n) = f(x_0) - 2x_0 - 2n = -2 - 2n .$$

同理 $g(x_1 + n) = 6 - 2n$,

$2017 - 3 = 2014$, 于是 $g(x)$ 在 $[-2017, 2017]$ 上的最小值是,

$$-2 - 2 \times 2014 = -4030, \quad -2017 - 2 = -2019 ,$$

于是 $g(x)$ 在 $[-2017, 2017]$ 上的最大值是 $6 - 2(-2019) = 4044$.

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $[-2017, 2017]$ 上的值域为 $[-4030, 4044]$.

故答案为: $[-4030, 4044]$.

包罗万象 举一千从

10 2019~2020学年天津和平区天津市第一中学高一上学期期末第15题4分

定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足：对于任意 $x \in \mathbf{R}$ ，有 $f(x+3) = -f(x)$ ，且 $\tan \alpha = 2$ ，则 $f(15 \sin \alpha \cos \alpha)$ 的值为_____。

教法备注

此题涉及到三角函数值求解的弦化切：

$$15 \sin \alpha \cos \alpha = 15 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 15 \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = 6$$

答案 0

解析

$\because$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x+3) = -f(x)$ ，

$\therefore f(x+6) = f(x)$ ，即 $T = 6$ ，

$\therefore \tan \alpha = 2$ ，

$\therefore 15 \sin \alpha \cos \alpha = 6$ ，

即 $f(15 \sin \alpha \cos \alpha) = f(6) = f(0)$ ，

$\because$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ ，

$\therefore f(0) = 0$ 即 $f(15 \sin \alpha \cos \alpha) = f(6) = f(0) = 0$ ，

故答案为0。



比较大小

11

2015~2016学年天津蓟县高三上学期期中文科第8题5分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ ，满足 $f(x-4) = -f(x)$ 且在区间 $[0, 2]$ 上是增函数，则（ ）。

A. $f(-25) < f(80) < f(11)$

B. $f(80) < f(11) < f(-25)$

C. $f(11) < f(80) < f(-25)$

D. $f(-25) < f(11) < f(80)$

答案 A

解析

$\because f(x-4) = -f(x)$ ，

$\therefore f(x-8) = -f(x-4) = f(x)$ ，即函数的周期是8，

则 $f(11) = f(3) = -f(3-4) = -f(-1) = f(1)$ ，

$$f(80) = f(0), f(-25) = f(-1),$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数, 且在区间 $[0, 2]$ 上是增函数,

$\therefore f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上是增函数,

$$\therefore f(-1) < f(0) < f(1), \text{ 即 } f(-25) < f(80) < f(11).$$

故选 A.

12 2018~2019 学年 9 月天津和平区天津市耀华中学高三上学期月考理科第 6 题 5 分

已知偶函数 $f(x)$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+1) = -f(x)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上是单调递增的, 则 $f(-6.5)$, $f(-1)$, $f(0)$ 的大小关系是 ().

A. $f(0) < f(-6.5) < f(-1)$

B. $f(-6.5) < f(0) < f(-1)$

C. $f(-1) < f(-6.5) < f(0)$

D. $f(-1) < f(0) < f(-6.5)$

答案 A

解析

$\therefore f(x)$ 是偶函数,

$$\therefore f(-x) = f(x),$$

$$\therefore f(x+1) = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 周期为 2,

$$\therefore f(-6.5) = f(-0.5) = f(0.5), f(-1) = f(1),$$

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上递增,

$$\therefore f(0) < f(0.5) < f(1),$$

$$\text{即 } f(0) < f(-6.5) < f(-1),$$

故选 A.

13 2020~2021 学年 10 月天津河西区天津市第四十二中学高三上学期月考第 11 题 5 分

已知函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$, 且满足下列三个条件: ①任意 $x_1 \neq x_2 \in (-4, 0)$, 都有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0; \text{ ② } f(x) = -f(x+4); \text{ ③ } y = f(x+4) \text{ 为偶函数, 则 ().}$$

A. $f(2019) > f(15) > f(2)$

B. $f(15) > f(2) > f(2019)$

C. $f(2) > f(15) > f(2019)$

D. $f(2) > f(2019) > f(15)$

答案 B

解析

$$f(x) = -f(x+4) = f(x+8) = \cdots = (-1)^n f(x+4n),$$

$$f(x+4n) = (-1)^n f(x),$$

$$f(2019) = f(-1 + 4 \times 505) = (-1)^{505} f(-1) = -f(-1),$$

$$f(15) = f(-1 + 4 \times 4) = (-1)^4 f(-1) = f(-1),$$

$$f(2) = f(-2 + 4 \times 1) = (-1)^1 f(-2) = -f(-2),$$

$y = f(x+4)$ 是偶函数,

$$f(x+4) = f(4-x),$$

$$f(-1) = f(-5+4) = f(5+4) = f(-3+4 \times 3) = -f(-3),$$

$$f(2019) = -f(-1),$$

$$f(15) = -f(-3),$$

$$f(2) = -f(-2),$$

$$-1, -2, -4, 6, (-4, 0),$$

$$\frac{f(-1) - f(-2)}{-1 + 2} > 0, f(-1) > f(-2),$$

$$\frac{f(-2) - f(-3)}{-2 + 3} > 0, f(-2) > f(-3),$$

$$f(-1) > f(-2) > f(-3),$$

$$-f(-1) < -f(-2) < -f(-3),$$

$$f(2019) < f(2) < f(15), f(15) > f(2) > f(2019).$$

故选B.

14

2017~2018学年3月天津河西区天津市第四十二中学高二下学期月考文科第9题3分

$\mathbf{R}$ 上函数 $y = f(x)$ 满足①对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+1) = \frac{1}{f(x)}$ ② $y = f(x+1)$ 是偶图像关于 y 轴对称③对

$\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$, 且 $x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, $[0, 1]$ 上递减, 则 $f\left(\frac{3}{2}\right), f(2), f(3)$ 的大小关系为

().

A. $f(3) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f(2)$

B. $f(3) < f(2) < f\left(\frac{3}{2}\right)$

C. $f(2) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f(3)$

D. $f\left(\frac{3}{2}\right) < f(2) < f(3)$

答案 A

解析 $\because f(x+1) = \frac{1}{f(x)}$,
 $\therefore T = 2$,
 $\therefore y = f(x+1)$ 为偶图像 ,
 $\therefore f(x+1) = f(-x+1)$,
 $\therefore f(x)$ 关于 $x=1$ 对称 ,
 $\therefore \forall x_1, x_2 \in [0, 1], x_1 < x_2$ 均有 $f(x_1) > f(x_2)$,
 $\therefore f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上为减函数 ,
 又 $\because f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$,
 $f(2) = f(0)$,
 $f(3) = f(1)$,
 $\therefore f(1) < f\left(\frac{1}{2}\right) < f(0)$,
 即 $f(3) < f\left(\frac{3}{2}\right) < f(2)$.

15 2019~2020学年广东清远高三上学期期末理科第10题5分

已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数, $f(x+2)$ 也是奇函数, 当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) = 2x - x^2$, 则 $f(-1)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f(\pi)$ 的大小关系是 () .

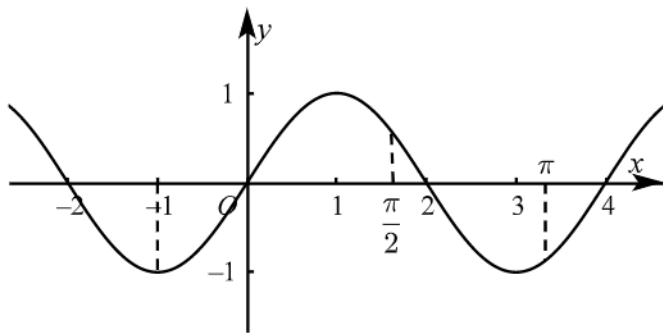
- A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(-1) < f(\pi)$
 B. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(\pi) < f(-1)$
 C. $f(-1) < f(\pi) < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$
 D. $f(-1) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(\pi)$

答案 C

解析 由 $f(x)$ 为奇函数, 可知函数 $f(x)$ 的一个对称中心为 $(0, 0)$,
 由 $f(x+2)$ 也是奇函数, 可知 $f(x)$ 的一个对称中心为 $(2, 0)$,

又函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 3)$ 上为减函数, 所以函数 $f(x)$ 的周期为4,

当 $x \in (0, 2)$ 时, $f(x) = 2x - x^2$, 故函数 $f(x)$ 的图象如图所示, $f(-1) = -f(1) = -1$,



又 $1 < \frac{\pi}{2} < 2$,

所以 $f(\frac{\pi}{2}) > 0$, 又 $3 < \pi < 4$,

所以 $0 = f(4) > f(\pi) > f(3) = -1$,

所以 $f(-1) < f(\pi) < f(\frac{\pi}{2})$,

故选: C.

16 2018~2019学年天津武清区武清区杨村第一中学高一上学期期末(六校联考)第6题4分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$, 且 $y = f(x+3)$ 为偶函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 内单调递减, 则下面结论正确的是().

- A. $f(-4.5) < f(3.5) < f(12.5)$
- B. $f(3.5) < f(-4.5) < f(12.5)$
- C. $f(12.5) < f(3.5) < f(-4.5)$
- D. $f(3.5) < f(12.5) < f(-4.5)$

答案 B

解析

根据题意, 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3) = -\frac{1}{f(x)}$,

则有 $f(x+6) = -\frac{1}{f(x+3)} = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 是周期为6的周期函数,

又由 $y = f(x+3)$ 为偶函数, 则函数 $f(x)$ 关于直线 $x = 3$ 对称,

则 $f(3.5) = f(2.5)$, $f(-4.5) = f(1.5)$, $f(12.5) = f(0.5)$,

又由 $f(x)$ 在 $(0, 3)$ 内单调递减, 则 $f(2.5) < f(1.5) < f(0.5)$,

则有 $f(3.5) < f(-4.5) < f(12.5)$.

故选B.

包罗万象 举一反三

17 2017~2018学年辽宁沈阳高三上学期期中理科第12题5分

定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(x)$, 且在 $[-3, -2]$ 上是减函数, α, β 是钝角三角形的两个锐角, 则下列结论正确的是().

- A. $f(\sin \alpha) > f(\cos \beta)$
- B. $f(\cos \alpha) < f(\cos \beta)$
- C. $f(\cos \alpha) > f(\cos \beta)$
- D. $f(\sin \alpha) < f(\cos \beta)$

答案 D

解析

$\because \alpha, \beta$ 是钝角三角形的两个锐角可得 $0^\circ < \alpha + \beta < 90^\circ$ 即 $0^\circ < \alpha < 90^\circ - \beta$,

$\therefore 0 < \sin \alpha < \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta < 1$,

$\because f(x)$ 满足 $f(2-x) = f(x)$, $\therefore$ 函数关于 $x=1$ 对称,

$\because$ 函数为偶函数即 $f(-x) = f(x)$, $\therefore f(2-x) = f(x)$, 即函数的周期为2,

$\because$ 函数在 $[-3, -2]$ 上是减函数, 则根据偶函数的性质可得在 $[2, 3]$ 单调递增, 根据周期性可知在 $[0, 1]$ 单调递增,

$\therefore f(\sin \alpha) < f(\cos \beta)$.

故选: D.



求解不等式

18 2018年天津南开区天津市南开中学高三下学期高考模拟文科第12题5分

设函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以5为周期的奇函数, 若 $f(2) > 1$, $f(3) = \frac{a^2 + a + 3}{a - 3}$, 则 a 的取值范围是_____.

答案

$(-\infty, -2) \cup (0, 3)$

解析 $\because$ 函数 $f(x)$ 以 5 为周期, $\therefore f(2) = f(-3)$,
 又 $\because f(3) = \frac{a^2 + a + 3}{a - 3}$, 函数是奇函数.
 $\therefore f(-3) = -f(3) = -\frac{a^2 + a + 3}{a - 3}$,
 因此, $f(2) = -\frac{a^2 + a + 3}{a - 3} > 1$,
 解之得 $0 < a < 3$ 或 $a < -2$.
 故答案为: $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$.

19 2018~2019 学年 12 月 天津和平区 天津市第二南开中学 高三上学期 月考理科第 7 题 5 分

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的以 3 为周期的偶函数, 若 $f(1) < 1$, $f(5) = \frac{2a - 3}{a + 1}$, 则实数 a 的取值范围 () .

- A. $(-2, 0)$ B. $(-1, 0)$ C. $(-1, 2)$ D. $(-1, 4)$

答案 D

解析 $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上以 3 为周期的偶函数,
 $\therefore f(5) = f(5 - 6) = f(-1) = f(1)$,
 $\therefore$ 由 $f(1) < 1$, $f(5) = \frac{2a - 3}{a + 1}$ 得 $f(5) = \frac{2a - 3}{a + 1} < 1$.
 解得 $-1 < a < 4$.
 故选 D.

20 2020 年 天津南开区 天津市第二十五中学 高三下学期 高考模拟 (3 月) 第 4 题 5 分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 若函数 $y = f(x + 2)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 对任意数 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 若 $f(a) \leq f(3a + 1)$, 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ B. $[-2, -1]$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ D. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

答案 A

解析 由于函数 $y = f(x + 2)$ 为偶函数,

故函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称，

又 $\because$ 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$)，有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ ，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty, 2]$ 上单调递增，

由 $f(a) \leq f(3a+1)$ 得 $|a-2| \geq |3a+1-2|$ ，

解得 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{4}$ 。

故选A。

- 21 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足 $f(2-x) + (2+x) = 0$ ，该函数在 $(2, +\infty)$ 上单调递增，且 $f(3) = 0$ ，求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集。

答案 $[1, 2] \cup [3, +\infty)$ 。

解析 由已知，该函数关于点 $(2, 0)$ 中心对称。

故其在 $(-\infty, 2)$ 上也单调递增，有零点 $(1, 0)$ 。

结合函数单调性以及函数草图可知，该不等式解集为 $[1, 2] \cup [3, +\infty)$ 。

- 22 2020年广东广州高三一模理科（网考）第5题5分

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1-x) = f(1+x)$ ，当 $x \geq 1$ 时， $f(x) = x - \frac{2}{x}$ ，则 $\{x | f(x+2) > 1\} = ($

$)$ 。

A. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 0\}$

B. $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 2\}$

C. $\{x | x < -2 \text{ 或 } x > 0\}$

D. $\{x | x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$

答案 C

解析 $\because f(1-x) = f(1+x)$ ，

$\therefore f(x)$ 关于 $x = 1$ 对称，

当 $x \geq 1$ 时， $f(x) = x - \frac{2}{x}$ ，此时 $f(x)$ 单调递增，

令 $f(x) = 1$ ，则 $x - \frac{2}{x} = 1$ ，

$\therefore x = 2$ ，

$$\therefore f(2) = 1,$$

又 $f(x)$ 关于 $x = 1$ 对称,

$\therefore f(0) = 1$, 且当 $x < 1$ 时, $f(x)$ 单调递减,

$\therefore$ 当 $f(x+2) > 1$ 时, 即 $x+2 > 2$ 或 $x+2 < 0$,

$\therefore x > 0$ 或 $x < -2$.

故选: C.



利用函数图像研究根的分布

23 2017年天津南开区高三二模文科第8题5分

已知函数 $f(x) = x - [x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数. 若关于 x 的方程 $f(x) = kx + k$ 有三个不同的实根, 则实数 k 的取值范围是().

A. $[-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$

B. $(-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$

C. $[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$

D. $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, 1)$

教法备注

【注意点】注意函数图像在区间端点左右两侧的取值能否取到, 也即注意图像实点、空心点的位置。

答案 B

解析 画出函数 $y = f(x)$ 的图象, 其图象

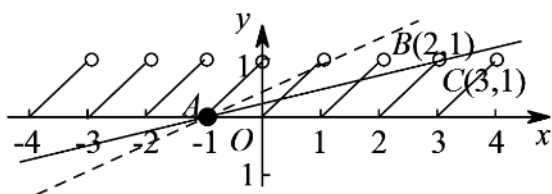
为具有周期性, 并且在区间 $[0, 1)$ 上的解析式为

$y = x$. 函数 $y = kx + k$ 可能是任意一条经过点

$(-1, 0)$ 且不与 x 轴垂直的直线. 斜率 k 使得函数

$y = f(x)$ 的图象与函数 $y = kx + k$ 的图象恰有3个

交点根据图像可知 $k \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$.



豪厘不伐 将用斧柯

24 2018~2019学年4月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考文科第14题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & x \in (-2, 2] \\ 1-|x-3|, & x \in (2, 4] \end{cases}$ 满足 $f(x-3) = f(x+3)$, 若在区间 $[-4, 4]$ 内关于 x 的方程 $3f(x) = k(x-5)$ 恰有4个不同的实数解, 则实数 k 的取值范围是 _____.

教法备注

此题还可以画出 $3f(x)$ 的图像, 再根据直线 $y = k(x-5)$ 过 **定点(5, 0)** 的特点, 改变 k 的值, 结合函数图像分析不同情况下解的情况。

【易错点】 注意不要丢掉斜率为0情况的讨论!

答案

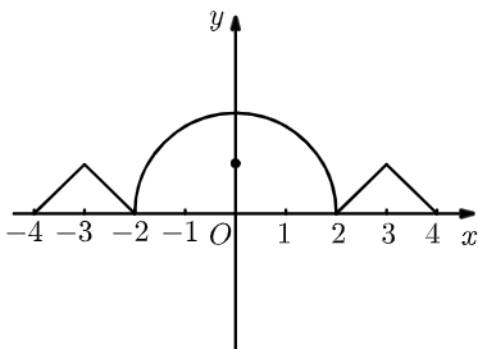
$$\left(-\frac{2\sqrt{21}}{7}, -\frac{3}{8}\right) \cup \{0\}$$

解析

$$\because f(x-3) = f(x+3) \Rightarrow T = 6,$$

则当 $x \in [-4, -2]$ 时, $f(x) = 1 - |x+3|$.

故当 $x \in [-4, 4]$ 时, $f(x)$ 如右图.



若 $3f(x) = k(x-5)$ 恰有4个不同的实数解,

$\Rightarrow f(x) = \frac{k}{3}(x-5)$ 恰有4个不同的实数解.

考虑 $y = \frac{k}{3}(x-5)$ 与 $y = f(x)$ 在 $x \in [-4, 4]$ 时交点个数.

一方面：当 $y = \frac{k}{3}(x-5)$ 过点 $(-3, 1)$ 时，

$$k = -\frac{3}{8},$$

$$\text{故 } k < -\frac{3}{8},$$

另一方面：当 $y = \frac{k}{3}(x-5)$ 过点 $(3, 1)$ 时，

$$k = -\frac{3}{2},$$

此时 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ，即 $x + 2y - 5 = 0$ ，设点 O 到该直线距离为 d ，

$$\text{此时 } d = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} > 2.$$

考虑 $y = \frac{k}{3}(x-5)$ 与圆 $x^2 + y^2 = 4 (y > 0)$ 时相切。

$$\text{则 } k = -\frac{2\sqrt{21}}{7},$$

$$\text{则 } k > -\frac{2\sqrt{21}}{7},$$

$$\therefore k \in \left(-\frac{2\sqrt{21}}{7}, -\frac{3}{8}\right).$$

注意到：当 $k = 0$ 时，符合题意。

$$\text{综上所述：} k \in \left(-\frac{2\sqrt{21}}{7}, -\frac{3}{8}\right) \cup \{0\}.$$

【仅教师可见】此题其他解个数对应参数取值范围：

$$0 \text{ 个解：} k \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (0, +\infty)$$

$$1 \text{ 个解：} k = -\frac{3}{2}$$

$$2 \text{ 个解：} k \in (-\frac{3}{2}, -\frac{2\sqrt{21}}{7})$$

$$3 \text{ 个解：} k = -\frac{2\sqrt{21}}{7}$$

$$4 \text{ 个解：} k \in (-\frac{2\sqrt{21}}{7}, -\frac{3}{8}) \cup \{0\}$$

$$5 \text{ 个解：} k = -\frac{3}{8}$$

$$6 \text{ 个解：} k \in (-\frac{3}{8}, 0)$$

25

2019~2020 学年 10 月天津和平区高三上学期月考第 9 题 5 分

已知 $f(x) = k(x+1)$ ，其中 $k > 0$ 。设 $g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，且 $g(x)$ 的周期为 2，当

$x \in (0, 2]$ 时， $g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{2}{3}, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ ，若在区间 $(0, 6]$ 上，关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 恰有 4 个不同的实

数根，则 k 的取值范围是 ()。

A. $\left(\frac{2}{21}, \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{2}{15}, \frac{1}{6}\right)$

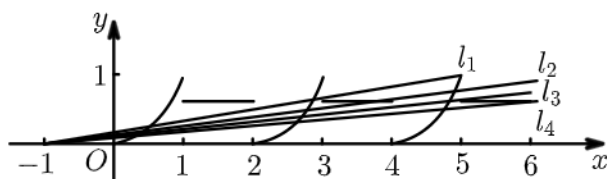
B. $\left[\frac{2}{21}, \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{2}{15}, \frac{1}{6}\right)$

C. $\left[\frac{2}{21}, \frac{1}{9}\right) \cup \left[\frac{2}{15}, \frac{1}{6}\right]$

D. $\left[\frac{2}{21}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{15}, \frac{1}{6}\right]$

答案 C

解析



如图所示为 $g(x)$ 在 $(0, 6]$ 上的图像， $f(x)$ 为恒过定点 $(-1, 0)$ 的直线，其中 l_1 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 恰有3个交点，此时 $f(x)$ 经过点 $(3, \frac{2}{3})$ ，即 $k = \frac{1}{6}$ ， l_2 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 恰有4个交点，此时 $f(x)$ 经过点 $(4, \frac{2}{3})$ ，即 $k = \frac{2}{15}$ ，且 l_1 与 l_2 之间 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均有4个交点， $\therefore k \in [\frac{2}{15}, \frac{1}{6})$ ， l_3 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 恰有3个交点，此时 $f(x)$ 经过点 $(5, \frac{2}{3})$ ，即 $k = \frac{1}{9}$ ， l_4 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 恰有4个交点，此时 $f(x)$ 经过点 $(6, \frac{2}{3})$ ，即 $k = \frac{2}{21}$ ，且 l_3 与 l_4 之间 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均有4个交点， $\therefore k \in [\frac{2}{21}, \frac{1}{9})$ ，综上所述， k 的取值范围是 $[\frac{2}{21}, \frac{1}{9}) \cup [\frac{2}{15}, \frac{1}{6})$ 。故选C。

【技巧性求解】

由于此题是选择题，且不同选项数值相同，主要是区间的开闭情况有所不同，因此无需计算出特殊位置处的切线斜率的准确数值。

我们在画出 $g(x)$ 在 $(0, 6]$ 上的图像后，结合我们的分析情况不难发现，为两个左闭右开区间，故而直接选C。

26 2018~2019学年4月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考文科（九校联考）第8题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} a - x^2 - 4x & (x < 0) \\ f(x-2) & (x \geq 0) \end{cases}$ ，且函数 $y = f(x) - 2x$ 恰有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是（ ）。

- | | |
|--------------------|--------------------|
| A. $[-4, +\infty)$ | B. $[-8, +\infty)$ |
| C. $[-4, 0]$ | D. $(0, +\infty)$ |

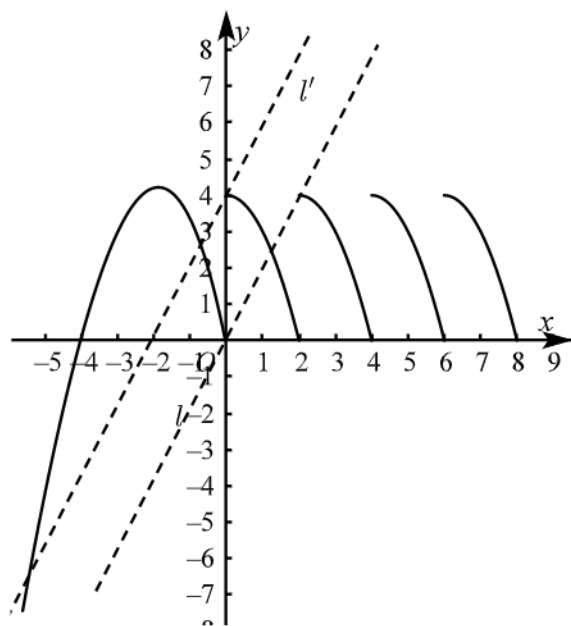
答案 A

解析 方程 $f(x) - 2x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x) - a = 2x - a$,

所以函数 $y = f(x) - 2x$ 恰有三个不同的零点等价于 $y = f(x) - a$ 与 $y = 2x - a$ 有三个交点,

$$\text{记 } g(x) = f(x) - a = \begin{cases} -x^2 - 4x & (x < 0) \\ g(x-2) & (x \geq 0) \end{cases},$$

画出函数简图如下,



画出函数 $y = 2x$ 如图中过原点虚线 l , 平移 l 要保证图象有三个交点,

向上最多平移到 l' 位置, 向下平移一直会有三个交点,

所以 $-a \leq 4$, 即 $a \geq -4$.

故选 A.

27 2018~2019 学年 4 月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考理科第 8 题 5 分

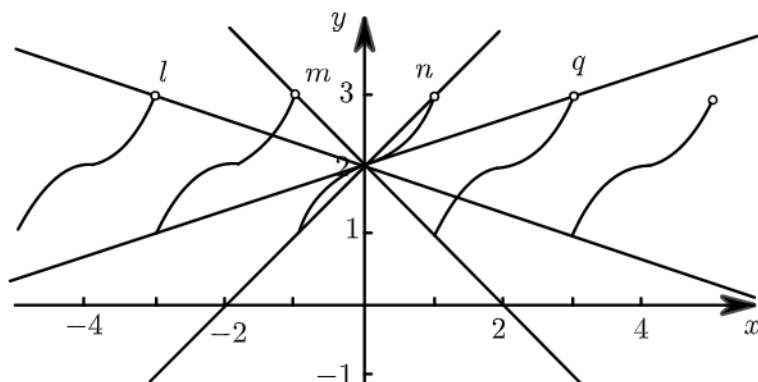
已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1), \\ 2 - x^2, & x \in [-1, 0), \end{cases}$ 且 $f(x+2) = f(x)$. 若方程 $f(x) - kx - 2 = 0$ 有三个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是 ().

- A. $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
- B. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right)$
- C. $\left(-1, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, 1\right)$
- D. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$

答案 C

解析

作函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1) \\ 2 - x^2, & x \in [-1, 0) \end{cases}$ 与 $g(x) = kx + 2$ 的图像如下，



直线 $g(x) = kx + 2$ 恒过点 $(0, 2)$ ，

$$k_l = \frac{3-2}{-3-0} = -\frac{1}{3},$$

$$k_m = \frac{3-2}{-1-0} = -1,$$

$$k_n = \frac{3-2}{1-0} = 1,$$

$$k_q = \frac{3-2}{3-0} = \frac{1}{3},$$

结合图像可知，实数 k 的取值范围是 $\left(\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$ 。

故选C。