

01：函数的单调性与奇偶性练习题

【仅教师可见】

此讲义知识点与对应课堂讲义一致，删去了较难的拔高题，且对应题型题目难度适中。

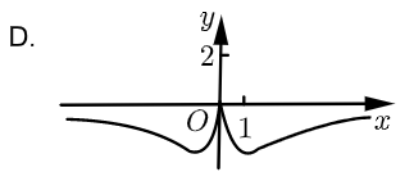
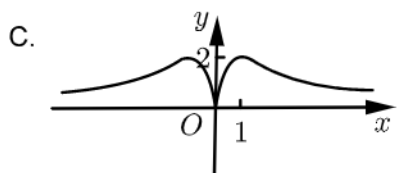
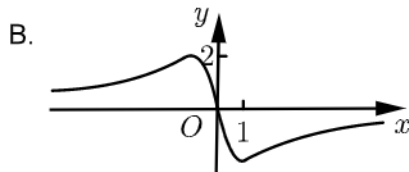
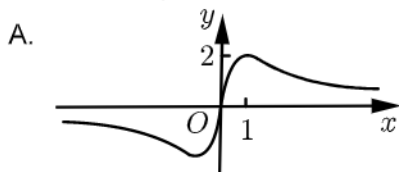
如学生程度无法适应大多数学生的学习进度，可直接使用此讲义作为标准讲义进行学习。

如学生程度与多数学生一致，可用其作为课后练习。

1. 利用单调性、奇偶性判断函数图像

1 2020~2021学年天津河东区高三上学期期中第6题5分

函数 $y = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的图象大致为 () .



答案 A

解析

由题意知 $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,

$$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-4x}{x^2 + 1} = -f(x) ,$$

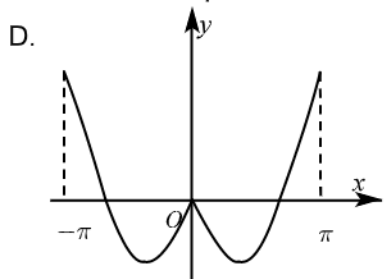
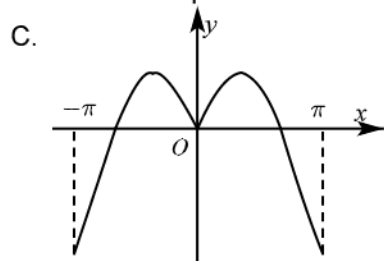
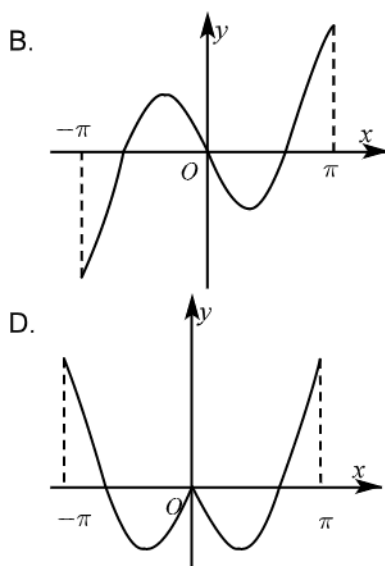
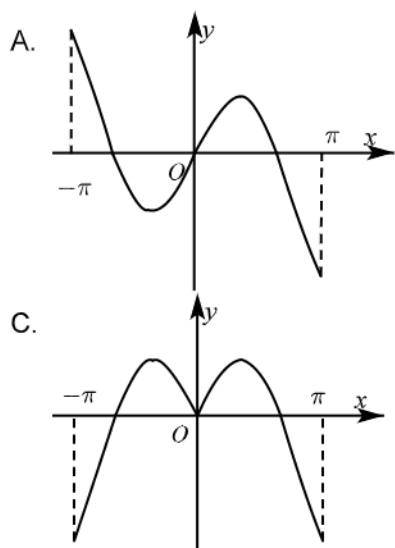
$\therefore f(x)$ 为奇函数，故排除 C、D .

当 $x > 0$ 时， $f(x) > 0$ ，故排除 B .

故选 A .

2 2020~2021学年10月北京海淀区北京大学附属中学高三上学期月考第3题4分

函数 $y = x \cos x + \sin x$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的图象大致为 () .



答案 A

解析

$$\text{令 } f(x) = x \cos x + \sin x,$$

$$\text{则 } f(-x) = -x \cos(-x) + \sin(-x)$$

$$= -x \cos x - \sin x$$

$$= -f(x),$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时 } f(0) = 0,$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数, 故排除选项 C, D.

$$\text{当 } x = \pi \text{ 时},$$

$$f(\pi) = \pi \cos \pi + \sin \pi = -\pi < 0,$$

故排除选项: B.

故选 A.

2. 复合函数单调性

3 2019~2020学年广东深圳南山区深圳大学附属中学高一上学期期中第9题5分

函数 $y = \sqrt{x^2 + 2x - 24}$ 的单调递减区间是 ().

A. $(-\infty, -6]$

B. $[-6, +\infty)$

C. $(-\infty, -1]$

D. $[-1, +\infty)$

答案 A

解析 函数的定义域为： $x^2 + 2x - 24 \geq 0$ ，
解得： $x \geq 4$ 或 $x \leq -6$ ，
对于 $u = x^2 + 2x - 24 = (x + 1)^2 - 25$ ，
 $\therefore$ 函数 $u = (x + 1)^2 - 25$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减，
 $\therefore y = \sqrt{x^2 + 2x - 24}$ 在 $(-\infty, -6]$ 上单调递减，
综上所述，答案选择：A。

4 2020~2021学年四川成都双流县四川双流棠湖中学外国语实验学校高一上学期期中第10题5分

若函数 $f(x) = 4x^2 - kx + 2k$ 在 $[-1, 2]$ 上为减函数，则实数 k 的取值范围为（ ）。

- A. $[16, +\infty)$ B. $(-\infty, -8]$
C. $[-8, 16]$ D. $(-\infty, -8] \cup [16, +\infty)$

答案 A

解析 函数 $f(x) = 4x^2 - kx + 2k$ 的对称轴为：
 $x = \frac{k}{8}$ ，函数开口向上，
 $\therefore$ 函数在 $[-1, 2]$ 上为减函数，
 $\therefore \frac{k}{8} \geq 2$ ，
 $\therefore k \geq 16$ ，
实数 k 的取值范围为 $[16, +\infty)$ 。
故选A。

5 2019~2020学年10月安徽合肥包河区中国科学技术大学附属中学高一上学期月考第4题5分

二次函数 $y = -x^2 + bx + 3$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是增函数，则实数 b 的取值范围是（ ）。

- A. $\{b | b \geq 4\}$ B. $\{4\}$
C. $\{b | b \leq 4\}$ D. $\{-4\}$

答案 A

解析 $\because$ 二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ ，且开口向下，
 $\therefore$ 由二次函数性质可得该二次函数的对称轴为 $x = -\frac{b}{-1 \times 2} = \frac{b}{2}$ ，
 $\therefore$ 当 $x \leq \frac{b}{2}$ 时，函数为增函数，
 由题可知二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 在区间 $(-\infty, 2]$ 上是增函数，
 则 $\frac{b}{2} \geq 2$ ，
 解得 $b \geq 4$ ，
 故实数 b 的取值范围是 $\{b | b \geq 4\}$ 。
 故选 A。

3. 函数单调性与奇偶性的应用



比较大小

6 2020~2021学年9月重庆渝中区重庆市巴蜀中学高一上学期月考第5题5分

已知 $f(x)$ 是偶函数， $x \in \mathbf{R}$ ，当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 为增函数，若 $x_1 < 0$ ， $x_2 > 0$ ，且 $|x_1| < |x_2|$ 则 ()。

- A. $f(-x_1) > f(-x_2)$ B. $f(-x_1) < f(-x_2)$
 C. $-f(x_1) > f(-x_2)$ D. $-f(x_1) < f(-x_2)$

答案 B

解析 $\because f(x)$ 是偶函数， $x > 0$ 时， $f(x)$ 为增函数，
 $\therefore f(x)$ 在 $x < 0$ 时， $f(x)$ 为减函数，
 $\because |x_1| < |x_2|$ ，
 $\therefore f(|x_1|) < f(|x_2|)$ ，
 则 $f(-x_1) < f(-x_2)$ 成立。
 故选 B。

7

2018~2019学年陕西西安新城区西安市第八十三中学高一上学期期中第6题4分

设 $f(x)$ 为定义于 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数，则 $f(-2)$ 、 $f(-\pi)$ 、 $f(3)$ 的大小顺序是()。

A. $f(-\pi) > f(3) > f(-2)$

B. $f(-\pi) > f(-2) > f(3)$

C. $f(-\pi) < f(3) < f(-2)$

D. $f(-\pi) < f(-2) < f(3)$

答案 A

解析

$\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，

$$\therefore f(-\pi) = f(\pi), f(-2) = f(2),$$

$\because$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数，

$$\therefore f(\pi) > f(3) > f(2),$$

$$\text{即 } f(-\pi) > f(3) > f(-2),$$

所以A选项是正确的。



求解不等式

8

2019~2020学年10月江苏南京江宁区大厂高级中学高一上学期月考第6题5分

函数 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，且 $f(3a) < f(-2a + 10)$ ，则实数 a 的取值范围是()。

A. $(-\infty, 2)$

B. $(0, +\infty)$

C. $(2, +\infty)$

D. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

答案 C

解析

函数 $y = f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，且 $f(3a) < f(-2a + 10)$ ，

$$\text{可得： } 3a > -2a + 10, \text{ 解得 } a > 2.$$

故选C。

9

2020年天津西青区张家窝中学高三一模第1题5分

已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增，则满足 $f(2x - 1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围是()。

A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

B. $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
D. $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

答案 A

解析 $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(x) = f(|x|)$,
则不等式等价于 $f(|2x-1|) < f\left(\frac{1}{3}\right)$,
 $\because f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore |2x-1| < \frac{1}{3}$, 解得 $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$.
故选 A.

注意抽象函数定义域

10 2020~2021 学年 10 月江西南昌青山湖区南昌师范学院附属中学高一上学期月考第 8 题 5 分

已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 则满足 $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围是 () .

A. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$
C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

B. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$
D. $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

答案 C

解析 $\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, +\infty)$ 上的增函数,
满足 $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$,
则 $\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ \frac{1}{3} > 2x-1 \end{cases}$,
解得: $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$,
 $\therefore$ 满足 $f(2x-1) < f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.
故选 C.

11 2019~2020学年10月陕西西安碑林区西安交通大学附属中学高一上学期月考第8题3分

已知 $y = f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 上是减函数，且 $f(1-a) < f(2a-1)$ ，则 a 的取值范围是 () .

- A. $(-\infty, \frac{2}{3})$
- B. $(0, +\infty)$
- C. $(0, \frac{2}{3})$
- D. $(-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$

答案 C

解析 $\because f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 上是减函数，

且 $f(1-a) < f(2a-1)$.

$$\therefore \begin{cases} -1 < 1-a < 1 \\ -1 < 2a-1 < 1 \\ 1-a > 2a-1 \end{cases}$$

解得 $0 < a < \frac{2}{3}$.

故选C .

借助图像与x轴的关系求解不等式

12 2019~2020学年广东广州荔湾区广东实验中学高一上学期单元测试《函数及其性质》(格致班)第5题5分

设 $f(x)$ 为奇函数，且在 $(-\infty, 0)$ 内是减函数， $f(-2) = 0$ ，则 $xf(x) < 0$ 的解集是 () .

- A. $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$
- B. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
- C. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$

答案 C

解析 由奇函数的性质可得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上也是减函数，

又 $f(-2) = 0$ ，

则 $f(2) = 0$,

所以, 当 $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ 时, $f(x) > 0$;

当 $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$,

所以, 当 $x > 0$ 时, $xf(x) < 0$ 的解集为 $(2, +\infty)$,

当 $x < 0$ 时, $xf(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -2)$,

故 $xf(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

故选 C.

13 2019~2020 学年 1 月四川成都双流县双流中学高三上学期月考文科第 7 题 5 分

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0]$ 上为增函数, $f(3) = 0$, 则不等式 $f(1 - 2x) > 0$ 的解集为 ().

- A. $\{x | -1 < x < 0\}$ B. $\{x | -1 < x < 2\}$ C. $\{x | 0 < x < 2\}$ D. $\{x | x > 2\}$

答案 B

解析 $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0]$ 上为增函数,

$\therefore f(x)$ 有区间 $[0, +\infty)$ 上为减函数.

$\because f(1 - 2x) > 0 = f(3) = f(-3)$,

$\therefore |1 - 2x| < 3$,

$\therefore -1 < x < 2$.

故选 B.

14 2019~2020 学年广东深圳南山区深圳市第二高级中学高一上学期段考 (二) 第 9 题 5 分

定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$, 满足 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $xf(x) > 0$ 的解集为

()

- A. $\left\{x \mid x < -\frac{1}{2} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$
 B. $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2} < x < 0\right\}$
 C. $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 或 } x < -\frac{1}{2}\right\}$

D. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 0 \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\right\}$

答案 B

解析 $\because$ 函数 $f(x)$ 是奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $x < 0$, 当 $-\frac{1}{2} < x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 此时 $xf(x) > 0$

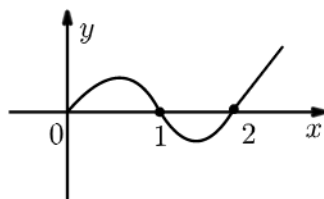
当 $x > 0$, 当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) > 0$, 此时 $xf(x) > 0$

综上 $xf(x) > 0$ 的解集为 $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ 或 } -\frac{1}{2} < x < 0\right\}$

故选: B.

15 2019~2020学年10月江苏南京鼓楼区南京师范大学附属中学高一上学期月考第5题4分

已知奇函数 $f(x)$ 在 $x \geq 0$ 时的图象如图所示, 则不等式 $xf(x) < 0$ 的解集为 ().



A. $(1, 2)$

B. $(-2, -1)$

C. $(-2, -1) \cup (1, 2)$

D. $(-1, 1)$

答案 C

解析 (1) $x > 0$ 时, $f(x) < 0$, $\therefore 1 < x < 2$,

(2) $x < 0$ 时, $f(x) > 0$, 由奇函数性质知 $-2 < x < -1$,

$\therefore$ 不等式 $xf(x) < 0$ 的解集为 $(-2, -1) \cup (1, 2)$.

4. 分段函数单调性的应用

求解参数取值范围

16 已知 $f(x) = \begin{cases} (3a-1)x+4a, & x < 1 \\ -x+1, & x \geq 1 \end{cases}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的减函数，那么 a 的取值范围是 () .

- A. $(-\infty, \frac{1}{3})$
- B. $(\frac{1}{7}, +\infty)$
- C. $[\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$
- D. $(-\infty, -\frac{1}{7}] \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$

答案 C

解析 要使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为减函数，必须同时满足3个条件：

① $g(x) = (3a-1)x+4a$ 在 $(-\infty, 1)$ 上为减函数；

② $h(x) = -x+1$ 在 $[1, +\infty)$ 上为减函数；

③ $g(1) \geq h(1)$.

所以 $\begin{cases} 3a-1 < 0 \\ (3a-1) \times 1 + 4a \geq -1+1 \end{cases}$,

故 $\frac{1}{7} \leq a < \frac{1}{3}$.

17 2019~2020学年12月安徽六安金安区毛坦厂中学高三上学期月考理科（应届）第8题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4ax + 3 & (x < 1) \\ (2-3a)x + 1 & (x \geq 1) \end{cases}$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 内单调递减，则 a 的取值范围是 () .

- A. $(0, \frac{1}{2}]$
- B. $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$
- C. $(\frac{2}{3}, 1]$
- D. $[1, +\infty)$

答案 C

解析 由 $x < 1$ 时， $f(x) = x^2 - 4ax + 3$,

由题意， $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减，

则 $-\frac{4a}{2} \geq 1$ ，解得 $a \geq \frac{1}{2}$ ，

由 $x \geq 1$ 时， $f(x) = (2-3a)x + 1$ ，

由题意， $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减，

则 $2-3a < 0$ ，解得 $a > \frac{2}{3}$ ，

又 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

则当 $x = 1$ 时, $x^2 - 4ax + 3 \geq (2 - 3a)x + 1$,

即 $1 - 4a + 3 \geq 2 - 3a + 1$, 解得 $a \leq 1$,

故 a 的取值范围是 $\left(\frac{2}{3}, 1\right]$.

故选 C.



利用分段函数图像或单调性求解不等式

18 2019年高考真题全国卷II理科第23题10分

已知 $f(x) = |x - a|x + |x - 2|(x - a)$.

当 $a = 1$ 时, 求不等式 $f(x) < 0$ 的解集.

答案 $(-\infty, 1)$.

解析 当 $x < 1$ 时, $f(x) = -2(x - 1)^2 < 0$;

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq 0$,

所以, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, 1)$.

19 2020年高考真题全国卷II理科第23题10分

已知函数 $f(x) = |x - a^2| + |x - 2a + 1|$.

当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集.

答案 $\left\{x \mid x \leq \frac{3}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{11}{2}\right\}$.

解析 当 $a = 2$ 时, $f(x) = \begin{cases} 7 - 2x, & x \leq 3 \\ 1, & 3 < x \leq 4 \\ 2x - 7, & x > 4 \end{cases}$,

因此不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集为 $\left\{x \mid x \leq \frac{3}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{11}{2}\right\}$.

注意函数奇偶性

20 2018年山东枣庄高三二模理科第9题5分

已知 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}$, 则满足 $f(2x+1) > f(2)$ 成立的 x 取值范围是 () .

- A. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- B. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- C. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$
- D. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

答案 B

解析 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & x < 0 \end{cases}$, $f(-x) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是偶函数 ,

在 $x > 0$ 时是增函数 ,

所以 $f(2x+1) > f(2)$,

可得 $|2x+1| > 2$, 解得 : $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

故选 : B .