

04三角函数综合练习题

根据三角函数性质求参数范围问题

1 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对满足

$|f(x_1) - g(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$, 则 $\varphi =$ () .

A. $\frac{5\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

答案 D

解析 由题意可得, $g(x)$ 由 $f(x)$ 平移得到, 两函数周期为 π , 最小值为 -1 , 最大值为 1 , 若需满足

$$|f(x_1) - g(x_2)| = 2, \text{ 则 } \begin{cases} f(x_1) = 1 \\ g(x_2) = -1 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} f(x_1) = -1 \\ g(x_2) = 1 \end{cases},$$

若 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{3}$, 可以得到 $f(x_1)$ 和 $g(x_2)$ 两函数峰值间距为 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$,

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

故选: D.

2 函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 对称, 那么 ω 的最小值等于 ____.

答案 8

解析 函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到函数 $y = g(x)$ 的图象, 则

$$g(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\omega\pi}{4}\right),$$

$\therefore f(x)$ 的图象与 $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4}, 0)$ 对称,

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + g(x) = 0 \text{ 恒成立},$$

$$\text{即 } \sin \omega \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\omega x - \frac{\omega\pi}{4}\right) = 0 \text{ 恒成立},$$

$$\text{即 } \sin\left(\frac{\omega\pi}{2} - \omega x\right) = -\sin\left(\omega x - \frac{\omega\pi}{4}\right) \text{ 恒成立},$$

$$\therefore \sin\left(\omega x - \frac{\omega\pi}{2}\right) = \sin\left(\omega x - \frac{\omega\pi}{4}\right) \text{ 恒成立},$$

$$\therefore \frac{\omega\pi}{4} = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \omega = 8k, k \in \mathbf{Z},$$

又 $\omega > 0$, 故 ω 的最小值等于 8.

3 设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, $x \in \mathbf{R}$, 其中 $\omega > 0$, $|\varphi| < \pi$. 若 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2$, $f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则 ().

- A. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$
- B. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{12}$
- C. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{24}$
- D. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{7\pi}{24}$

答案 A

解析 由 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 得 $\frac{T}{4} > \frac{\pi}{2}$,
 又 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2, f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 得 $\frac{T}{4} = \frac{11\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$,
 $\therefore T = 3\pi$, 则 $\frac{2\pi}{\omega} = 3\pi$, 即 $\omega = \frac{2}{3}$.
 $\therefore f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + \varphi\right)$
 $\therefore$ 由 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2\sin\left(\frac{2}{3} \times \frac{5\pi}{8} + \varphi\right) = 2$, 得 $\sin\left(\varphi + \frac{5\pi}{12}\right) = 1$.
 $\therefore \varphi + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.
 取 $k = 0$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{12} < \pi$.
 $\therefore \omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$.
 故选 A.

4 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象过点 $B(0, -1)$, 且在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调, 同时 $f(x)$ 的图象向左平移 π 个单位之后与原来的图象重合, 当 $x_1, x_2 \in \left(-\frac{17\pi}{12}, -\frac{2\pi}{3}\right)$, 且 $x_1 \neq x_2$ 时, $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $f(x_1 + x_2) = ()$.

- A. $\sqrt{3}$
- B. $-\sqrt{2}$
- C. 1
- D. -1

答案 D

解析

由函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象过点 $B(0, -1)$,

$$\therefore 2\sin\varphi = -1, \text{ 解得 } \sin\varphi = -\frac{1}{2}, \text{ 又 } |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

$\therefore f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$; 又 $f(x)$ 的图象向左平移 π 个单位之后为

$$g(x) = 2\sin\left[\omega(x + \pi) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(\omega x + \omega\pi - \frac{\pi}{6}\right),$$

由两函数图象完全重合知 $\omega\pi = 2k\pi$,

$$\therefore \omega = 2k, k \in \mathbf{Z};$$

$$\text{又 } \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{18} \leq \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega},$$

$$\therefore \omega \leq \frac{18}{5}, \therefore \omega = 2,$$

$$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ 其图象的对称轴为 } x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbf{Z};$$

$$\text{当 } x_1, x_2 \in \left(-\frac{17\pi}{12}, -\frac{2\pi}{3}\right), \text{ 其对称轴为 } x = -3 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{6},$$

$$\therefore x_1 + x_2 = 2 \times \left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{7\pi}{3},$$

$$\therefore f(x_1 + x_2) = f\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = 2\sin\left[2 \times \left(-\frac{7\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{6}\right]$$

$$= 2\sin\left(-\frac{29\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{29\pi}{6} = -2\sin\frac{5\pi}{6} = -1.$$

故选D.

三角恒等变换与图像综合问题

- 5 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 若将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 后得到偶函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $f(x)$ 的一个单调递减区间为 () .

- A. $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$
- B. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right]$
- C. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
- D. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$

答案

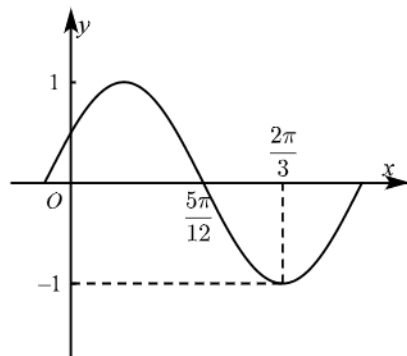
B

解析

$\therefore f(x) = \sin(\omega x + \theta)$ 的两个相邻对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$,
 $\therefore T = \pi$, 则 $\omega = 2$,
 $\therefore f(x) = \sin(2x + \theta)$, 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 后得到 $g(x)$,
 $\therefore g(x) = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \theta\right] = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \theta\right)$,
 $\therefore g(x)$ 为偶函数 ,
 $\therefore \frac{\pi}{3} + \theta = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,
 $\therefore -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$,
 $\therefore$ 令 $k = 0$ 得 : $\theta = \frac{\pi}{6}$,
 $\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,
 令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,
 得 $k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq k\pi + \frac{2}{3}\pi$, $k \in \mathbf{Z}$,
 $\therefore f(x)$ 的单调减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{2}{3}\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$,
 $\therefore f(x)$ 的一个减区间可以为 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7}{12}\pi\right]$.
 故选 B .

6 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}$, $A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 部分图象如图所示 .



- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及解析式 .
- (2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $y = g(x)$ 的图象 . 求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值 .

答案

- (1) π , $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.
- (2) 1 , $-\frac{1}{2}$.

解析

- (1) 由图可知 , $A = 1$, $\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$,

$$\therefore T = \pi,$$

$$\therefore \omega = 2,$$

$$x = \frac{2\pi}{3} \text{ 时, } f(x) = -1,$$

$$\therefore \sin\left(2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = -1,$$

$$\therefore |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

(2) 由(1)知 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到:

$$y = g(x) = \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right],$$

$$= \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\therefore -\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6},$$

$$\therefore \text{当 } 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } g(x) \text{ 有最大值为 } 1,$$

$$\text{当 } 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \text{ 时, } g(x) \text{ 有最小值为 } -\frac{1}{2}.$$

7 已知函数 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 2\cos^2 x - 2$.

(1) 求 $f(x)$ 函数图像的对称轴方程;

(2) 求 $f(x)$ 的单调增区间;

(3) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值, 最小值.

答案

(1) 函数图像的对称轴方程为 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

(2) $f(x)$ 的单调增区间为 $x \in \left[-\frac{3\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$;

(3) $f(x)$ 的最大值为 1, 最小值为 $-\sqrt{2}$.

解析

(1) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 2\cos^2 x - 2 = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

(2) $\therefore f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),$

$\therefore$ 由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 得:

$$k\pi - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z},$$

$\therefore f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的单调增区间为: $\left[k\pi - \frac{3\pi}{8}, k\pi + \frac{\pi}{8}\right], k \in \mathbf{Z}$.

(3) $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] \Rightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, 所以

$$f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-\sqrt{2}, 1],$$

所以 $f(x)$ 的最大值为 1, 最小值为 $-\sqrt{2}$.

8 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x + a$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递减区间;

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值与最小值的和为 $\frac{3}{2}$, 求 a 的值.

答案

(1) $T = \pi$. 单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) $a = 0$.

解析

$$(1) f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} + a = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + a + \frac{1}{2}.$$

所以 $T = \pi$.

$$\text{由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\text{得 } \frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi.$$

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$.

(2) 因为 $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$,

$$\text{所以 } -\frac{\pi}{6} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{所以 } -\frac{1}{2} \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1.$$

因为函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值与最小值的和

$$\left(1 + a + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} + a + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

所以 $a = 0$.

9

已知: 向量 $\vec{a} = (2 \cos \frac{x}{4}, 2 \sin \frac{x}{4})$, $\vec{b} = (\sin \frac{x}{4}, -\sqrt{3} \sin \frac{x}{4})$, 函数 $f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \sqrt{3}$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期及最值;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象纵坐标不变, 横坐标伸长为原来的 2 倍后, 再向左平移 $\frac{2}{3}\pi$ 得到函数

$y = g(x)$, 判断函数 $y = g(x)$ 的奇偶性, 并说明理由.

答案

- (1) 最小正周期为 4π ，最小值为 -2 .
 (2) 偶函数，理由见解析 .

解析

- (1) $\therefore$ 函数

$$y = f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \sqrt{3} = \sin \frac{x}{2} - 2\sqrt{3} \sin^2 \frac{x}{4} + \sqrt{3} = \sin \frac{x}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \right),$$

故函数 $y = f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ ，最小值为 -2 .

- (2) 将函数 $y = f(x)$ 的图像纵坐标不变，横坐标伸长为原来的2倍后，

得到函数 $y = 2 \sin \left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3} \right)$ 的图像，再向左平移 $\frac{2}{3}\pi$

得到函数 $y = 2 \sin \left[\frac{1}{4} \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{\pi}{3} \right] = 2 \sin \left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cos \frac{x}{4}$ 的图像，

故函数 $y = g(x) = 2 \cos \frac{x}{4}$ ，定义域为 $\mathbf{R}$ ，

因为 $g(-x) = 2 \cos \left(-\frac{x}{4} \right) = 2 \cos \frac{x}{4} = g(x)$ ，

故函数 $y = g(x)$ 是偶函数 .

10 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 2x - 1$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间 .
 (2) 若将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 上的最大值和最小值，并求出取得最值时的 x 值 .

答案

(1) $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12} \right], k \in \mathbf{Z}$.

(2) $x = \frac{5\pi}{12}$ 时，函数取得最小值为 -3 .

$x = 0$ 时，函数取得最大值为 $\sqrt{3} - 1$.

解析

(1) 函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 2x - 1$

$$= \sqrt{3} \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) + \sin 2x - 1 = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x - 1 = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - 1,$$

令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ，求得 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}$ ，可得函数的增区间为 $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12} \right], k \in \mathbf{Z}$.

- (2) 若将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数

$g(x) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) - 1 = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) - 1$ 的图象，

在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上, $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$, 故当 $2x + \frac{\pi}{6} = \pi$ 时, 即 $x = \frac{5\pi}{12}$ 时, 函数取得最小值为 $-2 - 1 = -3$.

当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 时, 即 $x = 0$ 时, 函数取得最大值为 $\sqrt{3} - 1$.

11 已知函数 $f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期和值域.

(2) 若 $x = x_0$ ($x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) 为 $f(x)$ 的一个零点, 求 $\sin 2x_0$ 的值.

答案

(1) 最小正周期 $T = \pi$, 值域为: $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

(2) $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$.

解析

(1) 函数 $f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x \in \mathbf{R}$

化简可得: $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$

$= \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x + \frac{1}{2}$

$= 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$.

$\therefore f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 值域为: $\left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

(2) 令 $f(x_0) = 0$, 可得 $\sin\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{4} < 0$.

$\because x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$\therefore 2x_0 - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, 0\right]$,

$\cos\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

那么:

$\sin 2x_0 = \sin\left[\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \sin\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} + \cos\left(2x_0 - \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{8}$