

04三角函数综合

根据三角函数性质求参数范围问题

1 将函数 $f(x) = \sin \omega x$ ($\omega > 0$) 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 所得图像经过点 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$, 则 ω 的最小值是 ().

A. $\frac{1}{3}$

B. 1

C. $\frac{5}{3}$

D. 2

答案 D

解析 函数 $f(x) = \sin \omega x$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到函数 $g(x) = f(x - \frac{\pi}{4}) = \sin[\omega(x - \frac{\pi}{4})]$ 的图像,

因为此时函数的图像过点 $(\frac{3\pi}{4}, 0)$,

所以 $\sin[\omega(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4})] = 0$,

即 $\omega(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\omega\pi}{2} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\omega = 2k, k \in \mathbf{Z}$,

所以 ω 的最小值为 2,

故选 D.

2 若将函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度所得图象过点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$, 则 ω 的最小值是 ().

A. 19

B. 13

C. 7

D. 1

答案 D

解析 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 的图象沿 x 轴向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度得到函数

$g(x) = \sin[\omega(x - \frac{2\pi}{3}) + \frac{\pi}{6}]$ 的图象,

由于函数 $y = g(x)$ 的图象经过点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$,

$$\text{所以} \sin\left(\frac{\omega\pi}{2} - \frac{2\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 0,$$

$$\text{所以} -\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{解得} \omega = 1 - 6k (k \in \mathbf{Z}),$$

又因为 $\omega > 0$, 当 $k = 0$ 时, ω 取最小值 1.

故选: D.

- 3 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{5}\right)$. 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ 成立, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值是 _____.

答案 2

解析 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$.

由于对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ 成立, 则 $f(x_1) = f(x)_{\min} = -2$,

$f(x_2) = f(x)_{\max} = 2$, 从而 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{T}{2}$, 即为 2.

- 4 已知函数 $f(x) = \sin 2\pi x - \sqrt{3} \cos 2\pi x$, 若存在实数 x_1, x_2 对任意实数 x 总有 $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ 成立, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 _____.

答案 $\frac{1}{2}$

解析 $f(x) = \sin 2\pi x - \sqrt{3} \cos 2\pi x$

$$= 2 \sin 2\pi x \cos \frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos 2\pi x$$

$$= 2 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{故} T = \frac{2\pi}{2\pi} = 1,$$

$$\text{故} |x_1 - x_2|_{\min} = \frac{T}{2} = \frac{1}{2},$$

则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

- 5 已知函数 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$, $f(x_1) + f(x_2) = 0$, 且函数 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上具有单调性, 则 $|x_1 + x_2|$ 的最小值为 ().

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$

D. $\frac{4\pi}{3}$

答案 C

解析

$$f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$$

$$= 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right).$$

$$\because f(x_1) + f(x_2) = 0,$$

且 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上单调,

$\therefore (x_1, f(x_1))$ 与 $(x_2, f(x_2))$ 两点关于 $y = f(x)$ 的对称中心对称.

$$\text{令 } x - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore y = f(x) \text{ 的对称中心为 } \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, 0 \right), k \in \mathbf{Z},$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{当 } k = 0 \text{ 时, } |x_1 + x_2|_{\min} = \frac{2}{3}\pi.$$

故选 C.

6 已知函数 $f(x) = 2 \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{4} \right) (\omega > 0)$ 的图象在区间 $[0, 1]$ 上恰有 3 个最高点, 则 ω 的取值范围为 ().

A. $\left[\frac{19\pi}{4}, \frac{27\pi}{4} \right)$

B. $\left[\frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2} \right)$

C. $\left[\frac{17\pi}{4}, \frac{25\pi}{4} \right)$

D. $[4\pi, 6\pi)$

教法备注

将括号内看做整体, 通过 x 范围计算整体的范围, 结合图像, 注意区间开闭!!!

答案 C

解析 函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$,

$\therefore x \in [0, 1]$ 上,

$\therefore \omega x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \omega + \frac{\pi}{4}\right]$,

图象在区间 $[0, 1]$ 上恰有 3 个最高点,

$\therefore \frac{9\pi}{2} \leq \omega + \frac{\pi}{4} < 6\pi + \frac{\pi}{2}$,

解得: $\frac{17\pi}{4} \leq \omega < \frac{25\pi}{4}$.

故选 C.

7 已知函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$ 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$, 若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上有最大值, 无最小值, 则 ω 的最大值为 ().

A. $\frac{4}{9}$

B. $\frac{28}{9}$

C. $\frac{52}{9}$

D. $\frac{100}{9}$

答案 D

解析 函数 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$ 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$,

$\therefore$ 直线 $x = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{4}$ 为 $f(x) = \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$ 的一条对称轴,

$\therefore \omega \cdot \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore \omega = \frac{4}{3}k + \frac{4}{9}, k \in \mathbf{Z}$,

又 $\omega > 0$, 且 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 上有最大值, 无最小值,

$\therefore T > \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$,

即 $\frac{2\pi}{\omega} > \frac{\pi}{6}$,

$\therefore \omega < 12$,

$\therefore$ 当 $k = 8$ 时, $\omega = \frac{32}{3} + \frac{4}{9} = \frac{100}{9}$ 为最大值.

故选 D.

8 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2})$, $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的零点, $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 图象的对称轴, 且 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 单调, 则 ω 的最大值为 ().

A. 11

B. 9

C. 7

D. 5

答案 B

解析

由题意知： $\begin{cases} -\frac{\pi}{4}\omega + \varphi = k_1\pi \\ \frac{\pi}{4}\omega + \varphi = k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ，

得 $\omega = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}$ ， $\therefore f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 上单调，

$\therefore \frac{\pi}{12} \leq \frac{T}{2} \Rightarrow \omega \leq 12$ ，

若 $\omega = 11, \varphi = -\frac{\pi}{4}$ ，此时 $f(x) = \sin(11x - \frac{\pi}{4})$ ，

$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{3\pi}{44})$ 上递增，在 $(\frac{3\pi}{44}, \frac{5\pi}{36})$ 递减，不满足 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 上单调；

若 $\omega = 9, \varphi = \frac{\pi}{4}$ ，此时 $f(x) = \sin(9x + \frac{\pi}{4})$ ，满足 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36})$ 上单调。

故选B。

精进不休 日新月异

9 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$ ，($\omega > 0, x \in \mathbf{R}$)，若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是()。

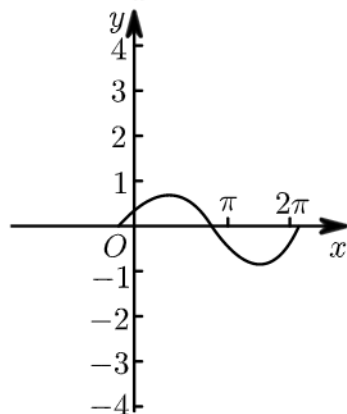
- A. $(0, \frac{5}{12}]$
- B. $(0, \frac{5}{12}] \cup [\frac{5}{6}, \frac{11}{12})$
- C. $(0, \frac{5}{6}]$
- D. $(0, \frac{5}{12}] \cup [\frac{5}{6}, \frac{11}{12}]$

答案 D

解析

函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ，

可得 $T = \frac{2\pi}{\omega} \geq \pi, 0 < \omega \leq 2$ ， $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点，函数的图象如图两种类型，



结合三角函数可得： $\begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} \geq 0 \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \pi \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} \geq \pi \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \end{cases}$ ，

解得 $\omega \in \left(0, \frac{5}{12}\right] \cup \left[\frac{5}{6}, \frac{11}{12}\right]$ 。

故选：D。

10 若函数 $f(x) = \left| \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right) \right|$ ($\omega > 1$) 在区间 $\left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递减，则实数 ω 的取值范围是 _____。

答案 $\left[\frac{7}{4}, \frac{9}{5}\right]$

解析 $f(x)$ 在 $\left(\pi, \frac{5}{4}\pi\right)$ 上单调减，
 $\therefore T = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} \geq 2\left(\frac{5}{4}\pi - \pi\right) = \frac{\pi}{2}$ 。

即 $\omega \geq 2$ 。

由 $y = |\sin x|$ 得，减区间为 $\left[k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \pi\right]$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，

$$\therefore k\pi + \frac{\pi}{2} \leq \omega x - \frac{\pi}{4} \leq k\pi + \pi$$

$$k\pi + \frac{3}{4}\pi \leq \omega x \leq \frac{5}{4}\pi + k\pi$$

又 $\because x \in \left[\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$ ， $\omega > 1$ 。

$$\therefore \omega x \in \left[\pi\omega, \frac{5}{4}\pi\omega\right]。$$

$$\text{当 } k=0, \left[\pi\omega, \frac{5}{4}\pi\omega\right] \subseteq \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$$

$$\therefore \frac{5}{4}\pi\omega \leq \frac{5}{4}\pi，$$

$$\therefore \omega \leq 1。$$

与 $\omega > 1$ 矛盾。

$$\text{当 } k=1 \text{ 时，} \left[\pi\omega, \frac{5}{4}\pi\omega\right] \subseteq \left[\frac{7}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi\right]，$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{7}{4}\pi \leq \pi\omega \\ \frac{5}{4}\pi\omega \leq \frac{9}{4}\pi \end{cases}。$$

$$\therefore \frac{7}{4} \leq \omega \leq \frac{9}{5}。$$

$$\text{又 } \because \omega \leq \frac{9}{5}，$$

$$\therefore \frac{7}{4} \leq \omega \leq 2。$$

$$\therefore \text{答案为 } \left[\frac{7}{4}, \frac{9}{5}\right]。$$

包罗万象 举一千从

- 11 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$), $x = -\frac{\pi}{8}$ 为 $f(x)$ 的零点, 满足 $f(\frac{\pi}{8} - x) = f(\frac{\pi}{8} + x)$, 且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{24})$ 单调, 则 ω 的最大值为 ().

A. 6 B. 9 C. 10 D. 12

答案 C

解析 因为 $x = -\frac{\pi}{8}$ 为 $f(x)$ 的零点,

$x = \frac{\pi}{8}$ 为图象 $y = f(x)$ 的对称轴,

所以 $\frac{\pi}{8} - (-\frac{\pi}{8}) = \frac{T}{4} + \frac{kT}{2}$,

即 $\frac{\pi}{4} = \frac{2k+1}{4}T = \frac{2k+1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$,

所以 $\omega = 4k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$),

又因为 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{24})$ 单调,

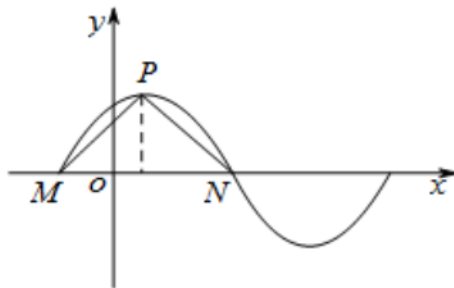
所以 $\frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{12} \leq \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2\omega}$,

即 $\omega \leq 12$, 又 $\omega = 4k + 2$ ($k \in \mathbf{N}$),

则 ω 的可能取值为 2, 6, 10, 由检验知 $\omega = 10$ 符合题意,

故选 C.

- 12 如图所示, 点 P 是函数 $y = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}, \omega > 0$) 图像的最高点, M, N 是图像与 x 轴的交点, 若 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$, 则 ω 等于 ().



A. 8 B. $\frac{\pi}{8}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{2}$

答案 C

解析 因为 $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$, 所以 $\overrightarrow{PM} \perp \overrightarrow{PN}$,
 则 $\triangle MPN$ 是等腰直角三角形,
 又点 P 到 MN 的距离为 2, 所以 $MN = 2 \times 2 = 4$,
 则周期 $T = 2 \times 4 = 8$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$.

三角恒等变换与图像综合问题

单调性问题

13 已知函数 $f(x) = 2\sin(\pi - x) \cdot \cos x + \sin^2 x - \cos^2 x$, $x \in \mathbf{R}$.

- (1) 求 $f(\frac{\pi}{2})$ 的值及函数 $f(x)$ 的最小正周期;
- (2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调减区间.

答案 (1) 答案见解析.
 (2) 答案见解析.

解析 (1) $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$
 $= \sqrt{2} \sin(2x - \frac{\pi}{4})$.
 $f(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2} \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.
 显然, 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π .
 (2) 令 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$ 得
 $k\pi + \frac{3}{8}\pi \leq x \leq k\pi + \frac{7}{8}\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
 又因为 $x \in [0, \pi]$, 所以 $x \in [\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}]$.
 函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调减区间为 $[\frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}]$.

14 已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\omega x}{2} \cos \frac{\omega x}{2} - \frac{1}{2}$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 π .

- (1) 求 ω 的值及函数 $f(x)$ 的最大值和最小值;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

答案

- (1) $\omega = 2$, 最大值为1, 最小值为-1
 (2) 单调递增区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}] (k \in \mathbb{Z})$

解析

- (1) $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\omega x}{2} \cos \frac{\omega x}{2} - \frac{1}{2}$
 $= \frac{1 + \cos \omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x + \frac{1}{2} \cos \omega x = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$.
 因为 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi, \omega > 0$, 所以 $\omega = 2$.
 因为 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}), x \in \mathbb{R}$,
 所以 $-1 \leq \sin(2x + \frac{\pi}{6}) \leq 1$.
 所以函数 $f(x)$ 的最大值为1, 最小值为-1.
 (2) 令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,
 得 $2k\pi - \frac{2\pi}{3} \leq 2x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$,
 所以 $k\pi - \frac{\pi}{3} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$.
 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi - \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{\pi}{6}] (k \in \mathbb{Z})$

值域问题

15 已知函数 $f(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期;
 (2) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值及取得最大值时的 x 值.

答案

- (1) π
 (2) $\sqrt{2} + 1$

解析

- (1) 因为 $f(x) = \sin 2x + 2 \times \frac{1 + \cos 2x}{2} = \sin 2x + \cos 2x + 1$
 $= \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$
 所以 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 $f(x)$ 的最小正周期为 π .
 (2) 因为 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$.
 当 $2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 时, 即 $x = \frac{\pi}{8}$ 时,
 所以 $f(x)$ 有最大值 $\sqrt{2} + 1$.

16 已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - \sin(x + \pi)$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小正周期 ;
- (2) 若将 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 , 得到函数 $g(x)$ 的图像 , 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值和最小值 .

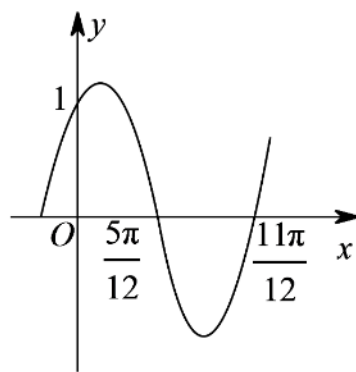
答案

- (1) 2π .
- (2) 答案见解析 .

解析

- (1) $\because f(x) = 2\sqrt{3}\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}) - \sin(x + \pi)$
 $= \sqrt{3}\sin(x + \frac{\pi}{2}) + \sin x = \sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\sin(x + \frac{\pi}{3})$
 $\therefore f(x)$ 的最小正周期为 2π .
- (2) $\because$ 将 $f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 , 得到函数 $g(x)$ 的图像 ,
 $\therefore g(x) = f(x - \frac{\pi}{6}) = 2\sin[(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{3}] = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$.
 $\because x \in [0, \pi]$, $\therefore x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$,
 $\therefore$ 当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{3}$ 时 , $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = 1$, $g(x)$ 取得最大值 2 .
 当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$, 即 $x = \pi$ 时 , $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, $g(x)$ 取得最小值 -1 .

17 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($x \in \mathbf{R}, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示 .



- (1) 求函数 $f(x)$ 的解析式 .
- (2) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的最大值与最小值 .

答案

- (1) $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$.
- (2) 最小值为 -2 ; 最大值为 1 .

解析

- (1) $T = 2 \left(\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) = \pi$, $\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$
 因为点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0 \right)$ 在函数图象上, 得 $\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \varphi\right) = 0$.
 由 $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 可得 $\frac{5\pi}{6} + \varphi \in \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right)$,
 从而 $\frac{5\pi}{6} + \varphi = \pi$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
 因为点 $(0, 1)$ 在函数图象上, $A \sin \frac{\pi}{6} = 1$, 即 $A = 2$.
 故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.
 (2) 因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.
 当 $2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$ 时, 即 $x = -\frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 的最小值为 -2 ;
 当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 时, 即 $x = 0$ 时, $f(x)$ 的最大值为 1 .

包罗万象 举一千从

18 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$) 为偶函数, 其图像上相邻的两个最高点之间的距离为 2π .

- (1) 求 $f(x)$ 的解析式.
 (2) 若 $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$ 求 $\sin\left(2\alpha + \frac{5\pi}{3}\right)$ 的值.

答案

- (1) $f(x) = \cos x$.
 (2) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

解析

- (1) $\because$ 函数 $f(x)$ 的图像上相邻的两个最高点之间的距离为 2π ,
 $\therefore T = 2\pi$, 则 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. $\therefore f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$.
 $\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.
 又 $0 \leq \varphi \leq \pi$, 解得 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 则 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.
 (2) 由已知得 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}$, $\because \alpha \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\therefore \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \in \left(0, \frac{5\pi}{6}\right)$, 则
 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
 $\therefore \sin\left(2\alpha + \frac{5\pi}{3}\right) = -\sin\left(2\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$.