01三角函数定义与恒等变换

任意角与弧度制

- 任意角
  - 角的概念：顶点、始边、终边
  - 角的正负
    - 正角：逆时针
    - 负角：顺时针
  - 终边相同的角
    - $S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot 360^{\circ},k\in\mathbf{Z}\}$
  - 象限角与轴线角
    - 象限角：________________________
    - 轴线角：________________________

教法备注

可以选一两个象限角或轴线角让学生自己填空.

- 弧度制
  - 定义
    - 长度等于半径长的圆弧所对的圆心角称为1弧度的角
  - 弧度与角度的换算
    - $180^{\circ}=\pi rad$
    - $1rad=\left(\frac{180^{\circ}}{\pi}\right)\approx 57.30^{\circ}=57^{\circ}18'$
  - 弧长与面积
    - 弧长公式：$l=|\alpha|r$
    - 扇形面积公式：$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$

圆心角为120°的扇形面积为$\frac{4}{3}\pi$，则该扇形的半径为______．

答案 2

解析 扇形面积为$S=\frac{1}{2}\alpha r^2\Rightarrow\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{3}\times r^2\Rightarrow r^2=4\Rightarrow r=2$．

2 扇形的圆心角与半径相等，面积为4，这个扇形的圆心角等于（　）．

A. $\sqrt[3]{4}$　　B. 2　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

答案 B

解析 扇形的面积$S=\frac{1}{2}\alpha r^2=4$，又因为$\alpha=r$，所以$\frac{1}{2}\alpha^3=4$，所以$\alpha=2$．

故选B．

3 终边在y轴上的角的集合是（　）．

A. $\{\alpha|\alpha=90^\circ+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=90^\circ+2k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=270^\circ+2k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=90^\circ+k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

答案 A

解析 终边在y轴上的集合是：$\left\{\alpha|\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$．终边在$xy$轴上的集合是：$\{\alpha|\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$．终边在坐标轴上的集合是：$\left\{\alpha|\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$．

故选A．

4 设角α与角β的终边关于x轴对称，则α与β的关系是（　）．

A. $\alpha+\beta=0$

B. $\alpha-\beta=0$

C. $\alpha+\beta=2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$

D. $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$

答案 C

解析 ∵角α与角β关于x轴对称，

∴$\alpha+\beta=2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$．

故选$\mathbf{C}$．

5 若扇形的圆心角$\alpha=120^\circ$，弦长$AB=12\mathrm{cm}$，则弧长$l=$（　）cm．

A. $\dfrac{4\sqrt{3}\pi}{3}$

B. $\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$

C. $\dfrac{4\pi}{3}$

D. $\dfrac{8\pi}{3}$

答案 B

解析 ∵扇形的圆心角$\alpha=120^\circ$，弦长$AB=12\mathrm{cm}$，

∴半径$r=\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$，

∴弧长$l=|\alpha|r=\dfrac{2\pi}{3}\times4\sqrt{3}=\dfrac{8\sqrt{3}\pi}{3}$．

故选$\mathbf{B}$．

三角函数定义

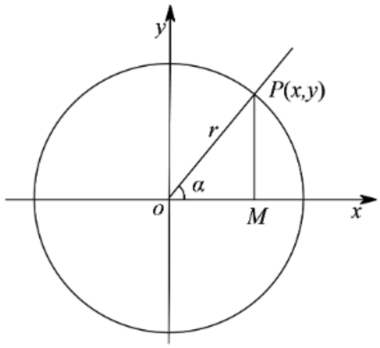
三角函数定义

在直角坐标系中，设α是一个任意角，α终边上任意一点P（除了原点）的坐标为(x,y)， 它与原点的距离为$r(r=\sqrt{|x|^2+|y|^2}=\sqrt{x^2+y^2}>0)$，那么：

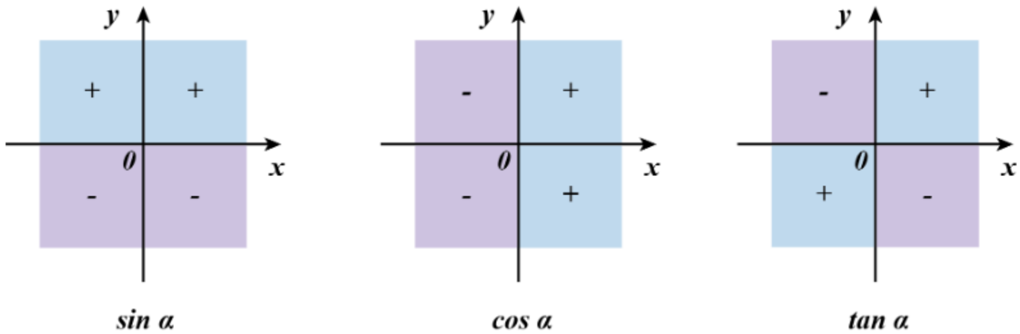
①比值$\dfrac{y}{r}$叫做α的正弦，记作$\sin\alpha$，即$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$；

②比值$\dfrac{x}{r}$叫做α的余弦，记作$\cos\alpha$，即$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$；

③比值$\dfrac{y}{x}$叫做α的正切，记作$\tan\alpha$，即$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq0)$．



三角函数符号



记忆口诀：一全正，二正弦，三正切，四余弦.

同角三角函数基本关系

（1）平方和关系：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$；

（2）商的关系：$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

三角函数符号

6 若$\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{5}{4}$，则终边过点$(\sin\alpha,\tan\alpha)$的角是（　）.

A. 第一象限角　　B. 第二象限角　　C. 第三象限角　　D. 第四象限角

答案 D

解析 $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{5}{4}>1$，

$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，

故α为第二象限，$\tan\alpha<0$，

则$(\sin\alpha,\tan\alpha)$在第四象限．

故选D．

7 已知$\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)$，那么点$P(\cos\theta-\sin\theta,\cos\theta+\sin\theta)$所在的象限是（　）．

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

教法备注

可以通过画图的形式给学生捋清各象限角平分线两侧正余弦值的大小关系.

答案 B

解析 $\because\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)$，

$\therefore 0<\cos\theta<\sin\theta<1$，

即$x=\cos\theta-\sin\theta<0$，

$y=\cos\theta+\sin\theta>0$，

$\therefore$在第二象限．

故选B．

同角三角函数基本关系

8 已知$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$，则$\sin\alpha\cos\alpha=$______．

答案 $-\frac{4}{9}$

解析 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\therefore(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\frac{1}{9}$，

$\therefore 1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9}$，解得$\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{9}$．

9 已知$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$的值为（　）．

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

答案 B

解析 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

又$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{4}{5}$. 故选B .

分式齐次式

10 已知$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}$，则$\cos\left(\alpha+\frac{17\pi}{12}\right)$的值等于（　）.

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$

D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

答案 A

解析 由$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}$，

则$\cos\left(\alpha+\frac{17\pi}{12}\right)=\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}$.

故选A .

11 已知$\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$，则$\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$（　）.

A. $-\frac{1}{3}$

B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

答案 D

解析 $\because\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left[-\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha$，

$\therefore\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$，

$\therefore\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}$.

故选D .

12

如果$\cos(\pi+\alpha)=-\frac{1}{3}$，那么$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$等于（　）．

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $-\frac{1}{3}$

答案　C

解析　$\because\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{1}{3}$，

$\therefore\cos\alpha=\frac{1}{3}$，

$\therefore\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$=\cos\alpha$

$=\frac{1}{3}$．

故选C．

13 已知$\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{3\sin\alpha+5\cos\alpha}=2$，则$\tan\alpha$的值为（　）．

A. $\frac{12}{5}$

B. $-\frac{12}{5}$

C. $\frac{5}{12}$

D. $-\frac{5}{12}$

答案　B

解析　$\because\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{3\sin\alpha+5\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-2}{\tan\alpha+5}=2$则$\tan\alpha=-\frac{12}{5}$，

故选：B．

14 已知$\tan\theta=2$，则$\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta$的值为______．

答案　$\frac{4}{5}$

解析　已知$\tan\theta=2$，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

$\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta$

$=\frac{\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta-2\cos^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}$，

分子分母同时除以$\cos^2\theta$，

得原式$=\dfrac{\tan^2\theta+\tan\theta-2}{\tan^2\theta+1}$，$\tan\theta=2$代入得

原式$=\dfrac{4+2-2}{4+1}=\dfrac{4}{5}$．

15 已知$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，计算下列各式的值．

(1) $\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}$．

(2) $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+1$．

答案 (1) $\dfrac{8}{9}$．

(2) $\dfrac{13}{10}$．

解析 (1) 由$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$，化简，得$\sin\alpha=3\cos\alpha$，

所以$\tan\alpha=3$．

$\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha+3\cos\alpha}=\dfrac{3\tan\alpha-1}{2\tan\alpha+3}$，

把$\tan\alpha=3$代入，得原式$=\dfrac{8}{9}$．

(2) $\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+1$

$=\dfrac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+1$

$=\dfrac{\tan^2\alpha-2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}+1$，

把$\tan\alpha=3$代入，得原式$=\dfrac{3^2-2\times3}{3^2+1}+1=\dfrac{13}{10}$．

诱导公式

公式一	$sin(\alpha+k\cdot 2\pi)=sin\alpha$，$cos(\alpha+k\cdot 2\pi)=cos\alpha$， $tan(\alpha+k\cdot 2\pi)=tan\alpha$(其中$k\in Z$)
公式二	$sin(\pi+\alpha)=-sin\alpha$，$cos(\pi+\alpha)=-cos\alpha$，$tan(\pi+\alpha)=tan\alpha$
公式三	$sin(-\alpha)=-sin\alpha$，$cos(-\alpha)=cos\alpha$，$tan(-\alpha)=-tan\alpha$
公式四	$sin(\pi-\alpha)=sin\alpha$，$cos(\pi-\alpha)=-cos\alpha$，$tan(\pi-\alpha)=-tan\alpha$
公式五	$sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=cos\alpha$，$cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=sin\alpha$
公式六	$sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=cos\alpha$，$cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-sin\alpha$

意义：$k\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha(k\in Z)$的三角函数值

记忆方法一：奇变偶不变，符号看象限.

记忆方法二：无论α是多大的角，都将α看成锐角.

教法备注

其中的奇偶是指$\frac{\pi}{2}$的奇偶数倍，变与不变是指三角函数名称的变化，若变，则是正弦变余弦，余弦变正弦

奇变偶不变　符号看象限

根据角的范围以及原三角函数值在四个象限的正负来判断新三角函数的符号

其中的奇偶是指 $\frac{\pi}{2}$ 的奇偶数倍，变与不变是指三角函数名称的变化，若变，则是正弦变余弦，余弦变正弦

奇变偶不变

符号看象限

根据角的范围以及原三角函数值在四个象限的正负来判断新三角函数的符号

16 已知$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)}{\cos(\pi-a)\sin(3\pi-a)\sin(-\pi-a)}=3$.

(1) 求$\sin a$的值.

(2) 当a为第三象限角时，求$\cos a$，$\tan a$的值.

答案 (1) $-\frac{1}{3}$.

(2) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

解析 (1) $\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right)}{\cos(\pi-a)\sin(3\pi-a)\sin(-\pi-a)}=3$,

$\therefore \frac{-\cos a\cdot(-\sin a)}{-\cos a\cdot\sin a\cdot\sin a}=3$,

$\therefore -\frac{1}{\sin a}=3$, $\sin a=-\frac{1}{3}$.

(2) $\because a$为第三象限角，

$\therefore \cos a=-\sqrt{1-\sin^2 a}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore \tan a=\frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

17 已知角α终边上的一点$P(7m,-3m)(m\neq 0)$.

(1) 求$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(-\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)}$的值 .

(2) 求$\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$的值 .

答案 (1) $-\frac{3}{7}$.

(2) $-\frac{35}{29}$.

解析 (1) 由题意得$\tan\alpha=\frac{-3m}{7m}=-\frac{3}{7}$,

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$,

$\sin(-\pi-\alpha)=\sin(2\pi-\pi-\alpha)=\sin\alpha$,

$\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{11\pi}{2}-\alpha-6\pi\right)$

$=\cos\left(-\frac{1}{2}\pi-\alpha\right)=\cos\left(\frac{1}{2}\pi+\alpha\right)=-\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$,

故，原式$=\frac{-\sin\alpha\sin\alpha}{-\sin\alpha\cos\alpha}=\tan\alpha=-\frac{3}{7}$.

(2) 因为$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$,

故原式$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}$,

$=-\frac{35}{29}$.

18

已知α是第三象限角，且$f(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)\tan(\pi-\alpha)}{\tan(-\alpha-\pi)\cdot\sin(-\pi-\alpha)}$．

(1) 化简$f(\alpha)$．

(2) 若$\cos(\alpha-\frac{3\pi}{2})=\frac{1}{5}$，求$f(\alpha)$的值．

答案 (1) $-\cos\alpha$．

(2) $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$．

解析 (1) 由题意知$f(\alpha)=\dfrac{-\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot(-\tan\alpha)}{-\tan\alpha\cdot\sin\alpha}=-\cos\alpha$．

(2) $\because\cos(\alpha-\frac{3\pi}{2})=\cos(-3\cdot\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha=\frac{1}{5}$，

$\therefore\sin\alpha=-\frac{1}{5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5^2-1}}{5}=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$．

$\therefore f(\alpha)=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$．

和差角公式

$\sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+sin\beta cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta)=cos\alpha cos\beta-sin\alpha sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=cos\alpha cos\beta+sin\alpha sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

三角函数的给值求值问题

教法备注

解决的关键在于把“所求角”用“已知角”表示

(1)当“已知角”有两个时，“所求角”一般表示为两个“已知角”的和或差的形式.

(2)当“已知角”有一个时，应关注“所求角”与“已知角”的和或差，进而应用诱导公式把“所求角”变成“已知角”.

19 若$\tan\alpha=\frac{1}{3}$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，则$\tan\beta=$(　)．

A. $\frac{1}{7}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{5}{7}$　　D. $\frac{5}{6}$

答案　A

解析　$\tan\beta=\tan(\alpha+\beta-\alpha)=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{7}$.

故选$\mathbf{A}$.

20 已知$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{3}$，且$\alpha$，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$\cos(\alpha-\beta)$的值等于（　）.

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $\frac{23}{27}$

答案　D

解析　因为$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$2\alpha\in(0,\pi)$．因为$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，所以$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\dfrac{7}{9}$，所以

$\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$．又$\alpha$、$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以$\alpha+\beta\in(0,\pi)$，所以

$\sin(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，所以

$\cos(\alpha-\beta)=\cos[2\alpha-(\alpha+\beta)]=\cos 2\alpha\cos(\alpha+\beta)+\sin 2\alpha\sin(\alpha+\beta)=\left(-\dfrac{7}{9}\right)\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$+\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{23}{27}$

，故选$\mathbf{D}$.

21 已知$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{2}{3}$，$\tan\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$，则$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$______ .

答案　5

解析　$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\tan\left[(\alpha+\beta)-\left(\beta-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)-\tan(\beta-\frac{\pi}{4})}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan(\beta-\frac{\pi}{4})}$

$=\dfrac{\frac{2}{3}+1}{1+\frac{2}{3}\times(-1)}=5$.

22 设α与β均为锐角，且$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，则$\cos\beta$的值为（　）．

A. $\frac{71}{98}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{71}{98}$或$\frac{1}{2}$

D. $\frac{71}{98}$或$\frac{59}{98}$

答案 B

解析 α、β锐角．

由$\cos\alpha=\frac{1}{7}$得$\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$．

由$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{3}}{14}$得$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$．

$\therefore\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$

$=\cos(\alpha+\beta)\cdot cos\alpha+sin(\alpha+\beta)\cdot sin\alpha$

$=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$=\frac{1}{2}$．

故选B．

23 若$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3$，$\tan(\alpha-\beta)=2$，则$\tan(\beta-2\alpha)=$______．

答案 $\frac{4}{3}$

解析 $\because\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=3$，

$\therefore\tan\alpha=2$．

又$\tan(\alpha-\beta)=2$，

$\therefore\tan(\beta-2\alpha)=\tan[(\beta-\alpha)-\alpha]$，

$=-\tan[(\alpha-\beta)+\alpha]$，

$=-\frac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\alpha}{1-\tan(\alpha-\beta)\cdot\tan\alpha}=\frac{4}{3}$．

故答案为：$\frac{4}{3}$．

三角函数的给值求角问题

教法备注

(1)解给值求角问题的一般步骤：

①求角的某一个三角函数值；

②确定角的范围；

③根据角的范围写出所求的角.

(2)求某个角的三角函数值时，选取函数应遵照以下原则：

①已知正切函数值，选正切函数.

②已知正、余弦函数值，选正弦或余弦函数若角的范围是$(0，\frac{\pi}{2})$，选正、余弦函数皆可；若角的范围是$(0，\pi)$，选余弦函数较好；若角的范围为$(-\frac{\pi}{2}，\frac{\pi}{2})$，选正弦函数较好.

24 已知$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\left(\beta+\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha$，$\beta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，则$\alpha+\beta=$______ .

答案 $\frac{5\pi}{4}$

解析 由$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，得$\alpha+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

故$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

由$\beta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，得$\beta+\frac{3\pi}{4}\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，

故$\sin\left(\beta+\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore\sin(\alpha+\beta)=-\sin\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\beta+\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$=-\left[\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\beta+\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\beta+\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$.

$\therefore\alpha+\beta=\frac{5\pi}{4}$.

25 已知α、$\beta\in(0,\pi)$，且$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，$\tan\beta=-\frac{1}{7}$，则$2\alpha-\beta=$______ .

答案 $-\frac{3\pi}{4}$

解析

$\because \tan\alpha=\tan[(\alpha-\beta)+\beta]=\dfrac{\tan(\alpha-\beta)+\tan\beta}{1-\tan(\alpha-\beta)\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{7}}=\dfrac{1}{3}>0$，

且$\alpha\in(0,\pi)$，$\therefore 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$．又$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times\frac{1}{3}}{1-(\frac{1}{3})^2}=\dfrac{3}{4}>0$，

$\therefore 0<2\alpha<\dfrac{\pi}{2}$．$\therefore \tan(2\alpha-\beta)=\dfrac{\tan2\alpha-\tan\beta}{1+\tan2\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}}=1$．

$\because \tan\beta=-\dfrac{1}{7}<0$，$\beta\in(0,\pi)$，$\therefore \dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$，$\therefore -\pi<2\alpha-\beta<0$，$\therefore 2\alpha-\beta=-\dfrac{3\pi}{4}$．

26 已知$\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{14}$，且$0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$．求$\beta$的值．

答案 $\beta=\dfrac{\pi}{3}$．

解析 易知$\sin\alpha=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，由$0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，

得：$0<\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$．

$\because\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{13}{14}$，

$\therefore\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-\left(\dfrac{13}{14}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{13}}{14}$，

$$\begin{aligned}\therefore\cos\beta&=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]\\&=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\\&=\frac{1}{7}\times\frac{13}{14}+\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}\\&=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

又$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore\beta=\dfrac{\pi}{3}$．

27 已知$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\alpha$，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则$\alpha+\beta$的值为（ ）．

A. $\dfrac{3\pi}{4}$

B. $\dfrac{\pi}{2}$

C. $\dfrac{\pi}{4}$

D. $\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$

答案 C

解析 $\because\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，$\alpha$，$\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin B = \frac{\sqrt{10}}{10}$,

$\therefore \alpha + \beta \in (0, \pi)$,

$\therefore \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$.

故选C .