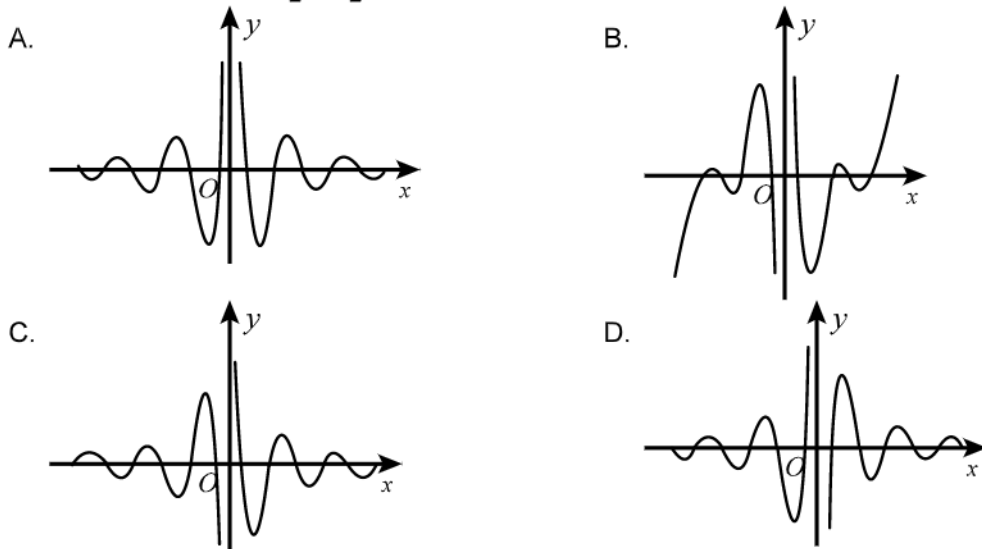


故选B.

3 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高三上学期期末第5题

(5分) 若函数 $f(x) = \frac{\cos 6x}{2^x - 2^{-x}}$ 的图象大致为 () .



答案 C

解析

$$\because f(x) = \frac{\cos 6x}{2^x - 2^{-x}},$$

$$\therefore f(-x) = \frac{\cos(-6x)}{2^{-x} - 2^x}$$

$$= \frac{\cos 6x}{2^{-x} - 2^x} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数, 故排除A选项;

$$\because \lim_{x \rightarrow 0} \cos 6x \rightarrow 1, \lim_{x \rightarrow 0} 2^x - 2^{-x} \rightarrow 0,$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow +\infty, \text{ 故排除D选项;}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - 2^{-x} \rightarrow 2^{+\infty} - 2^{-\infty} \rightarrow +\infty,$$

而 $\cos 6x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为振荡函数且 $-1 \leq \cos 6x \leq 1$,

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow 0$, 故排除B选项.

4 2020年天津高三上学期高考模拟第6题5分

(5分) 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $[0, +\infty)$ 单调递增则 () .

A. $f(\log_2 \pi) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) > f(2^{-\pi})$

B. $f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) f(2^{-\pi}) > f(\log_2 \pi)$

C. $f(2^{-\pi}) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) > f(\log_2 \pi)$

D. $f(2^{-\pi}) > f(\log_2 \pi) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right)$

答案 A

解析 因为函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 .

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 图象关于 y 轴对称 .

由函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调递增 . 则在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减 .

$$f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) = f(-\log_2 3) = f(\log_2 3)$$

$$\therefore \log_2 3 > \log_2 2 = 1 ,$$

$$\therefore f(\log_2 3) > f(1) ,$$

$$\text{又} \because 2^{-\pi} < 2^0 = 1 ,$$

$$\therefore f(2^{-\pi}) < f(1) ,$$

$$\text{所以} f(\log_2 3) > f(2^{-\pi}) .$$

$$\therefore \log_2 \pi > \log_2 3 > 2^{-\pi} ,$$

$$\therefore f(\log_2 \pi) > f(\log_2 3) > f(2^{-\pi}) .$$

则 $f(\log_2 \pi) > f\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) > f(2^{-\pi})$, 故A正确 .

故选A .

5 2020年天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高三二模第8题5分

(5分) 袋中装有标号为1, 2, 3, 4, 5, 6且大小相同的6个小球, 从袋子中一次性摸出两个球, 记下号码并放回, 如果两个号码的和是3的倍数, 则获奖, 若有5人参与摸球, 则恰好2人获奖的概率是 () .

A. $\frac{40}{243}$

B. $\frac{70}{243}$

C. $\frac{80}{243}$

D. $\frac{38}{243}$

答案 C

解析 由题意得, 任意号码和为3倍数有: 1和2, 1和5, 2和4, 3和6, 4和5, 5种,

$$\therefore \text{获奖概率为: } \frac{5}{C_6^2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} ,$$

$$\therefore \text{两人获奖} P = C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= 10 \times \frac{1}{9} \times \frac{8}{27}$$

$$= \frac{80}{243} .$$

故选C.

6 2020年天津和平区高三二模第5题5分

(5分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 若 $a=1$, $c=2\sqrt{3}$,

$b \sin A = a \sin\left(\frac{\pi}{3} - B\right)$, 则 $\sin C = (\quad)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{7}$

B. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

C. $\frac{\sqrt{21}}{12}$

D. $\frac{\sqrt{57}}{19}$

答案 B

解析

$$\because b \sin A = a \sin\left(\frac{\pi}{3} - B\right),$$

$$\therefore b \sin A = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos B - \frac{1}{2} \sin B \right),$$

$$\therefore \sin B \sin A + \frac{1}{2} \sin A \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos B, \quad 3 \sin A \sin B = \sqrt{3} \sin A \cos B,$$

又 $\sin A \neq 0$,

$$\therefore 3 \sin B = \sqrt{3} \cos B, \quad \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad B = 30^\circ,$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \frac{1 + 12 - b^2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b^2 = 7,$$

$$\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{7}, \quad \sin C = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

故选: B.

7 2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末(七校联考)第7题5分

(5分) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 上一点 $M(1, m)$ 到其焦点的距离为5, 双曲线

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左顶点为 A 且离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$, 若双曲线的一条渐近线与直线 AM 垂直,

则双曲线的方程为 $(\quad)$.

A. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$

B. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

C. $x^2 - 2y^2 = 1$

D. $x^2 - 4y^2 = 1$

答案 D

解析

设抛物线的焦点为 F ,

由抛物线的定义知, $|MF| = 1 + \frac{p}{2} = 5$, 解得 $p = 8$,

$\therefore$ 抛物线的方程为 $y^2 = 16x$,

不妨取 M 在第一象限, 则其坐标为 $(1, 4)$,

由题意知, $A(-a, 0)$, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

$\therefore$ 双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$,

$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{1}{2}a$, ①

$\therefore$ 双曲线的一条渐近线与直线 AM 垂直,

$\therefore -\frac{b}{a} \cdot \frac{4}{1+a} = -1$, ②

由①②, 解得 $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 即 $x^2 - 4y^2 = 1$.

故选 D.

8 2020年天津塘沽区天津市实验中学滨海学校高三下学期高考模拟第9题5分

(5分) 已知函数 $f(x) = \frac{\ln x + (x-t)^2}{x}$, $t \in \mathbf{R}$, 若存在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 使得 $f(x) + xf'(x) > 0$, 则实数 t 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, \sqrt{2})$ B. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ C. $\left(-\infty, \frac{9}{4}\right)$ D. $(-\infty, 3)$

答案 C

解析

设 $g(x) = xf(x) = \ln x + (x-t)^2$,

则 $f(x) + x \cdot f'(x) = g'(x) = \frac{1}{x} + 2(x-t)$ ($t \in \mathbf{R}$).

存在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, 使得 $f(x) + x \cdot f'(x) > 0$,

即 $\frac{1}{x} + 2(x-t) > 0$, 即 $t < \left(x + \frac{1}{2x}\right)_{\max}$, $\left(x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right)$,

令 $h(x) = x + \frac{1}{2x}$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{2x^2}$, 当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $h'(x) = 0$,

当 $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 当 $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

又 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} < h(2) = \frac{9}{4}$,

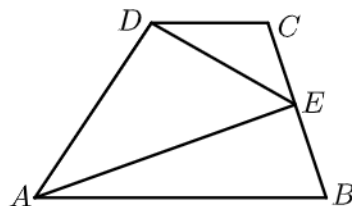
所以 $h(x)$ 在 $x = 2$ 处取得最大值 $\frac{9}{4}$.

所以 $t < \frac{9}{4}$ 满足“若存在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ，使得 $f(x) + xf(x)' > 0$ ”；

故选 C.

9 2020年天津河西区天津市第四中学高三下学期高考模拟（4月）第9题5分

（5分）如图梯形 $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ 且 $AB = 5$ ， $AD = 2DC = 4$ ， E 在线段 BC 上， $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE}$ 的最小值为（ ）.



A. $\frac{15}{13}$

B. $\frac{95}{13}$

C. 15

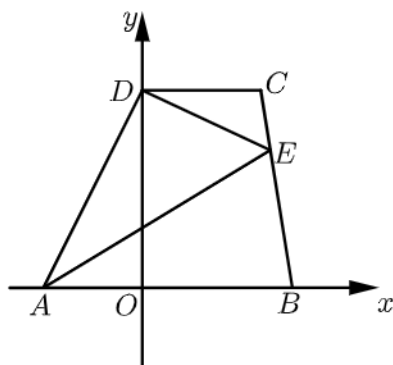
D. $-\frac{15}{13}$

答案 B

解析 在梯形 $ABCD$ ， $AB \parallel CD$ ，则向量 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角和向量 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 的夹角相等，不妨设为 θ . 由 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ 可知， $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 0$ ，整理得 $16 - 20 \cos \theta + 8 \cos \theta - 10 = 0$ ，解之得 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore \theta = 60^\circ$ ，即 $\angle DAB = 60^\circ$ ，

过点 D 向 AB 作垂线垂足为 O ，建立如图所示直角坐标系，



则 $A(-2, 0)$ ， $B(3, 0)$ ， $D(0, 2\sqrt{3})$ ， $C(2, 2\sqrt{3})$ ，则 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC} = (-\lambda, 2\sqrt{3}\lambda)$ ，

$\therefore E(3 - \lambda, 2\sqrt{3}\lambda)$ ，

所以 $\overrightarrow{AE} = (5 - \lambda, 2\sqrt{3}\lambda)$ ， $\overrightarrow{DE} = (3 - \lambda, 2\sqrt{3}(\lambda - 1))$ ，

$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{DE} = (5 - \lambda)(3 - \lambda) + 12\lambda(\lambda - 1) = 13\lambda^2 - 20\lambda + 15$ ，

又知 $0 \leq \lambda \leq 1$ ，当 $\lambda = \frac{10}{13}$ 时，取得最小值 $\frac{95}{13}$ 。

故选B.

二、填空题 (本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10 2020年天津和平区高三三模第10题5分

(5分) 若复数 $2 + i = (1 + i)(a + bi)$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 其中 i 是虚数单位, 则 $b =$ _____.

答案 $-\frac{1}{2}$

解析 由 $2 + i = (1 + i)(a + bi)$,

$$\begin{aligned} \text{得 } a + bi &= \frac{2 + i}{1 + i} \\ &= \frac{(2 + i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i, \\ \therefore \text{虚部 } b &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

11 2020年天津和平区高三二模第11题5分

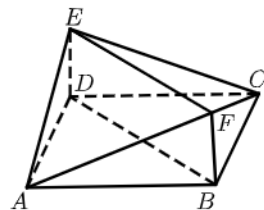
(5分) $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中, $\frac{1}{x^2}$ 项的系数为 _____.

答案 240

解析 $T_{r+1} = C_6^r (2\sqrt{x})^{6-r} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^r,$
 $= C_6^r 2^{6-r} (-1)^r x^{3-\frac{5}{2}r},$
 令 $3 - \frac{5}{2}r = -2$, 得 $r = 2$,
 $\therefore T_3 = C_6^2 2^4 (-1)^2 x^{-2},$
 $= 240x^{-2}.$
 即 $\frac{1}{x^2}$ 的系数为 240.

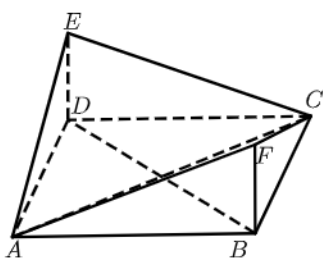
12 2020~2021学年天津南开区高三上学期期末第13题5分

(5分) 已知如图所示的多面体 $EF-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 四边形 $BDEF$ 是矩形, $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, 若 $BF = BD = 2$, 则多面体的体积 _____ .



答案 $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

解析 如图, 连接 AC ,



$AC \cap BD = O$,

因为四边形 $ABCD$ 是菱形,

所以 $AC \perp BD$,

又因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $ED \perp AC$,

因为 $ED, BD \subset$ 平面 $BDEF$, 且 $ED \cap BD = D$,

所以 $AC \perp$ 平面 $BDEF$,

所以 AO 为四棱锥 $ABDEF$ 的高,

因为四边形 $ABCD$ 是菱形, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$,

所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形.

又因为 $BF = BD = 2$,

所以 $AD = 2$, $AO = \sqrt{3}$, $S_{\text{四边形}BDEF} = 4$,

所以 $V_{\text{四棱锥}ABDEF} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$,

即多面体的体积为 $\frac{8}{3}\sqrt{3}$,

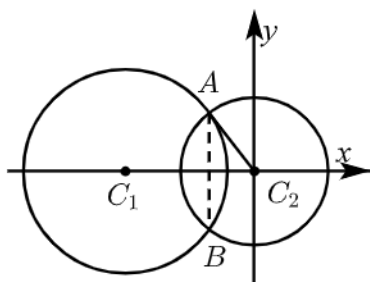
故答案为: $\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

13 2020年天津南开区天津中学高三下学期高考模拟（3月）第11题

（5分）若圆 $C_1: (x+a)^2 + y^2 = 8+a^2$ ($a > 0$)与圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4$ 的公共弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ ，则圆 C_2 上位于 AB 右方的点到 AB 的最长距离为 _____ .

答案 3

解析 圆 $C_1: (x+a)^2 + y^2 = 8+a^2$ ($a > 0$)的圆心为 $C_1(-a, 0)$ ，半径为 $r_1 = \sqrt{8+a^2}$ ，
圆 $C_2: x^2 + y^2 = 4$ 的圆心为 $C_2(0, 0)$ ，半径为 $r_2 = 2$ ，
且公共弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$ ，如图所示：



则圆 C_2 上位于 AB 右方的点到 AB 的最长距离为 $r_2 + \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2 + \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$.

14 2020年天津高三上学期高考模拟第14题5分

（5分）已知 $a > 0$ ， $b > 0$ ，则 $\frac{a^2 + 4b^2 + a^3b^3}{a^2b^2}$ 的最小值为 _____ .

答案 4

解析 $\because a > 0, b > 0$ ，
 $\therefore \frac{a^2 + 4b^2 + a^3b^3}{a^2b^2}$
 $= \frac{1}{b^2} + \frac{4}{a^2} + ab \geq 2\sqrt{\frac{4}{a^2b^2}} + ab$
 $= \frac{4}{ab} + ab \geq 2\sqrt{\frac{4}{ab} \cdot ab}$
 $= 4$ ，
当且仅当 $\begin{cases} \frac{1}{b^2} = \frac{4}{a^2} \\ \frac{4}{ab} = ab \end{cases}$ ，
即 $\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$ 时，等号成立，

故 $\frac{a^2 + 4b^2 + a^3b^3}{a^2b^2}$ 的最小值为 4 .

15 2020~2021学年天津河西区高三上学期期末第15题5分

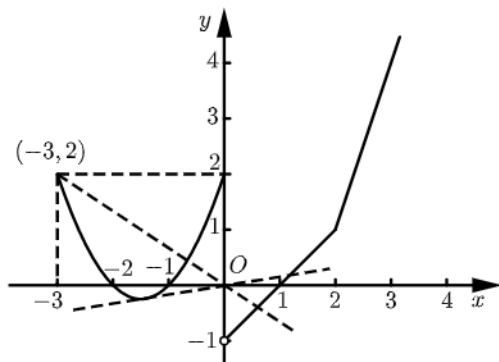
(5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & -3 \leq x \leq 0 \\ 2x - 3, & x > 0 \end{cases}$, 若方程 $f(x) + |x - 2| - kx = 0$ 有且只有三个不相等的实数解, 则实数 k 的取值范围是 _____ .

答案 $\left[-\frac{2}{3}, 3 - 2\sqrt{2}\right)$

解析 $f(x) + |x - 2| - kx = 0$ 有且只有三个不相等的实数根,

等价于 $y = f(x) + |x - 2|$ 与 $y = kx$ 的图象有且只有三个交点,

画出 $y = f(x) + |x - 2| = \begin{cases} x^2 + 3x + 2, & -3 \leq x \leq 0 \\ x - 1, & 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5, & x > 2 \end{cases}$ 与 $y = kx$ 的图象如图所示,



当直线 $y = kx$ 与抛物线 $y = x^2 + 3x + 2$ 相切时, $k = 3 - 2\sqrt{2}$;

当直线 $y = kx$ 过点 $(-3, 2)$ 时, $k = -\frac{2}{3}$,

∴ 根据图象可知 $-\frac{2}{3} \leq k < 3 - 2\sqrt{2}$ 时, 两函数图象有且只有三个交点,

∴ 若方程 $f(x) + |x - 2| - kx = 0$ 有且只有三个不相等的实数根,

则实数 k 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{3}, 3 - 2\sqrt{2}\right)$.

三、解答题 (本大题共5小题, 共75分)

16 2020年天津河西区高三二模第16题14分

(14分) 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2} (x \in \mathbf{R})$,

(1) (6分) 求 $f(x)$ 的最小正周期.

(2) (8分) 讨论 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上的单调性.

答案

(1) π .

(2) $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增;
在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递减.

解析

(1) 依题意, $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x - \frac{1}{2}$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2}$$

$$= \sin(2x + \frac{\pi}{6}),$$

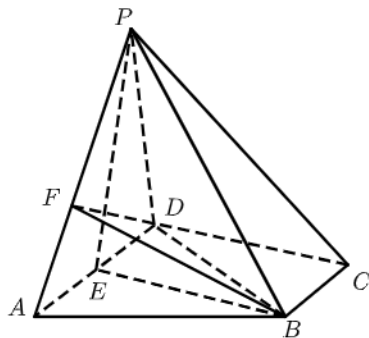
 所以 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \pi$.

(2) 依题意, 令 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,
 解得 $-\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi$,
 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi], k \in \mathbf{Z}$,
 设 $A = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $B = [-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi]$,
 易知 $A \cap B = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$,
 所以当 $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 时, $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增;
 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递减.

17

2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末(七校联考)第17题15分

(15分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $AD \parallel BC$, $BC = \frac{1}{2}AD = 1$ 且
 $CD = \sqrt{3}$, E 为 AD 的中点, F 是棱 PA 的中点, $PA = 2$, $PE \perp$ 底面 $ABCD$, $AD \perp CD$.



(1) (5分) 证明: $BF \parallel$ 平面 PCD .

(2) (4分) 求二面角 $P-BD-F$ 的正弦值.

(3) (6分)

在线段 PC (不含端点) 上是否存在一点 M , 使得直线 BM 和平面 BDF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$? 若存在, 求此时 PM 的长, 若不存在, 说明理由.

答案

- (1) 证明见解析.
 (2) $\frac{4\sqrt{65}}{65}$.
 (3) 存在, $\frac{\sqrt{7}}{3}$.

解析

- (1) 方法一: 取 PD 的中点为 H ,

连接 FH, HC ,

因为 F 为 PA 的中点,

所以 $FH \parallel \frac{1}{2}AD$,

又因为 $BC \parallel \frac{1}{2}AD$,

所以 $BC \parallel FH$, 所以四边形 $BCHF$ 为平行四边形,

所以 $BF \parallel HC$,

又因为 $HC \subset$ 平面 PCD , $BF \not\subset$ 平面 PCD ,

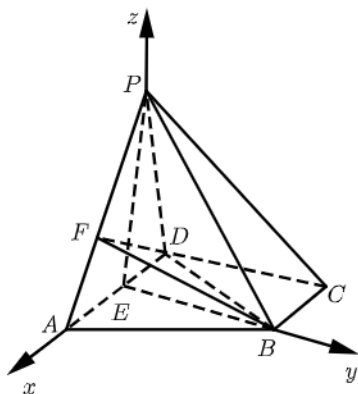
所以 $BF \parallel$ 平面 PCD .

方法二: 由题意得: $BC \parallel DE$, $\angle ADC = 90^\circ$,

所以四边形 $BCDE$ 为矩形,

又 $PE \perp$ 面 $ABCD$,

如图建立空间直角坐标系 $E-xyz$,



则 $E(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,\sqrt{3},0)$, $D(-1,0,0)$, $P(0,0,\sqrt{3})$,

$C(-1,\sqrt{3},0)$, $F(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$,

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m} = (x,y,z)$, $\vec{DC} = (0,\sqrt{3},0)$, $\vec{DP} = (1,0,\sqrt{3})$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{DC} \cdot \vec{m} = \sqrt{3}y = 0 \\ \overrightarrow{DP} \cdot \vec{m} = x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases},$$

$$\text{则 } y = 0,$$

$$\text{不妨设 } x = -\sqrt{3}, \text{ 则 } z = 1,$$

$$\text{可得 } \vec{m} = (-\sqrt{3}, 0, 1),$$

$$\text{又 } \overrightarrow{BF} = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\text{可得 } \overrightarrow{BF} \cdot \vec{m} = 0,$$

又因为直线 $BF \not\subset$ 平面 BCD , 所以 $BF \parallel$ 平面 BCD .

$$(2) \text{ 设平面 } PBD \text{ 的法向量为 } \vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{DB} = (1, \sqrt{3}, 0),$$

$$\overrightarrow{BP} = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \vec{n}_1 = 0 \\ \overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}_1 = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0 \\ -\sqrt{3}y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases},$$

$$\text{不妨设 } x = \sqrt{3},$$

$$\text{可得 } \vec{n}_1 = (\sqrt{3}, -1, -1),$$

$$\text{设平面 } BDF \text{ 的法向量为 } \vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2), \overrightarrow{DF} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \overrightarrow{DF} \cdot \vec{n}_2 = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x_2 + \sqrt{3}y_2 = 0 \\ \frac{3}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{不妨设 } x_2 = \sqrt{3},$$

$$\text{可得 } \vec{n}_2 = (-\sqrt{3}, 1, 3),$$

$$\text{因此有 } \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{7\sqrt{65}}{65},$$

$$\text{于是 } \sin \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle} = \frac{4\sqrt{65}}{65},$$

$$\text{所以二面角 } P-BD-F \text{ 的正弦值为 } \frac{4\sqrt{65}}{65}.$$

$$(3) \text{ 设 } \overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PC} = \lambda(-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) = (-\lambda, \sqrt{3}\lambda, -\sqrt{3}\lambda),$$

$$\lambda \in (0, 1),$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PM} = (-\lambda, -\sqrt{3} + \sqrt{3}\lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda),$$

$$\text{由 (2) 可知平面 } BDF \text{ 的法向量为 } \vec{n}_2 = (-\sqrt{3}, 1, 3), \left| \cos \langle \overrightarrow{BM}, \vec{n}_2 \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BM} \cdot \vec{n}_2|}{|\overrightarrow{BM}| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|\sqrt{3}\lambda + \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{\lambda^2 + 2(\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{39}}{13},$$

$$\text{有 } 3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0, \text{ 解得 } \lambda = 1 \text{ (舍) 或 } \lambda = \frac{1}{3},$$

$$\text{可得 } \overrightarrow{PM} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\text{所以 } |\overrightarrow{PM}| = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

18 2020年天津河西区高三二模第19题15分

(15分) 如图, 已知中心在原点, 焦点在 x 轴上的椭圆的一个焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$, $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 是椭圆上的一点.

(1) (5分) 求椭圆的标准方程.

(2) (10分) 设椭圆的上、下顶点分别为 A 、 B , $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq 0$)是椭圆上异于 A 、 B 的任意一点, $PQ \perp y$ 轴, Q 为垂足, M 为线段 PQ 的中点, 直线 AM 交直线 $l: y = -1$ 于点 C , N 为线段 BC 的中点.

① (5分) 求证: $OM \perp MN$.

② (5分) 若 $\triangle MON$ 的面积为 $\frac{3}{2}$, 求 y_0 的值.

答案

(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ① 证明见解析.

② $\frac{4}{5}$.

解析

(1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$),

由题意, 得 $c = \sqrt{3}$ 因为 $a^2 - c^2 = b^2$, 所以 $a^2 - 3 = b^2$.

又 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 是椭圆上的一个点, 所以 $\frac{1}{a^2} + \frac{\frac{3}{4}}{a^2 - 3} = 1$,

解得 $a^2 = 4$ 或 $a^2 = \frac{3}{4}$ (舍去),

所以椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) ① 因为 $P(x_0, y_0)$, ($x \neq 0$), 则 $Q(0, y_0)$, 且 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$.

因为 M 为线段 PQ 中点, 所以 $M\left(\frac{x_0}{2}, y_0\right)$,

又 $A(0, 1)$, 所以直线 AM 的方程为 $y = \frac{2(y_0 - 1)}{x_0}x + 1$,

因为 $x_0 \neq 0$,

$\therefore y_0 \neq 1$

令 $y = -1$, $C\left(\frac{x_0}{1 - y_0}, -1\right)$

又 $B(0, 1)$, N 为段 BC 的中点, 有 $N\left(\frac{x_0}{2(1-y_0)}, -1\right)$,

$$\overrightarrow{NM} = \left(\frac{x_0}{2} - \frac{x_0}{2(1-y_0)}, y_0 + 1\right),$$

因此,

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{NM} = \frac{x_0}{2} \left(\frac{x_0}{2} - \frac{x_0}{2(1-y_0)}\right) + y_0 \cdot (y_0 + 1) = \frac{x_0^2}{4} - \frac{x_0^2}{4(1-y_0)} + y_0^2 + y_0$$

$$= \left(\frac{x_0^2}{4} + y_0^2\right) - \frac{x_0^2}{4(1-y_0)} + y_0 = 1 - (1+y_0) + y_0 = 0,$$

所以 $OM \perp MN$.

② 由 (1) 知, $OM \perp MN$.

$$|OM| = \sqrt{\frac{x_0^2}{4} + y_0^2} = 1, |ON| = \sqrt{\frac{x_0^2}{4(1-y_0)^2} + 1} = \sqrt{\frac{1-y_0^2}{(1-y_0)^2} + 1} = \sqrt{\frac{2}{1-y_0}}$$

$$\text{所以在 } \text{Rt}\triangle MON \text{ 中, } |MN| = \sqrt{|ON|^2 - |OM|^2},$$

$$\text{因此 } S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2} |OM| \cdot |MN| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+y_0}{1-y_0}},$$

$$\text{从而有 } \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+y_0}{1-y_0}} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{解得 } y_0 = \frac{4}{5}.$$

19 2020年天津河西区高三二模第18题15分

(15分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3(a_n - 2)$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 0 的等差数列, 且满足 $b_1 = \frac{1}{6}a_1$, b_5 是 b_2 和 b_{14} 的等比中项.

(1) (5分) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) (4分) 求 $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i b_{i+1}}$;

(3) (6分) 设数列 $\{c_n\}$ 的通项公式 $c_n = \begin{cases} 1, & n \neq 2^k \\ a_k, & n = 2^k \end{cases}$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 求 $\sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

答案

(1) $a_n = 2 \times 3^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$); $b_n = 2n - 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(2) $\frac{10}{21}$.

(3) $\sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2 = \frac{1}{2} \times 9^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} + n + \frac{3}{2}$.

解析

(1) 因为 $2S_n = 3(a_n - 2) (n \in \mathbf{N}^*)$ ① ,

当 $n = 1$ 时 , $2S_1 = 2a_1 = 3(a_1 - 2)$,

即 $2a_1 = 3a_1 - 6$,

即 $-a_1 = -6$,

解得 $a_1 = 6$;

当 $n \geq 2$ 时 , $2S_{n-1} = 3(a_{n-1} - 2)$ ② ,

由 ① - ② 可得 $2S_n - 2S_{n-1} = 3(a_n - 2) - 3(a_{n-1} - 2)$,

即 $2a_n = 3a_n - 3a_{n-1}$,

即 $a_n = 3a_{n-1}$,

因为 $a_1 = 6 \neq 0$,

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 6 为首项, 3 为公比的等比数列 ,

所以 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 6 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$,

因为数列 $\{b_n\}$ 是公差为 0 的等差数列 ,

设公差为 d ,

则 $d \neq 0$,

又因为 $b_1 = \frac{1}{6}a_1 = \frac{1}{6} \times 6 = 1$,

即 $b_1 = 1$,

又因为 b_5 是 b_2 和 b_{14} 的等比中项 ,

所以 $b_5^2 = b_2 \cdot b_{14}$,

即 $(b_1 + 4d)^2 = (b_1 + d)(b_1 + 13d)$,

即 $(1 + 4d)^2 = (1 + d)(1 + 13d)$,

即 $1 + 16d^2 + 8d = 1 + 14d + 13d^2$,

即 $3d^2 - 6d = 0$,

即 $d(d - 2) = 0$,

解得 $d = 0$ 或 $d = 2$,

又因为公差 d 不为 0 ,

所以 $d = 2$,

所以 $b_n = b_1 + (n - 1)d = 1 + 2(n - 1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$.

综上所述 : 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \times 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$,

数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 因为 $b_n = 2n - 1$,

$$\text{所以 } \frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i b_{i+1}} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{20}{21} \\ &= \frac{10}{21}, \\ \text{所以 } \sum_{i=1}^{10} \frac{1}{b_i b_{i+1}} &= \frac{10}{21}. \end{aligned}$$

(3) 因为 $a_n = 2 \times 3^n$,

$$\text{又因为 } c_n = \begin{cases} 1, & n \neq 2^k \\ a_k, & n = 2^k \end{cases} (k \in \mathbf{N}^*),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2 &= \sum_{i=1}^n (a_i - 1)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (2 \times 3^i - 1)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (4 \times 9^i - 4 \times 3^i + 1) \\ &= 4 \sum_{i=1}^n 9^i - 4 \sum_{i=1}^n 3^i + n \\ &= 4 \times \frac{9(1-9^n)}{1-9} - 4 \times \frac{3(1-3^n)}{1-3} + n \\ &= 4 \times \frac{9-9^{n+1}}{-8} - 4 \times \frac{3-3^{n+1}}{-2} + n \\ &= \frac{1}{2} \times 9^{n+1} - \frac{9}{2} - 2 \times 3^{n+1} + 6 + n \\ &= \frac{1}{2} \times 9^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} + n + \frac{3}{2} \\ \text{所以 } \sum_{i=1}^{2^n} (c_i - 1)^2 &= \frac{1}{2} \times 9^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} + n + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

20 2018年天津高三二模理科十二校联考第20题14分

(16分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + (a-1)\ln x$, $g(x) = b - x \ln x$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

(1) (5分) 求实数 b 的值.

(2) (5分) 当 $a > 1$ 时, 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(3) (6分) 当 $a = 0$ 时, 令 $F(x) = 2f(x) + g(x) + 2\ln x + 2$, 是否存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$ 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域为 $[k(m+2), k(n+2)]$? 若存在, 求实数 k 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

答案

- (1) $b = 0$.
- (2) ① $a = 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增 ;
- ② $1 < a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $(a-1, 1)$ 递减, 在 $(0, a-1)$, $(1, +\infty)$ 递增 ;
- ③ $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $(1, a-1)$ 递减, 在 $(0, 1)$, $(a-1, +\infty)$ 递增 .
- (3) k 不存在 .

解析

- (1) $\because$ 函数 $g(x) = b - x \ln x$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$,
- $\therefore x > 0$, $g'(x) = -\ln x - 1$,
- 由 $g'(x) = -\ln x - 1 = 0$, 得 $x = \frac{1}{e}$,
- 当 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $g'(x) > 0$,
- 当 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) < 0$,
- $\therefore g(x)_{\max} = g\left(\frac{1}{e}\right) = b - \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = b + \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$,
- 解得: $b = 0$.
- (2) $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$,
- $f'(x) = x - a + \frac{a-1}{x} = \frac{(x-1)(x+1-a)}{x}$,
- ① $a-1 = 1$ 即 $a = 2$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 递增 ;
- ② 若 $a-1 < 1$, 而 $a > 1$, 故 $1 < a < 2$,
- 则当 $x \in (a-1, 1)$ 时, $f'(x) < 0$,
- $x \in (0, a-1)$, $(1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,
- 故 $f(x)$ 在 $(a-1, 1)$ 递减, 在 $(0, a-1)$, $(1, +\infty)$ 递增 ;
- ③ 若 $a-1 > 1$, 即 $a > 2$ 时, 同理 $f(x)$ 在 $(1, a-1)$ 递减, 在 $(0, 1)$, $(a-1, +\infty)$ 递增 .
- (3) 由 (1) 知 $F(x) = x^2 - x \ln x + 2$,
- 故 $F'(x) = 2x - \ln x - 1$, 令 $\omega(x) = F'(x) = 2x - \ln x - 1$,
- 则 $\omega'(x) = 2 - \frac{1}{x} > 0$ 对 $\forall x \in (1, +\infty)$ 恒成立 ,
- 故 $F'(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内递增 ;
- 故 $F'(x) > F'(1) = 1 > 0$ 恒成立 ,
- 故函数 $F(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 递增 ,
- 假设存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$, 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域是 $[k(m+2), k(n+2)]$,

$$\text{则} \begin{cases} F(m) = m^2 - m \ln m + 2 = k(m+2) \\ F(n) = n^2 - n \ln n + 2 = k(n+2) \end{cases},$$

问题转化为关于 x 的方程 $x^2 - x \ln x + 2 = k(x+2)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内是否存在两个不相等的实根,

即方程 $k = \frac{x^2 - x \ln x + 2}{x+2}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内是否存在两个不相等的实根,

$$\text{令 } h(x) = \frac{x^2 - x \ln x + 2}{x+2}, x \in (1, +\infty), \text{ 则 } h'(x) = \frac{x^2 + 3x - 4 - 2 \ln x}{(x+2)^2},$$

$$\text{令 } p(x) = x^2 + 3x - 4 - 2 \ln x,$$

$$\text{则 } p'(x) = 2x + 3 - \frac{2}{x} = \frac{(2x-1)(x+2)}{x} > 0, \text{ 对 } \forall x \in (1, +\infty) \text{ 恒成立},$$

故函数 $p(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 递增,

故 $p(x) > p(1) = 0$ 恒成立, 故 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 递增,

故方程 $k = \frac{x^2 - x \ln x + 2}{x+2}$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内不存在两个不相等的实根,

综上, 不存在区间 $[m, n] \subseteq (1, +\infty)$, 使得函数 $F(x)$ 在区间 $[m, n]$ 上的值域是

$$[k(m+2), k(n+2)].$$