

07自测模拟卷

一、选择题（本大题共9小题，每小题5分，共45分）

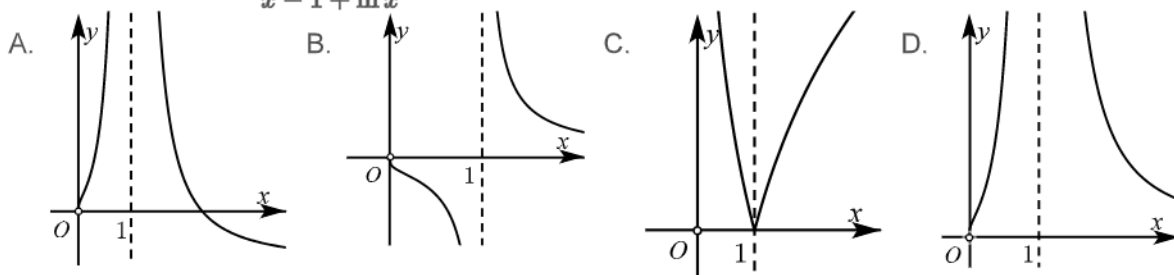
1 (5分) 已知全集 $U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ，集合 $A = \{-2, 0, 1, 2\}$ ， $B = \{-1, 0, 1\}$ ，则集合 $A \cap \complement_U B =$ () .

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{-2, 2\}$ C. $\{-2, -1\}$ D. $\{-2, 0, 2\}$

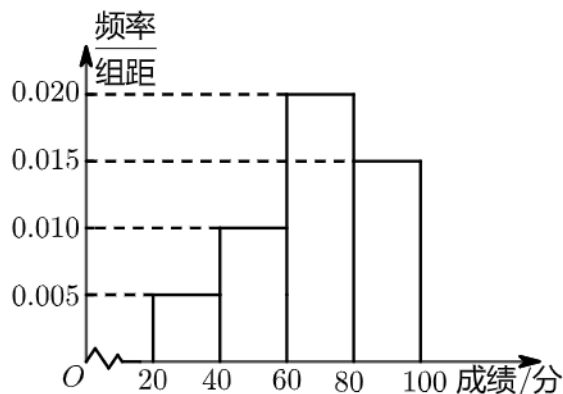
2 (5分) 设 $x \in \mathbf{R}$ ，则“ $x^3 < 1$ ”是“ $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ ”的 () .

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

3 (5分) 函数 $f(x) = \frac{2}{x-1+\ln x}$ 的图象大致为 () .



4 (5分) 某学校组织学生参加英语测试，成绩的频率分布直方图如图，数据分组依次为 $[20, 40)$ ， $[40, 60)$ ， $[60, 80)$ ， $[80, 100]$ ，若低于60分的人数是15人，则该班的学生人数是 () .



- A. 45 B. 50 C. 55 D. 60

5 (5分) 设 $a = 2^{\ln 2}$, $b = -\log_{\frac{1}{2}} 4$, $c = \log_3 2$, 则 a, b, c 的大小关系是 () .

- A. $b > a > c$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $a > c > b$

6 (5分) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 三棱锥 $A - B_1CD_1$ 的表面积为 $4\sqrt{3}$, 则正方体外接球的体积为 () .

- A. $4\sqrt{3}\pi$ B. $\sqrt{6}\pi$ C. $32\sqrt{3}\pi$ D. $8\sqrt{6}\pi$

7 (5分) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 和直线 $l: \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, 若过双曲线 C 的左焦点和点 $(0, -b)$ 的直线与直线 l 平行, 则双曲线 C 的离心率为 () .

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 5

8 (5分) 已知函数 $f(x) = 1 + \cos 2x - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 其中 $x \in \mathbf{R}$, 则下列结论中正确的是 () .

- A. $f(x)$ 是最小正周期为 x 的偶函数
B. $f(x)$ 的条对称轴是 $x = \frac{\pi}{3}$
C. $f(x)$ 的最大值为 2
D. 将函数 $y = \sqrt{3}\sin 2x$ 的图象左移 $\frac{\pi}{6}$ 得到函数 $f(x)$ 的图象

9 (5分) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |x-1|-1, & x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}f(x-2), & x > 2 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = x \cdot f(x) - a$ ($a \geq -1$) 的零点个数为 2, 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $\frac{2}{3} < a < \frac{8}{7}$ 或 $a = -1$ B. $\frac{2}{3} < a < \frac{8}{7}$
C. $\frac{7}{8} < a < \frac{3}{2}$ 或 $a = -1$ D. $\frac{7}{8} < a < \frac{3}{2}$

二、填空题（本大题共6小题，每小题5分，共30分）

10 (5分) 已知复数 $z = \frac{5i}{2-i} + 5i$ ，则 $|z| =$ _____ .

11 (5分) 在 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中的常数项是 _____ .

12 (5分) 已知直线 $l: y = x + m$ 被圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$ 截得的弦长等于该圆的半径，则实数 $m =$ _____ .

13 (5分) 在某地区某高传染性病毒流行期间，为了建立指标显示疫情已受控制，以便向该地区居民显示可以过正常生活，有公共卫生专家建议的指标是“连续7天每天新增感染人数不超过5人”，根据连续7天的新增病例数计算，下列各个选项中，一定符合上述指标的是 _____ .

- ①平均数 $\bar{x} \leq 3$;
- ②标准差 $S \leq 2$;
- ③平均数 $\bar{x} \leq 3$ 且标准差 $S \leq 2$;
- ④平均数 $\bar{x} \leq 3$ 且极差小于或等于2 ;
- ⑤众数等于1且极差小于或等于4 .

14 (5分) 已知 $a > 0, b > 0$ ，且 $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{3}$ ，则 $a + 2b$ 的最小值为 _____ .

15 (5分) 已知菱形 $ABCD$ 的边长为3，对角线 AC 与 BD 相交于 O 点， $|\vec{AC}| = 2\sqrt{3}$ ， E 为 BC 边（包含端点）上一点，则 $|\vec{EA}|$ 的取值范围是 _____， $\vec{EA} \cdot \vec{ED}$ 的最小值为 _____ .

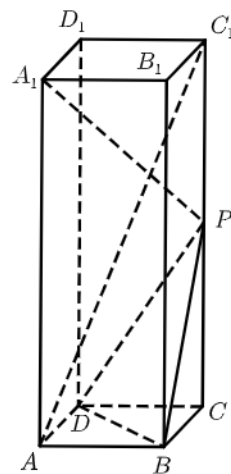
三、解答题（本大题共5小题，共75分）

16 (14分) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $2\sin B \sin\left(C + \frac{\pi}{6}\right) = \sin A$.

(1) (6分) 求角 B 的大小 .

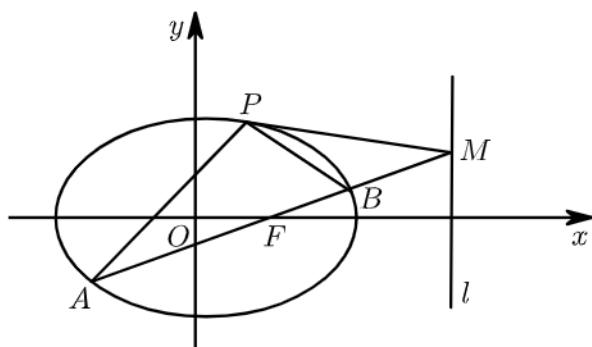
(2) (8分) 若 $AB = 4$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 $\sin 2A$ 的值 .

- 17 (15分) 如图, 四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是正方形, 点 P 为侧棱 CC_1 上的一点, 且 $AA_1 = 3AB = 3$.



- (1) (5分) 若点 P 为 CC_1 的中点, 求证: $AC_1 \parallel$ 平面 PBD .
- (2) (4分) 若 $\frac{PC}{CC_1} = \frac{1}{3}$, 求直线 A_1P 与平面 PBD 所成角的正弦值.
- (3) (6分) 若二面角 $B - PD - C$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$, 求 PC 的长.

- 18 (15分) 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.



- (1) (5分) 求椭圆 C 的方程;
- (2) (10分) AB 是经过右焦点 F 的任一弦(不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 . 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$. 若存在求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

19 (15分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_3 - a_2 = 10$, $a_1 a_2 a_3 = 125$.

(1) (5分) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(2) (10分) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, 且 $b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_n}{n} = b_{n+1} - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

① (4分) 求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

② (6分) 求 $\sum_{i=1}^n a_i b_{2i-1}$.

20 (16分) 设函数 $f(x) = ax - 2 - \ln x (a \in \mathbf{R})$.

- (1) (5分) 若 $f(x)$ 在点 $(e, f(e))$ 处的切线为 $x - ey + b = 0$, 求 a, b 的值 .
- (2) (5分) 求 $f(x)$ 的单调区间 .
- (3) (6分) 若 $g(x) = ax - e^x$, 求证 : 在 $x > 0$ 时 , $f(x) > g(x)$.