

05曲线性质选填+椭圆解答专项复习练习题

1. 直线与圆的位置关系

1 2020年天津高三二模十二重点中学毕业班联考(二)第11题5分

过点 $(1, 0)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 交圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 于 A, B 两点, 则弦 AB 的长为 _____ .

答案 $2\sqrt{2}$

解析 直线 l 过点 $(1, 0)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 则直线 $l: x - y - 1 = 0$,

联立: $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \end{cases}$, 可得:

$(x-1)^2 + (x-3)^2 = 4$, 得 $x^2 - 4x + 3 = 0$,

则有: $x_1 = 3, x_2 = 1$,

$\therefore |AB| = |x_1 - x_2| \times \sqrt{1^2 + 1} = 2\sqrt{2}$.

故答案为: $2\sqrt{2}$.

2 2020~2021学年天津和平区高三上学期期末第12题5分

已知圆 C 的圆心在 x 轴的正半轴上, 且圆心到直线 $2x - y = 0$ 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 若点 $M(0, \sqrt{3})$ 在圆 C 上, 则圆 C 的方程为 _____ .

答案 $(x-1)^2 + y^2 = 4$

解析 设圆方程为 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ ($a > 0$),

圆心 $(a, 0)$ 到 $2x - y = 0$ 的距离 $d = \frac{|2a|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

得 $a = 1$,

又 $\because (0, \sqrt{3})$ 在圆上,

$\therefore (0-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = r^2 = 4$,

$\therefore$ 圆的方程为: $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

3 2020年天津河北区高三二模第11题5分

圆心在直线 $3x - y = 0$ 上，与 x 轴相切，且被直线 $x - y = 0$ 截得的弦长为 $2\sqrt{7}$ 的圆的方程为_____.

答案 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$ 或 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$

解析 设圆心横坐标为 b ,

又 $\because$ 圆心在直线 $3x - y = 0$ 上，与 x 轴相切，

$\therefore$ 圆心为 $(b, 3b)$ ，半径 $r = |3b|$ ，

设圆心到直线 $x - y = 0$ 的距离为 d ，

$$\text{则 } d = \frac{|3b - b|}{\sqrt{2}} = |\sqrt{2}b|,$$

又 $\because$ 圆被直线 $x - y = 0$ 截得弦长为 $2\sqrt{7}$ ，

$\therefore$ 有 $(\sqrt{7})^2 = r^2 - d^2$ ，即 $9b^2 - 2b^2 = 7$ ，

解得 $b = \pm 1$ ，

$\therefore$ 圆方程为 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$ 或 $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 9$.

4 设直线 $y = x + 2a$ 与圆 $x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 相交于 A, B 两点，若 $|AB| = 2\sqrt{3}$ ，则 $a =$ _____ .

答案 $\pm\sqrt{2}$

解析 $x^2 + y^2 - 2ay - 2 = 0$ 可化为 $x^2 + (y-a)^2 = 2 + a^2$ ，

由题意可知，圆心 $(0, a)$ 到直线 $x - y + 2a = 0$ 的距离 $d = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$ ，

由直线与圆相交的性质可知， $AB = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{a^2 + 2 - \frac{1}{2}a^2} = 2\sqrt{3}$ ，

解可得 $a = \pm\sqrt{2}$.

故答案为： $\pm\sqrt{2}$.

2. 圆锥曲线选填

5 2020~2021学年天津河北区高三上学期期末第6题5分

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(3, 4)$ ，且双曲线的一个焦点与抛物线 $y^2 = 20x$ 的焦点重合，则双曲线的方程为（ ）.

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$

D. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

答案 A

解析 抛物线 $y^2 = 20x$ 的焦点为 $(5, 0)$ ，

则双曲线的焦点在 x 轴上，

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(3, 4)$ ，可得 $3b = 4a$ ，

由题意双曲线的一个焦点与抛物线 $y^2 = 20x$ 的焦点重合，可得 $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$ ，

解得 $a = 3$ ， $b = 4$ ，

则双曲线的方程为： $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

故选A .

6 2020年天津高三二模十二重点中学毕业班联考（二）第5题5分

抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点到双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的一条渐近线的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则双曲线的实轴长是（ ）.

A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{3}$

C. 1

D. 2

答案 D

解析 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $(1, 0)$ 到双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的渐近线 $x \pm ay = 0$ 的距离是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

可得： $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，可得 $a^2 = 1$ ，所以 $a = 1$ ，

∴双曲线的实轴长 $2a = 2$.

故选：D .

7 2020年天津河西区高三二模第4题5分

已知双曲线的一个焦点与抛物线 $x^2 = 20y$ 的焦点重合，且双曲线上的一点 P 到双曲线的两个焦点的距离之差的绝对值等于6，则该双曲线的标准方程为（ ）.

A. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

B. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

C. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

D. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

答案 C

解析

$\because$ 抛物线标准方程 $x^2 = 20y$,

则焦点坐标为 $(0, 5)$, 即 $c = 5$, $c^2 = 25$,

又根据双曲线定义可得 $2a = 6$, 即 $a^2 = 9$,

$$\because c^2 = a^2 + b^2,$$

$$\therefore b^2 = 16,$$

$$\text{故双曲线方程为 } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

故选C.

8 2020年天津河西区天津市第四中学高三下学期高考模拟(4月)第4题5分

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合，且双曲线的离心率等于 $\sqrt{5}$ ，则该双曲线的实轴长为（ ）.

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

D. 1

答案 C

解析

由题意，抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为 $(1, 0)$

$\because$ 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的一个焦点与抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点重合，

$$\therefore c = 1,$$

$\because$ 双曲线的离心率为 $\sqrt{5}$,

$$\therefore \frac{c}{a} = \sqrt{5},$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{故实轴长 } 2a = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

故选C.

9 2020年天津和平区天津市耀华中学高三二模第3题5分

已知双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的右焦点与抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点重合, 则该抛物线的准线被双曲线所截得的线段长度为 ().

A. $\frac{7}{3}$

B. $\frac{14}{3}$

C. $\frac{5}{2}$

D. 5

答案 B

解析 由题知, 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 的右焦点坐标为 $(4, 0)$,

所以抛物线的准线为 $x = -4$,

代入双曲线方程解得 $y = \pm \frac{7}{3}$,

所以抛物线的准线被双曲线所截得的线段长度为 $\frac{14}{3}$.

直线与圆锥曲线的位置关系

10 已知抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 准线为 l , 直线 $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right)$ 交抛物线于 A, B 两点, 过点 A 作准线 l 的垂线, 垂足为 E , 若等边 $\triangle AFE$ 的面积为 $36\sqrt{3}$, 则 $\triangle BEF$ 的面积为 ().

A. $6\sqrt{3}$

B. $12\sqrt{3}$

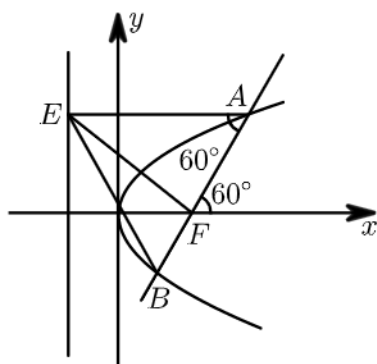
C. 16

D. $24\sqrt{3}$

答案 B

解析 因为 $\triangle AEF$ 为等边三角形, 故 $k = \sqrt{3}$, $\triangle AEF$ 边长为 $2p$,

$$\text{由 } \frac{1}{2} \times 2p \times 2p \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}, \text{ 得 } p = 6,$$



抛物线方程为 $y^2 = 12x$ ，联立 $\begin{cases} y = \sqrt{3}(x-3) \\ y^2 = 12x \end{cases}$ ，

得 $x^2 - 10x + 9 = 0$ ，

故 $x_A = 9$ ， $x_B = 1$ ，

所以 $|BF| = x_B + \frac{p}{2} = 1 + \frac{6}{2} = 4$ ，

故 $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \times 4 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$ 。

故选B。

11 2020年天津南开区高三二模第6题5分

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，以双曲线 C 的右焦点 F 为圆心， a 为半径作圆 F ，圆 F 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M 、 N 两点，则 $\angle MFN =$ ()。

A. 45°

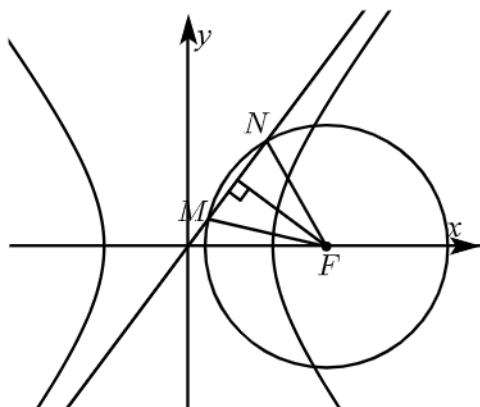
B. 60°

C. 90°

D. 120°

答案 C

解析



$$\cos \angle FMN = \frac{b}{a},$$

$\because$ 双曲线的离心率 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

$$\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \cos \angle FMN = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{又} \because \angle FMN = \angle FNM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MFN = 90^\circ.$$

故选C.

- 12 抛物线 $C_1: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 是双曲线 $C_2: \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{1-m} = 1 (0 < m < 1)$ 的右焦点, P 是 C_1 与 C_2 的交点, 点 Q 在 C_1 的准线上, $\triangle FPQ$ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形, 则 C_2 的离心率为 ().

A. $\sqrt{2} + 1$

B. $2\sqrt{2} + 3$

C. $2\sqrt{10} - 3$

D. $2\sqrt{10} + 3$

答案 A

解析 设 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $P\left(\frac{p}{2}, y_0\right)$, $Q\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$,

$$PF = PQ,$$

$$\text{即 } y_0 = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p,$$

$$\therefore P\left(\frac{p}{2}, p\right),$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{m + 1 - m}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m}},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = m + 1 - m = 1,$$

$$\therefore c = 1,$$

$$\therefore F(1, 0), \frac{p}{2} = 1, p = 2,$$

$$\therefore P(1, 2),$$

$$\frac{1}{m} - \frac{4}{1-m} = 1,$$

$$\text{解得: } m = 3 \pm 2\sqrt{2},$$

$$\therefore m \in (0, 1),$$

$$\therefore m = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2,$$

$$\therefore e = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1.$$

3. 椭圆解答

直线方程求解

13 2019~2020学年10月天津和平区天津市耀华中学高三上学期月考第19题15分

设椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左顶点为 A , 左焦点到左顶点的距离为1, 离心率为 $\frac{1}{2}$.

- (1) 求椭圆 M 的方程.
- (2) 过点 A 作斜率为 k 的直线与椭圆 M 交于另一点 B , 连接 BF_2 并延长交椭圆 M 于点 C , 若 $F_1C \perp AB$, 求 k 的值.

教法备注

难点在于最后式子的因式分解

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
- (2) $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}$.

解析

- (1) 设椭圆的左焦点 F_1 的坐标为 $(-c, 0)$,

依题意, $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, $a - c = 1$,

解得 $c = 1$, $a = 2$,

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 3,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

- (2) 由 (1) 得, $A(-2, 0)$, 直线 AB 的方程为 $y = k(x + 2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x + 2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0,$$

设点 $B(x_B, y_B)$,

$$\therefore -2x_B = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}, \text{ 即 } x_B = \frac{-8k^2 + 6}{3 + 4k^2},$$

$$\therefore y_B = k(x_B + 2) = \frac{12k}{3 + 4k^2},$$

$$\therefore B\left(\frac{-8k^2 + 6}{3 + 4k^2}, \frac{12k}{3 + 4k^2}\right).$$

$$\therefore F_1(-1, 0), F_2(1, 0),$$

$$k_{BF_2} = \frac{4k}{1-4k^2}, k_{CF_1} = -\frac{1}{k},$$

$$\therefore \text{直线 } BF_2 \text{ 方程为 } y = \frac{4k}{1-4k^2}(x-1), \text{ 直线 } CF_1 \text{ 的方程为 } y = -\frac{1}{k}(x+1),$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = \frac{4k}{1-4k^2}(x-1) \\ y = -\frac{1}{k}(x+1) \end{cases} \text{ 得 } C(8k^2-1, -8k),$$

$$\text{代入 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \text{ 得 } 192k^4 + 208k^2 - 9 = 0,$$

$$\text{即 } (24k^2-1)(8k^2+9) = 0,$$

$$\text{得 } k^2 = \frac{1}{24},$$

$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

14 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的短轴长为 $4\sqrt{2}$, 离心率为 $\frac{1}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 左、右顶点分别为 A, B , 点 M, N 为椭圆 C 上位于 x 轴上方的两点, 且 $F_1M \parallel F_2N$, 记直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $3k_1 + 2k_2 = 0$, 求直线 F_1M 的方程.

答案

(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1.$

(2) $2\sqrt{6}x - y + 2\sqrt{6} = 0.$

解析

(1) 由题意, 得 $2b = 4\sqrt{2}, \frac{c}{a} = \frac{1}{3},$

$$\text{又 } a^2 - c^2 = b^2,$$

$$\therefore a = 3, b = 2\sqrt{2}, c = 1.$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

(2) 由 (1), 可知 $A(-3, 0), B(3, 0), F_1(-1, 0).$

$$\text{由题意, 设直线 } F_1M \text{ 的方程为 } x = my - 1,$$

记直线 F_1M 与椭圆的另一交点为 M ,

$$\text{设 } M(x_1, y_1) (y_1 > 0), M(x_2, y_2),$$

$$\therefore F_1M \parallel F_1N, \text{ 根据对称性, 得 } N(-x_2, -y_2),$$

$$\text{联立 } \begin{cases} 8x^2 + 9y^2 = 72 \\ x = my - 1 \end{cases}, \text{ 消去 } x, \text{ 得 } (8m^2 + 9)y^2 - 16my - 64 = 0,$$

其判别式 $\Delta > 0$.

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{16m}{8m^2 + 9}, y_1 y_2 = -\frac{64}{8m^2 + 9} . \quad ①$$

$$\text{由 } 3k_1 + 2k_2 = 0, \text{ 得 } \frac{3y_1}{my_1 + 2} + \frac{2y_2}{my_2 + 2} = 0, \text{ 即 } 8my_1 y_2 + 6y_1 + 4y_2 = 0 . \quad ②$$

$$\text{由 } ①②, \text{ 解得 } y_1 = \frac{128m}{8m^2 + 9}, y_2 = \frac{-112m}{8m^2 + 9},$$

$$\therefore y_1 > 0,$$

$$\therefore m > 0 .$$

$$\therefore y_1 y_2 = \frac{128m \cdot (-112m)}{(8m^2 + 9)^2} = \frac{-64}{8m^2 + 9},$$

$$\therefore m = \frac{\sqrt{6}}{12} .$$

$$\therefore \text{直线 } F_1 M \text{ 的方程为 } x = \frac{\sqrt{6}}{12} y - 1, \text{ 即 } 2\sqrt{6}x - y + 2\sqrt{6} = 0 .$$

弦长公式的应用

15 2020年天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高三二模第18题15分

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为2, 且过点 $P(2, 0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程 .

(2) 设 F 为 C 的左焦点, 点 M 为直线 $x = -4$ 上任意一点, 过点 F 作 MF 的垂线交 C 于两点 A, B

① 证明: OM 平分线段 AB (其中 O 为坐标原点) .

② 当 $\frac{|MF|}{|AB|}$ 取最小值时, 求点 M 的坐标 .

教法备注

注意对勾函数的拐点

答案

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) ① 证明见解析 .

② $m = 0$ 时, $\frac{|MF|}{|AB|}$ 最小、点 M 的坐标为 $(-4, 0)$.

解析

(1) 略

(2) ① 设点 M 的坐标为 $(-4, m)$,

当 $m = 0$ 时, AB 与 x 轴垂直, F 为 AB 的中点, OM 平分 AB 显然成立,

当 $m \neq 0$, 由已知可得 : $K_{MF} = -\frac{m}{3}$,

$$\therefore K_{AB} = \frac{3}{m} ,$$

则直线 AB 的方程为 : $y = \frac{3}{m}(x+1)$,

联立消去 y 得 : $(m^2 + 12)x^2 + 24x - 4m^2 + 12 = 0$,

由韦达定理得 , AB 中点 P 的坐标为 $\left(-\frac{12}{m^2 + 12}, \frac{3m}{m^2 + 12}\right)$,

又 $\because$ 直线 $OM : y = -\frac{m}{4}x$,

$\therefore P$ 在直线 OM 上 .

综上 OM 平分线段 AB .

② 当 $m = 0$ 时 , $\frac{|MF|}{|AB|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

当 $m \neq 0$ 时 , 由 (i) 可知 $|AB| = 4\sqrt{\frac{(m^2 + 9)^2}{(m^2 + 12)^2}}$, $|MF| = \sqrt{m^2 + 9}$,

$$\frac{|MF|}{|AB|} = \frac{1}{4}\sqrt{m^2 + 9 + \frac{9}{m^2 + 9} + 6} > 1 ,$$

$$\text{又 } \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 ,$$

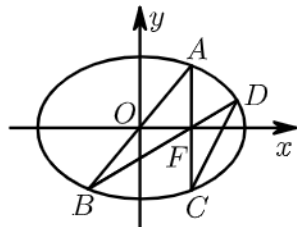
$\therefore m = 0$ 时 , $\frac{|MF|}{|AB|}$ 最小、点 M 的坐标为 $(-4, 0)$.

定值问题

16 2020年天津和平区高三二模第18题15分

如图 , 在平面直角坐标系 xOy 中 , 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

. F 为椭圆的右焦点 , A, B 为椭圆关于原点对称的两点 , 连接 AF, BF 分别交椭圆于 C, D 两点 .



(1) 求椭圆的标准方程 ;

(2) 若 $AF = FC$, 求 $\frac{BF}{FD}$ 的值 ;

(3) 设直线 AB, CD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 是否存在实数 m , 使得 $k_2 = mk_1$, 若存在 , 求出 m 的值 ; 若不存在 , 请说明理由 .

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.
 (2) $\frac{BF}{FD} = \frac{7}{3}$.
 (3) 存在 $m = \frac{5}{3}$, 使得 $k_2 = \frac{5}{3}k_1$.

解析

- (1) 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 由题意知 : $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1 \end{cases}$,

解之得 : $\begin{cases} a = 2 \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$, 所以椭圆方程为 : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

- (2) 若 $AF = FC$, 由椭圆对称性 , 知 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 所以 $B\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$,

此时直线 BF 方程为 $3x - 4y - 3 = 0$,

由 $\begin{cases} 3x - 4y - 3 = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 得 $7x^2 - 6x - 13 = 0$, 解得 $x = \frac{13}{7} (x = -1 \text{ 舍去})$,

故 $\frac{BF}{FD} = \frac{1 - (-1)}{\frac{13}{7} - 1} = \frac{7}{3}$.

- (3) 设 $A(x_0, y_0)$, 则 $B(-x_0, -y_0)$,

直线 AF 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$, 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 得

$$(15 - 6x_0)x^2 - 8y_0^2 - 15x_0^2 + 24x_0 = 0 ,$$

因为 $x = x_0$ 是该方程的一个解 , 所以 C 点的横坐标 $x_c = \frac{8 - 5x_0}{5 - 2x_0}$,

又 $C(x_c, y_c)$ 在直线 $y = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x - 1)$ 上 , 所以 $y_c = \frac{y_0}{x_0 - 1}(x_c - 1) = \frac{-3y_0}{5 - 2x_0}$,

同理 , D 点坐标为 $\left(\frac{8 + 5x_0}{5 + 2x_0}, \frac{3y_0}{5 + 2x_0}\right)$,

所以 $k_2 = \frac{\frac{3y_0}{5 + 2x_0} - \frac{-3y_0}{5 - 2x_0}}{\frac{8 + 5x_0}{5 + 2x_0} - \frac{8 - 5x_0}{5 - 2x_0}} = \frac{5y_0}{3x_0} = \frac{5}{3}k_1$,

即存在 $m = \frac{5}{3}$, 使得 $k_2 = \frac{5}{3}k_1$.

17 2020~2021 学年天津河北区高三上学期期末第19题15分

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个顶点分别为点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程 .
 (2) 点 D 为 x 轴上一点 , 过 D 作 x 轴的垂线交椭圆 C 于不同的两点 M, N , 过 D 作 AM 的垂线交 BN 于点 E . 证明 : $\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为定值 .

答案

- (1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.
 (2) 证明见解析 .

解析

(1) 因为焦点在 x 轴上, 两个顶点分别为 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$,

所以 $a = 2$,

由 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $c = \sqrt{3}$,

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 1$,

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设 $D(x_0, 0)$, $M(x_0, y_0)$, $N(x_0, -y_0)$ ($y_0 > 0$),

可得 $y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$,

直线 AM 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + 2}(x + 2)$,

因为 $DE \perp AM$, 所以 $k_{DE} = -\frac{x_0 + 2}{y_0}$,

直线 DE 的方程 $y = -\frac{x_0 + 2}{y_0}(x - x_0)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{x_0 + 2}{y_0}(x - x_0) \\ y = \frac{-y_0}{x_0 + 2}(x - 2) \end{cases},$$

整理得, $\frac{x_0 + 2}{y_0}(x - x_0) = \frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2)$,

即 $(x_0^2 - 4)(x - x_0) = y_0^2(x - 2)$,

即 $(x_0^2 - 4)(x - x_0) = \frac{4 - x_0^2}{4}(x - 2)$, 得 $x = \frac{4x_0 + 2}{5}$,

所以 $y = -\frac{x_0 + 2}{y_0} \cdot \frac{2 - x_0}{5} = -\frac{4 - y_0^2}{5y_0} = -\frac{4}{5}y_0$,

即 $E\left(\frac{4x_0 + 2}{5}, -\frac{4}{5}y_0\right)$, 则 $\frac{y_N}{y_M} = \frac{5}{4}$,

$$\text{又 } \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BDN}} = \frac{\frac{1}{2}|BD| \cdot |y_E|}{\frac{1}{2}|BD| \cdot |y_N|} = \frac{4}{5},$$

所以 $\triangle BDE$ 与 $\triangle BDN$ 的面积之比为定值 $\frac{4}{5}$.

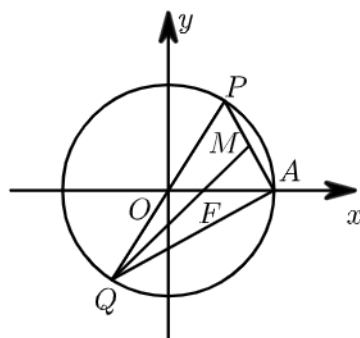


条件转化——三点共线

18

2020年天津和平区天津市耀华中学高三二模第19题16分

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点、右顶点分别为 F , A , 过原点的直线与椭圆 C 交于点 P , Q (点 P 在第一象限内), 连接 AP , FQ , 若 $AF = 2$, $\triangle OAP$ 的面积是 $\triangle OFQ$ 的面积 3 倍.



- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 已知 M 为线段 PA 的中点, 连结 QA, QM .
 - ① 求证: Q, F, M 三点共线.
 - ② 记直线 QP, QM, QA 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 若 $k_1 + k_3 = \frac{5}{2}k_2$, 求 $\triangle PQM$ 的面积.

答案

(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

(2) ① 证明见解析.

② 4.

解析

- (1) 设椭圆 C 的焦距为 $2c$.

因为 $AF = 2$, 所以 $a - c = 2$.

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\triangle OAP$ 的面积为 $\frac{1}{2}ay_0$,

过原点的直线与椭圆 C 交于点 P, Q ,

所以 $Q(-x_0, -y_0)$,

故 $\triangle OFQ$ 的面积为 $\frac{1}{2}cy_0$,

因为 $\triangle OAP$ 的面积是 $\triangle OFQ$ 面积的 3 倍,

所以 $a = 3c$.

解得 $a = 3, c = 1, b = 2\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

- (2) ① 因为 $P(x_0, y_0)$,

$$\text{所以 } M\left(\frac{x_0 + 3}{2}, \frac{y_0}{2}\right),$$

因为 $Q(-x_0, -y_0)$,

$$\text{所以 } k_{QF} = \frac{0 - (-y_0)}{1 - (-x_0)} = \frac{y_0}{x_0 + 1}, \quad k_{FM} = \frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{x_0 + 3}{2} - 1} = \frac{y_0}{x_0 + 1},$$

故 Q 、 F 、 M 三点共线 .

② 因为 $k_1 = \frac{y_0}{x_0}$, $k_2 = \frac{y_0}{x_0 + 1}$, $k_3 = \frac{y_0}{x_0 + 3}$, 且 $k_1 + k_2 = \frac{5}{2}k_3$,

所以 $\frac{y_0}{x_0} + \frac{y_0}{x_0 + 3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{y_0}{x_0 + 1}$,

化简得 $x_0^2 + 5x_0 - 6 = 0$,

解得 $x_0 = 1$ 或 $x_0 = -6$ (舍去) ,

代入 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 中 , 得 $y_0^2 = \frac{64}{9}$,

因为点 P 在第一象限内 ,

所以 $y_0 = \frac{8}{3}$, 故 $P\left(1, \frac{8}{3}\right)$,

因为 M 为线段 PA 的中点 ,

所以 $S_{\triangle PQM} = \frac{1}{2}S_{\triangle PQA}$,

因为 O 为线段 PQ 的中点

所以 $S_{\triangle POA} = \frac{1}{2}S_{\triangle PQA}$,

故 $S_{\triangle PQM} = S_{\triangle POA} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{8}{3} = 4$.