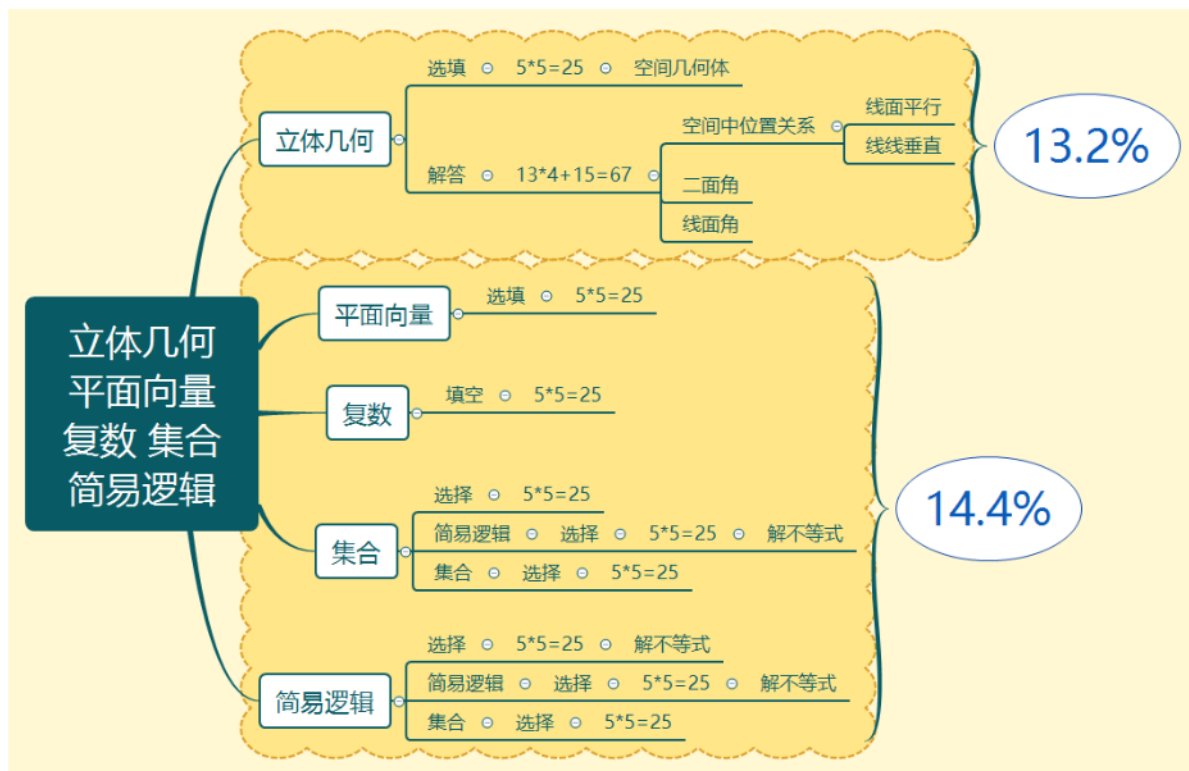


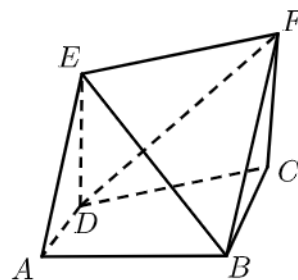
04立体几何、平面向量、复数专项复习



1. 立体几何解答

1 2018~2019学年1月天津和平区天津市耀华中学高三上学期月考理科第17题13分

如图所示，直角梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = BC = 2AD = 2$ ，四边形 $EDCF$ 为矩形， $CF = \sqrt{3}$ ，平面 $EDCF \perp$ 平面 $ABCD$ 。



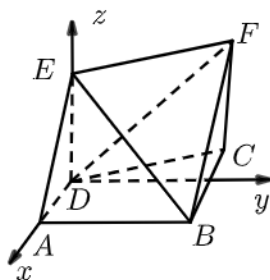
- (1) 求证： $DF \parallel$ 平面 ABE 。
- (2) 求平面 ABE 与平面 EFB 所成锐二面角的余弦值。
- (3) 在线段 DF 上是否存在点 P ，使得直线 BP 与平面 ABE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，若存在，求出线段 BP 的长，若不存在，请说明理由。

答案

- (1) 证明见解析 .
 (2) $\frac{5\sqrt{31}}{31}$.
 (3) $|\overrightarrow{BP}| = 2$.

解析

- (1) 取 D 为原点, DA 所在直线为 x 轴, DE 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示;



则 $A(1, 0, 0)$, $B(1, 2, 0)$, $E(0, 0, \sqrt{3})$, $F(-1, 2, \sqrt{3})$,

$$\overrightarrow{BE} = (-1, -2, \sqrt{3}), \overrightarrow{AB} = (0, 2, 0),$$

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\therefore \begin{cases} -x - 2y + \sqrt{3}z = 0 \\ 2y = 0 \end{cases},$$

不妨设 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1)$,

$$\text{又 } \overrightarrow{DF} = (-1, 2, \sqrt{3}),$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} \cdot \vec{n} = -\sqrt{3} + 0 + \sqrt{3} = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{DF} \perp \vec{n};$$

又 $\because DF \not\subset \text{平面} ABE$,

$\therefore DF // \text{平面} ABE$.

- (2) $\because \overrightarrow{BE} = (-1, -2, \sqrt{3}), \overrightarrow{BF} = (-2, 0, \sqrt{3})$,

设平面 BEF 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

$$\therefore \begin{cases} -x - 2y + \sqrt{3}z = 0 \\ -2x + \sqrt{3}z = 0 \end{cases},$$

则 $\vec{m} = (2\sqrt{3}, \sqrt{3}, 4)$,

$$\therefore |\cos \theta| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{10}{2 \times \sqrt{31}} = \frac{5\sqrt{31}}{31},$$

$\therefore$ 平面 ABE 与平面 EFB 所成锐二面角的余弦值是 $\frac{5\sqrt{31}}{31}$.

- (3) 设 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DF} = \lambda(-1, 2, \sqrt{3}) = (-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3}\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$;

$$\therefore P(-\lambda, 2\lambda, \sqrt{3}\lambda), \overrightarrow{BP} = (-\lambda - 1, 2\lambda - 2, \sqrt{3}\lambda),$$

又平面 ABE 的法向量为 $\vec{n} = (\sqrt{3}, 0, 1)$,

$$\begin{aligned}\therefore \sin \theta &= \left| \cos \langle \overrightarrow{BP}, \vec{n} \rangle \right| = \left| \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{BP}| \cdot |\vec{n}|} \right| \\ &= \frac{|\sqrt{3}(-\lambda - 1) + \sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{(-\lambda - 1)^2 + (2\lambda - 2)^2 + (\sqrt{3}\lambda)^2} \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{4},\end{aligned}$$

化简得 $8\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$,

解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ 或 $\lambda = \frac{1}{4}$;

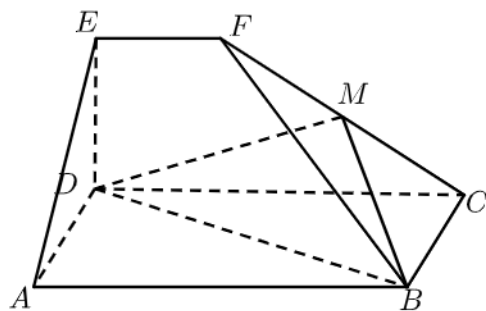
当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{BP} = \left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\therefore |\overrightarrow{BP}| = 2$;

当 $\lambda = \frac{1}{4}$ 时, $\overrightarrow{BP} = \left(-\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\therefore |\overrightarrow{BP}| = 2$;

综上, $|\overrightarrow{BP}| = 2$.

2 2020年天津南开区高三二模第17题15分

如图所示, 平面 $CDEF \perp$ 平面 $ABCD$, 且四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB = 45^\circ$, 四边形 $CDEF$ 为直角梯形, $EF \parallel DC$, $ED \perp CD$, $AB = 3EF = 3$, $ED = a$, $AD = \sqrt{2}$.



- (1) 求证: $AD \perp BF$.
- (2) 若线段 CF 上存在一点 M , 满足 $AE \parallel$ 平面 BDM , 求 $\frac{CM}{CF}$ 的值.
- (3) 若 $a = 1$, 求二面角 $D - BC - F$ 的余弦值.

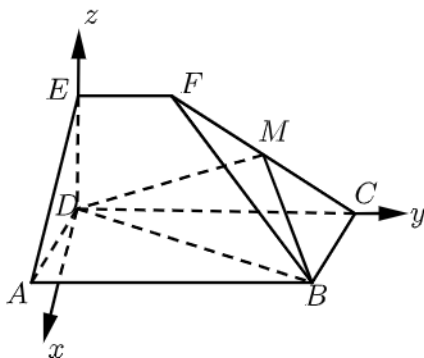
答案

- (1) 证明见解析.
- (2) $\frac{CM}{CF}$ 值为 $\frac{3}{5}$.
- (3) 二面角 $D - BC - F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

解析

- (1) $\because$ 平面 $CDEF \perp$ 平面 $ABCD$, $ED \perp CD$,
 $\therefore ED \perp$ 平面 $ABCD$.

如图,以 D 为原点, DC 所在直线为 y 轴,过点 D 垂直于 DC 的直线为 x 轴,建立空间直角坐标系 $D-xyz$,



$$\because \angle DAB = 45^\circ, AB = 3EF = 3, ED = a, AD = \sqrt{2},$$

$$\therefore A(1, -1, 0), B(1, 2, 0), C(0, 3, 0), E(0, 0, a), F(0, 1, a).$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} = (-1, -1, a), \overrightarrow{DA} = (1, -1, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DA} = (-1, -1, a) \cdot (1, -1, 0) = 0,$$

$$\therefore AD \perp BF.$$

(2) 设 $\overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CF} = \lambda(0, -2, a) = (0, -2\lambda, \lambda a),$

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = (0, 3, 0) + (0, -2\lambda, \lambda a) = (0, 3 - 2\lambda, \lambda a).$$

设平面 BDM 的法向量为 $\vec{n}_1 = (x_1, y_1, z_1),$

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DB} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (1, 2, 0) = x_1 + 2y_1 = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DM} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (0, 3 - 2\lambda, \lambda a) = (3 - 2\lambda)y_1 + \lambda a z_1 = 0 \end{cases},$$

取 $x_1 = 2$, 得 $y_1 = -1, z_1 = \frac{3 - 2\lambda}{\lambda a}$, 即 $\vec{n}_1 = \left(2, -1, \frac{3 - 2\lambda}{\lambda a}\right).$

若 $AE \parallel$ 平面 BDM , 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \vec{n}_1 = (-1, 1, a) \cdot \left(2, -1, \frac{3 - 2\lambda}{\lambda a}\right) = 0,$

即 $-2 - 1 + \frac{3 - 2\lambda}{\lambda} = 0$, 解得 $\lambda = \frac{3}{5}.$

$\therefore$ 线段 CF 上存在一点 M , 满足 $AE \parallel$ 平面 BDM , 此时 $\frac{CM}{CF} = \frac{3}{5}.$

(3) 设平面 BCF 的法向量为 $\vec{n}_2 = (x_2, y_2, z_2),$

$$\begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{CB} = (x_2, y_2, z_2) \cdot (1, -1, 0) = x_2 - y_2 = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{CF} = (x_2, y_2, z_2) \cdot (0, -2, 1) = -2y_2 + z_2 = 0 \end{cases},$$

取 $x_2 = 1$, 得 $y_2 = 1, z_2 = 2$, 即 $\vec{n}_2 = (1, 1, 2).$

又平面 BCD 的法向量为 $\vec{n}_3 = (0, 0, 1),$

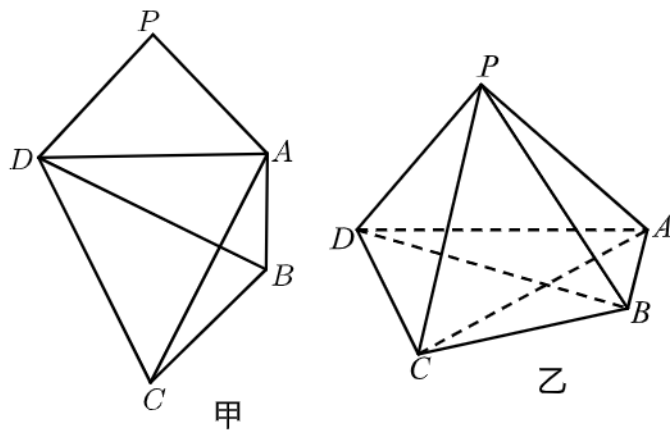
$$\therefore |\cos \langle \vec{n}_2, \vec{n}_3 \rangle| = \frac{|\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{n}_2| \cdot |\vec{n}_3|} = \frac{2}{1 \cdot \sqrt{1+1+4}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

由图形可知,二面角 $D-BC-F$ 为锐角,

$\therefore$ 二面角 $D-BC-F$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}.$

3 2020年天津和平区高三三模第17题14分

如图甲的平面五边形 $PABCD$ 中, $PD = PA$, $AC = CD = BD = \sqrt{5}$, $AB = 1$, $AD = 2$, $PD \perp PA$, 现将图甲中的 $\triangle PAD$ 沿 AD 边折起, 使平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 得图乙的四棱锥 $P-ABCD$, 在图乙中.



- (1) 求证: $PD \perp$ 平面 PAB .
- (2) 求二面角 $A-PB-C$ 的大小.
- (3) 在棱 PA 上是否存在点 M 使得 BM 与平面 PCB 所成的角的正弦值为 $\frac{1}{3}$? 并说明理由.

答案

(1) 证明见解析.

(2) $\frac{2\pi}{3}$.

(3) 存在.

解析

(1) $\because AB = 1, AD = 2, BD = \sqrt{5}$,

$$\therefore AB^2 + AD^2 = BD^2,$$

$$\therefore AB \perp AD,$$

$$\because \text{平面 } PAD \perp \text{平面 } ABCD,$$

$$\text{平面 } PAD \cap \text{平面 } ABCD = AD,$$

$$AB \subset \text{平面 } ABCD,$$

$$\therefore AB \perp \text{平面 } PAD,$$

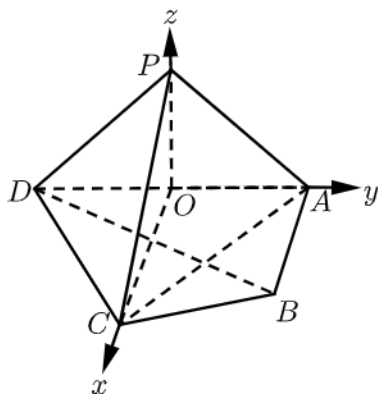
$$\text{又} \because PD \subset \text{平面 } PAD,$$

$$\therefore AB \perp PD,$$

$$\text{又} \because PD \perp PA, PA \cap AB = A,$$

$\therefore PD \perp \text{平面} PAB$.

(2) 取 AD 中点 O , 连结 OP , OC ,



由平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ 知 $PO \perp$ 平面 $ABCD$

由 $AC = CD$ 知 $OC \perp OA$,

以 O 为坐标原点, OC 所在直线为 x 轴,

OA 所在直线为 y 轴, OP 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系如图所示,

则: $C(2, 0, 0)$, $P(0, 0, 1)$, $D(0, -1, 0)$, $A(0, 1, 0)$, $B(1, 1, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{PB} = (1, 1, -1)$, $\overrightarrow{PC} = (2, 0, -1)$, $\overrightarrow{PD} = (0, -1, -1)$,

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{m} = (a, b, c)$,

$$\text{由} \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \end{cases}, \text{得} \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases},$$

令 $a = 1$, 得 $b = 1$, $c = 2$.

$\therefore \vec{m} = (1, 1, 2)$,

设二面角 $A - PB - C$ 大小为 θ ,

$$\text{则} \cos \theta = \frac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{DP}}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{DP}|} = \frac{-1 - 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$\therefore \theta \in [0, \pi]$,

$\therefore$ 二面角 $A - PB - C$ 大小为 $\frac{2\pi}{3}$.

(3) 假设 m 存在, BM 与平面 PMC 所成角为 α ,

则存在 $\lambda \in (0, 1)$, 有 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AP}$,

即 $\overrightarrow{AP} = (0, -1, 1)$,

$\overrightarrow{AM} = (0, -\lambda, \lambda)$,

$\therefore M(0, 1 - \lambda, \lambda)$,

则 $\overrightarrow{BM} = (-1, -\lambda, \lambda)$,

$$\begin{aligned} \text{从而: } \sin \alpha &= \left| \frac{\vec{m} \cdot \overrightarrow{BM}}{|\vec{m}| \cdot |\overrightarrow{BM}|} \right| \\ &= \left| \frac{-1 - \lambda + 2\lambda}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-\lambda)^2 + \lambda^2}} \right| \\ &= \frac{1}{3}, \\ \text{解得 } \lambda &= -3 + \sqrt{10} \text{ 或 } \lambda = -3 - \sqrt{10}, \\ \because \lambda &\in (0, 1), \\ \therefore \lambda &= -3 + \sqrt{10}, \\ \therefore \text{在棱 } PA &\text{ 上满足题意的点 } M \text{ 存在.} \end{aligned}$$

2. 空间几何体

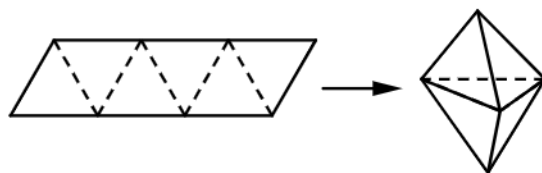


几何体体积、表面积

4

2020年天津和平区高三二模第13题5分

农历五月初五是端午节，民间有吃粽子的习惯，粽子又称粽粿，俗称“粽子”，古称“角黍”，是端午节大家都会品尝的食品，传说这是为了纪念战国时期楚国大臣、爱国主义诗人屈原如图，平行四边形形状的纸片是由六个边长为1的正三角形构成的，将它沿虚线折起来，可以得到如图所示粽子形状的六面体，则该六面体的体积为 _____；若该六面体内有一球，则该球体积的最大值为 _____。

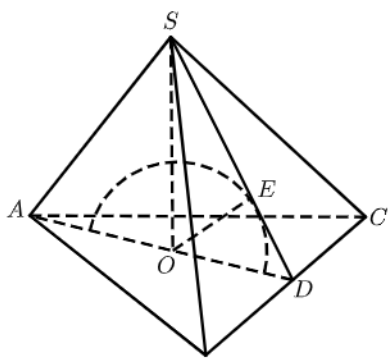


答案

$$\begin{aligned} 1: & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ 2: & \frac{8\sqrt{6}\pi}{729} \end{aligned}$$

解析

该六面体是由两个全等的正四面体组合而成，
正四面体的棱长为1，
如图，在棱长为1的正四面体 $S-ABC$ 中，



取 BC 中点 D ，连结 SD 、 AD ，

作 $SO \perp$ 平面 ABC ，垂足 O 在 AD 上，

$$\text{则 } AD = SD = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$OD = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$\therefore$ 该六面体的体积：

$$V = 2V_{S-ABC} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

当该六面体内有一球，且该球体积取最大值时，

球心为 O ，且该球与 SD 相切，

过球心 O 作 $OE \perp SD$ ，

则 OE 就是球半径，

$$\therefore SO \times OD = SD \times OE,$$

$$\therefore \text{球半径 } R = OE = \frac{SO \times OD}{SD} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{9},$$

$\therefore$ 该球体积的最大值为：

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^3 = \frac{8\sqrt{6}\pi}{729}.$$

$$\text{故答案为：} \frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{8\sqrt{6}\pi}{729}.$$

5 2020年天津河西区高三二模第6题5分

已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，其体积为 $\frac{4}{3}$ ，若圆柱的一个底面的圆周经过正方形的四个顶点，另一个底面的圆心为该棱锥的高的中点，则该圆柱的表面积为（ ）。

A. π

B. 2π

C. 4π

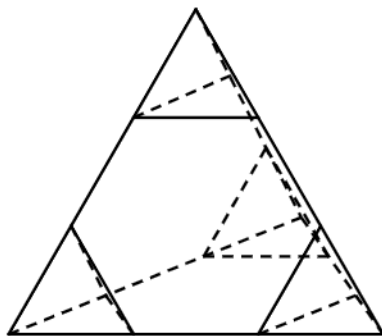
D. 6π

答案 C

解析 设正四棱锥 $P-ABCD$ 的高为 h ，则其体积 $V = \frac{1}{3} \times 2 \times h = \frac{4}{3}$ ，得 $h = 2$ ，
若圆柱的一个底面的圆周经过正方形的四个顶点，另一个底面的圆心为该棱锥高的中点，
则圆柱的底面圆半径为 1，圆柱的高为 1，
则该圆柱的表面积： $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi \times 1^2 + 2\pi \times 1 \times 1 = 4\pi$ 。
故选 C。

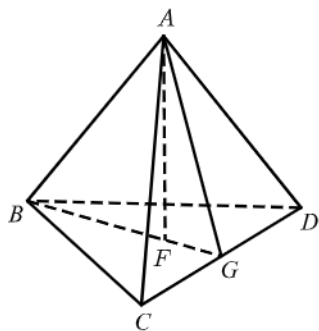
6 2020年天津和平区天津市耀华中学高三二模第12题5分

半正多面体亦称“阿基米德多面体”，是由边数不全相同的正多边形为面组成的多面体。如将正四面体所有棱各三等分，沿三等分点从原几何体割去四个小正四面体如图所示，余下的多面体就成为一个半正多面体，若这个半正多面体的棱长为 2，则这个半正多面体的体积为 _____。



答案 $\frac{46\sqrt{2}}{3}$

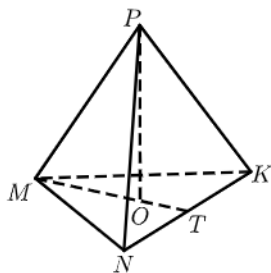
解析 设原正四面体为 $A-BCD$ ，如下图所示：



由题意可知，正四面体的棱长 $BC = 6$ ，设 F 为底面 BCD 的中心， G 是边 CD 中点，
则正四面体 $A-BCD$ 的高 AF ，则 $BG = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = 3\sqrt{3}$ ， $BF = \frac{2}{3} BG = 2\sqrt{3}$ ，
所以在 $Rt\triangle BFA$ 中， $AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$ ，

所以原正四面体为 $A-BCD$ 的体积为 $V_1 = \frac{1}{3} \times S_{\triangle BCD} \times AF = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 \times 2\sqrt{6} = 18\sqrt{2}$;

设从原几何体中割去的其中一个小正四面体为 $P-MNK$, 如下图所示 :



则小正四面体的棱长 $PM = 2$, 设 O 为底面 BCD 的中心 , T 为边 NK 中点 ,

则小正四面体 $P-MNK$ 的高 PO , 则 $MT = \frac{\sqrt{3}}{2} MN = \sqrt{3}$, $MO = \frac{2}{3} MT = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以在 $\text{Rt}\triangle PMO$ 中 , $PO = \sqrt{PM^2 - MO^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$,

所以小正四面体为 $P-MNK$ 的体积为 $V_2 = \frac{1}{3} \times S_{\triangle MNT} \times MO = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

;

所以从原几何体中割去四个小正四面体体积为 $4V_2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$,

所以这个半正多面体的体积为 $V_1 - 4V_2 = 18\sqrt{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} = \frac{46\sqrt{2}}{3}$.

故答案为 : $\frac{46\sqrt{2}}{3}$.



外接球

①构造直角三角形

②补长方体

③建系

7

2020年天津南开区天津中学高三下学期高考模拟(3月)第4题

在三棱锥 $P-ABC$ 中 , $PA \perp$ 平面 ABC , 且 $\triangle ABC$ 为等边三角形 , $AP = AB = 2$, 则三棱锥

$P-ABC$ 的外接球的表面积为 () .

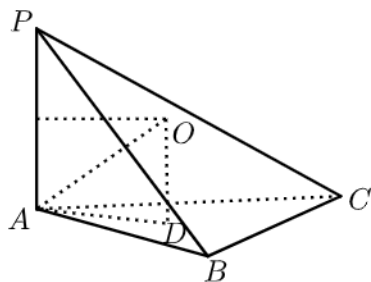
- A. $\frac{27}{2}\pi$
C. $\frac{26}{3}\pi$

- B. $\frac{28}{3}\pi$
D. $\frac{25}{2}\pi$

答案

B

解析 如图所示：三棱锥 $P-ABC$ 中，



$PA \perp$ 平面 ABC ，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形， $AP = AB = 2$ ，

$$\therefore AD = \frac{2}{3} \sqrt{2^2 - 1^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{外接球的半径 } r^2 = 1^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{21}{9},$$

$$\therefore S = 4\pi \times \frac{21}{9} = \frac{28\pi}{3}.$$

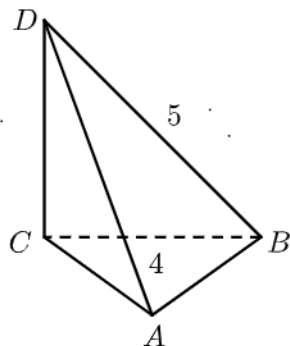
故选：B.

8 2020年陕西西安未央区西安中学高三二模理科第13题5分

在三棱锥 $D-ABC$ 中， $CD \perp$ 底面 ABC ， $AC \perp BC$ ， $AB = BD = 5$ ， $BC = 4$ ，则此三棱锥的外接球的表面积为 _____.

答案 34π

解析 如图， $\because CD \perp$ 底面 ABC ，



$\therefore CD \perp CB$ ， $CD \perp CA$ ，

又 $AC \perp CB$ ， $AB = BD = 5$ ， $BC = 4$ ，

$\therefore DC = 3$ ， $AC = 3$ ，

由三线垂直可知，三棱锥可看作长方体一角，

其外接球直径为长方体体对角线长，

$$\text{即 } 2R = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34},$$

$$\therefore S = 4\pi \times \frac{34}{4} = 34\pi,$$

故答案为： 34π .

9 2020~2021学年天津河北区高三上学期期末第12题5分

已知四面体 $ABCD$ 的每个顶点在一个球面上， AB, AC, AD 两两垂直，且 $AB=1, AC=2, AD=3$ ，则四面体 $ABCD$ 的体积为 _____，这个球的表面积为 _____ .

答案 1:1

2:14 π

解析 因为 AB, AC, AD 两两垂直，且 $AB=1, AC=2,$

$AD=3$ ，所以四面体 $ABCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 3 = 1$. 球 O 的表面积为

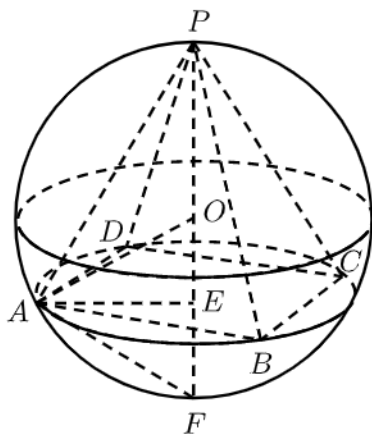
$$4\pi \times \left(\frac{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}{2} \right)^2 = 14\pi .$$

10 2020年天津河东区高三一模第12题5分

正四棱锥的顶点都在同一球面上 . 若该棱锥的高为4，底面边长为2，则该球的表面积为 _____ .

答案 $\frac{81}{4}\pi$

解析 如图，



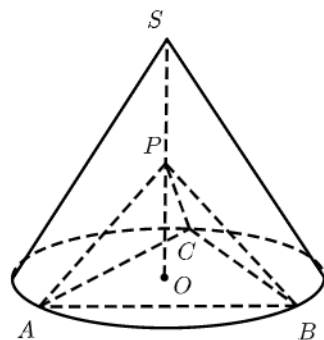
四棱锥 $P-ABCD$ 中， PE 为高， PF 为球的直径，由射影定理知 $PA^2 = PF \cdot PE$ ， $AE = \sqrt{2}$.

$$PF = 2R, |AP| = 3\sqrt{2}, \text{ 则 } R = \frac{9}{4},$$

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot \frac{81}{16} = \frac{81}{4}\pi.$$

11 2020~2021学年天津高三上学期期末(部分区)第15题5分

如图, 在圆锥 SO 中, $SO = \sqrt{2}$, 圆锥的侧面积为 $\sqrt{3}\pi$, $\triangle ABC$ 是圆锥底面圆 O 的内接正三角形, P 为 SO 上一点, 且 $\angle APC = 90^\circ$, 则圆锥 SO 的体积为 _____, 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 _____.



答案

- 1: $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$
- 2: $\frac{9\pi}{2}$

解析

设底面圆的半径为 r , 侧面积为 $\sqrt{3}\pi$, 即 $\sqrt{3}\pi = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot SA$,

$$\text{而 } SA^2 = r^2 + OS^2,$$

可得 $r = 1$,

$$\text{那么圆锥 } SO \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot OS = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi;$$

由底面圆 O 的内接正三角形,

可得正三角形的边长为 $\sqrt{3}$,

$$\therefore \angle APC = 90^\circ,$$

可知 $\triangle APC$ 是等腰直角三角形, 可得 $AP = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$$\therefore PO = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

由于球心 O' 在 OS 上, 可得 $R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - R\right)^2 + r^2$,

$$\text{可得球 } R = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{那么球的表面积 } S = 4\pi R^2 = \frac{9\pi}{2}.$$

故答案为： $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ ； $\frac{9\pi}{2}$ 。

12 2017~2018学年4月天津和平区天津市耀华嘉诚国际学校高一下学期月考第18题5分

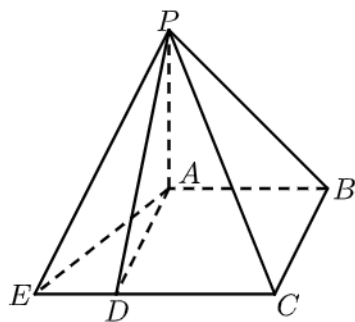
已知两个圆锥有公共底面，且两圆锥的顶点和底面的圆周都在同一个球面上．若圆锥底面面积是这个球面面积的 $\frac{3}{16}$ ，则这两个圆锥中，体积较小者的高与体积较大者的高的比值为_____。

答案 $\frac{1}{3}$

解析 设球心为 O_1 ，半径为 r_1 ，圆锥底面圆圆心为 O_2 ，半径为 r_2 ，则有 $\frac{3}{16} \times 4\pi r_1^2 = \pi r_2^2$ ，
即 $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}r_1$ ，所以 $O_1O_2 = \sqrt{r_1^2 - r_2^2} = \frac{r_1}{2}$ ，
设两个圆锥中，体积较小者的高与体积较大者的高分别为 h_1 、 h_2 ，则 $\frac{h_1}{h_2} = \frac{r_1 - \frac{r_1}{2}}{r_1 + \frac{r_1}{2}} = \frac{1}{3}$ 。

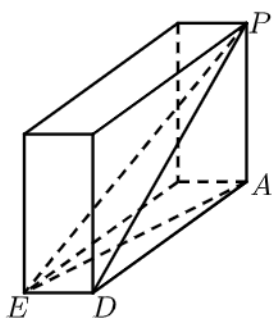
13 2019年天津北辰区高三一模理科第11题5分

中国古代数学经典《九章算术》系统地总结了战国、秦、汉时期的数学成就，书中将底面为长方形且有一条侧棱与底面垂直的四棱锥称之为阳马，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑．如图为一个阳马与一个鳖臑的合体，已知 $PA \perp$ 平面 $ABCE$ ，四边形 $ABCD$ 为正方形， $AD = 2$ ， $ED = 1$ ，若鳖臑 $P - ADE$ 的外接球的体积为 $\frac{9\pi}{2}$ ，则阳马 $P - ABCD$ 的外接球的表面积等于_____。



答案 12π

解析 鳖臑 $P - ADE$ 可看做如下图所示的长方体的一部分：



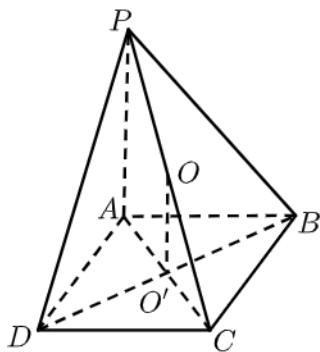
则长方体外接球即为鳖臑 $P-ADE$ 的外接球，

$$\therefore \text{外接球半径为：} \frac{1}{2} \sqrt{ED^2 + AD^2 + PA^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5 + PA^2},$$

$$\text{又 } \frac{4}{3} \pi \times \left(\frac{1}{2} \sqrt{5 + PA^2} \right)^3 = \frac{9}{2} \pi,$$

$$\therefore PA = 2,$$

连接 AC, BD ，交于 O' ，取 PC 中点 O ，连接 OO' ，



$$\text{可知：} OO' = \frac{1}{2} PA = 1,$$

$$\text{则 } OA = OB = OC = OD = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3},$$

$$OP = OC = \frac{1}{2} PC = \frac{1}{2} \sqrt{8 + 4} = \sqrt{3},$$

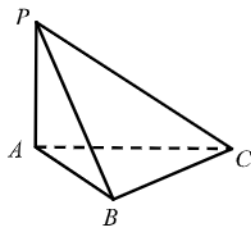
可知 O 为阳马 $P-ABCD$ 的外接球球心，则外接球半径 $R = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore \text{阳马 } P-ABCD \text{ 的外接球表面积 } S = 4\pi R^2 = 12\pi.$$

故答案为： 12π 。

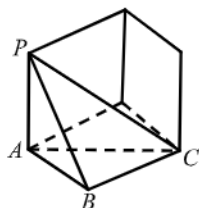
14 2018~2019学年天津和平区天津市耀华中学高一下学期期末第17题4分

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp BC$ ， $PA = 1$ ， $AB = 2$ ， $BC = 3$ ，则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为 _____。



答案 14π .

解析



将上图补成长方体，

则三棱锥 $P-ABC$ 外接球于长方体外接球是相同的，

PC 为圆的直径，

$$PC = \sqrt{AB^2 + BC^2 + PA^2} ,$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 1} ,$$

$$= \sqrt{14} ,$$

$$\therefore R = \frac{PC}{2} = \frac{\sqrt{14}}{2} ,$$

$$\text{表面积} = 4\pi R^2 , = 4\pi \cdot \frac{14}{4} , = 14\pi .$$

3. 平面向量



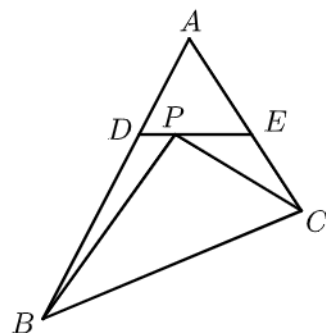
基底法

15 2020~2021学年12月天津河东区天津市第五十四中学高三上学期月考第15题5分

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 2$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ， D ， E 分别是边 AB ， AC 的中点， $AE = 1$

，且 $\vec{AD} \cdot \vec{AE} = \frac{1}{2}$ ，则 $|\vec{AD}| = \underline{\hspace{2cm}}$ ，若 P 是线段 DE 上的一个动点，则 $\vec{BP} \cdot \vec{CP}$ 的最小值

为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



答案 1:1

2: $-\frac{1}{16}$

解析

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AE}| \cdot \cos \angle BAC = |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } |\overrightarrow{AD}| = 1,$$

$\because$ 点 P 是线段 DE 上的一个动点,

$$\therefore \text{设 } \overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DE},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{EP} = (1 - \lambda) \overrightarrow{ED},$$

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DP} = -2\overrightarrow{AD} + \lambda(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD})$$

$$= -(2 + \lambda)\overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{AE},$$

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EP} = -\overrightarrow{AE} + (1 - \lambda)(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}) = (\lambda - 2)\overrightarrow{AE} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} = [-(2 + \lambda)\overrightarrow{AD} + \lambda\overrightarrow{AE}] \cdot [(\lambda - 2)\overrightarrow{AE} + (1 - \lambda)\overrightarrow{AD}]$$

$$= -(2 + \lambda)(1 - \lambda)\overrightarrow{AD}^2 + \lambda(\lambda - 2)\overrightarrow{AE}^2$$

$$+ [\lambda(1 - \lambda) - (\lambda - 2)(\lambda + 2)]\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$$

$$= -(-\lambda^2 - \lambda + 2) + \lambda^2 - 2\lambda + (-2\lambda^2 + \lambda + 4) \cdot \frac{1}{2} = \lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda,$$

$$\text{当 } \lambda = \frac{1}{4} \text{ 时, } (\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP})_{\min} = -\frac{1}{16}.$$

$$\text{故答案为: } 1; -\frac{1}{16}.$$

16 2020~2021学年天津高三上学期期末(部分区)第14题5分

在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD = 1$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, 点 E, F 在 CD 上, 且满足 $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$,

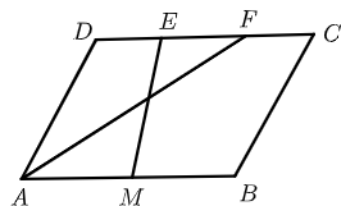
$\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$, 若 M 为 AB 的中点, 且 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{ME} = 1$, 则 AB 的长为 _____.

答案

$$\frac{9}{4}$$

解析

如图,



$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}, \text{ 且 } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} \\
 &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \\
 &= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}, \\
 &\text{且 } |\overrightarrow{AD}| = 1, \angle BAD = \frac{\pi}{3}, \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{ME} = 1, \\
 &\therefore \left(\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\
 &= \overrightarrow{AD}^2 - \frac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\
 &= 1 - \frac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}| = 1, \text{ 解得 } |\overrightarrow{AB}| = \frac{9}{4} \text{ 或 } 0 \text{ (舍去)}, \\
 &\therefore AB = \frac{9}{4}. \\
 &\text{故答案为: } \frac{9}{4}.
 \end{aligned}$$

17 2020年天津东丽区一百中学高三下学期高考模拟(4月)第15题

已知菱形 $ABCD$ 的边长为2, $\angle BAD = 120^\circ$, 点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上, $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DF} = \mu \overrightarrow{DC}$, 若 $2\lambda + \mu = \frac{5}{2}$, 则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF}$ 的最小值 _____.

答案 3

解析

$$\begin{aligned}
 &\because \overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DF} = \mu \overrightarrow{DC}, \text{ 且 } 2\lambda + \mu = \frac{5}{2}. \\
 &\therefore \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) \\
 &= (\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \mu \overrightarrow{DC}) \\
 &= (1 + \lambda\mu) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \lambda |\overrightarrow{AD}|^2 + \mu |\overrightarrow{AB}|^2 \\
 &= (1 + \lambda\mu) \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4(\lambda + \mu) \\
 &= 4(\lambda + \mu) - 2(1 + \lambda\mu). \\
 &\text{由题意知, } \lambda, \mu > 0. \\
 &\therefore 2\lambda + \mu = \frac{5}{2}. \\
 &\therefore \text{原式} = 4\lambda^2 - 9\lambda + 8 \quad (0 \leq \lambda \leq 1). \\
 &\therefore \text{最小值为 } \lambda = 1 \text{ 时, } \\
 &\therefore 4\lambda^2 - 9\lambda + 8 = 3.
 \end{aligned}$$

18 2020~2021学年天津河西区高三上学期期末第9题5分

在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = 2$, $CD = AD = 1$, 若点 M 在线段 BD 上, 则

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM}$ 的最小值为 () .

A. $\frac{3}{5}$

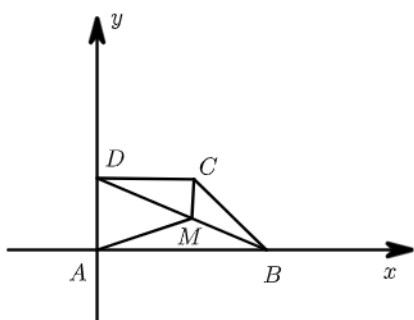
B. $-\frac{9}{20}$

C. $-\frac{3}{5}$

D. $\frac{9}{20}$

答案 B

解析 建立如图所示平面直角坐标系:



因为 $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = 2$,

$CD = AD = 1$,

所以 $B(2,0)$, $D(0,1)$, $C(1,1)$,

设 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BD}$, $0 \leq \lambda \leq 1$,

所以 $(x-2, y) = \lambda(-2, 1)$,

所以 $M(2-2\lambda, \lambda)$,

所以 $\overrightarrow{AM} = (2-2\lambda, \lambda)$,

$\overrightarrow{CM} = (1-2\lambda, \lambda-1)$,

所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = (2-2\lambda, \lambda) \cdot (1-2\lambda, \lambda-1)$

$$= 5\lambda^2 - 7\lambda + 2$$

$$= 5\left(\lambda - \frac{7}{10}\right)^2 - \frac{9}{20},$$

当 $\lambda = \frac{7}{10}$ 时, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM}$ 的最小值为 $-\frac{9}{20}$.

故答案为: B.

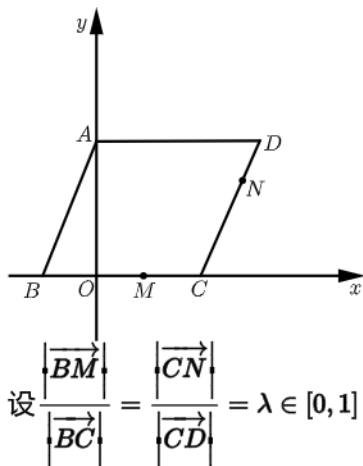
19 2020~2021学年天津和平区高三上学期期末第15题5分

在菱形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$, $AB = 2$, 点 M, N 分别为 BC, CD 边上的点, 且满足

$$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}, \text{ 则 } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \text{ 的最小值为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案 $\frac{3}{2}$

解析 如图, 建立平面直角坐标系:



$$\text{则: } A(0, \sqrt{3}), B(-1, 0), C(1, 0), D(2, \sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{BC} = (2, 0), \overrightarrow{CD} = (1, \sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BC} = (2\lambda, 0), \overrightarrow{CN} = \lambda \overrightarrow{CD} = (\lambda, \sqrt{3}\lambda),$$

$$\therefore M(2\lambda - 1, 0), N(\lambda + 1, \sqrt{3}\lambda),$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} = (2\lambda - 1, -\sqrt{3}), \overrightarrow{AN} = (\lambda + 1, \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}),$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (2\lambda - 1)(\lambda + 1) - \sqrt{3}(\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3})$$

$$= 2\lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

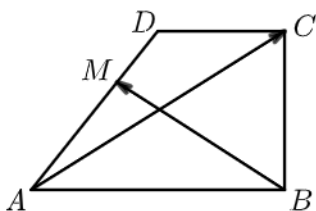
$$\text{对称轴 } \lambda = \frac{1}{2}, \text{ 此时, } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} \text{ 最小值为 } \frac{3}{2}.$$

20 2020年天津和平区天津市耀华中学高三二模第14题5分

梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $AD = 3$, $CD = 2$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6$, 若 M 为线段 AD 上的一点, 则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM}$ 的最大值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

答案 -2

解析



$$\because AB \parallel CD, AB = 4, AD = 3, CD = 2, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 6,$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\text{设 } \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AD} \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \right) \left(\lambda \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \right)$$

$$= \lambda \overrightarrow{AD}^2 + \left(\frac{1}{2}\lambda - 1 \right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2$$

$$= \lambda \cdot 3^2 + 6 \left(\frac{1}{2}\lambda - 1 \right) - \frac{1}{2} \times 4^2$$

$$= 12\lambda - 14,$$

$$\text{当 } \lambda = 1 \text{ 时, } \left(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} \right)_{\max} = 12 - 14 = -2.$$

故答案为: -2 .

21 2020年天津静海县高三二模第15题5分

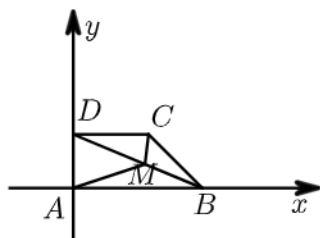
在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = 2$, $CD = AD = 1$, 若点 M 在线段 BD 上, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM}$ 的最小值为 _____.

答案

$$-\frac{9}{20}$$

解析

建立如图所示平面直角坐标系:



因为 $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, $AB = 2$, $CD = AD = 1$,

所以 $B(2,0)$, $D(0,1)$, $C(1,1)$,

设 $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BD}$, $0 \leq \lambda \leq 1$,

所以 $(x-2, y) = \lambda(-2, 1)$,

所以 $M(2-2\lambda, \lambda)$,

所以 $\overrightarrow{AM} = (2-2\lambda, \lambda)$, $\overrightarrow{CM} = (1-2\lambda, \lambda-1)$,

所以 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = (2-2\lambda, \lambda) \cdot (1-2\lambda, \lambda-1)$

$$= 5\lambda^2 - 7\lambda + 2$$

$$= 5\left(\lambda - \frac{7}{10}\right)^2 - \frac{9}{20},$$

当 $\lambda = \frac{7}{10}$ 时, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM}$ 的最小值为 $-\frac{9}{20}$.

故答案为: $-\frac{9}{20}$.

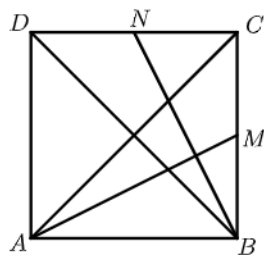


基底表示的唯一性

22 2020~2021学年天津南开区高三上学期期末第14题5分

如图, 在边长1为正方形 $ABCD$ 中, M, N 分别是 BC, CD 的中点, 则 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$, 若

$\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{BN}$, 则 $\lambda + \mu = \underline{\hspace{2cm}}$.



答案

- 1: $\frac{3}{2}$
- 2: $\frac{8}{5}$

解析

由题意可知, $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| = 1$, 且 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) \\ &= |\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{AD}|^2 + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD},$$

$$\text{由 } \overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AM} + \mu \overrightarrow{BN},$$

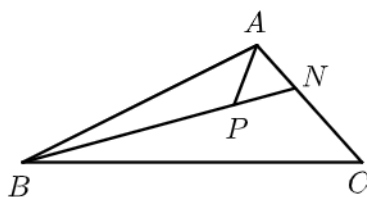
$$\text{得 } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (\lambda - \frac{1}{2}\mu)\overrightarrow{AB} + (\frac{1}{2}\lambda + \mu)\overrightarrow{AD},$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda - \frac{1}{2}\mu = 1 \\ \frac{1}{2}\lambda + \mu = 1 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} \lambda = \frac{6}{5} \\ \mu = \frac{2}{5} \end{cases},$$

$$\therefore \lambda + \mu = \frac{8}{5},$$

故答案为: $\frac{3}{2}; \frac{8}{5}$.

- 23 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NC}$, P 是 BN 上的一点, 若 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}$, 则实数 m 的值为_____.



答案 $\frac{1}{9}$

解析 $\because B, P, N$ 三点共线,

$$\therefore \text{存在实数}\lambda\text{使得}\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{AB} + \frac{1-\lambda}{4}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{又}\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \begin{cases} \lambda = m \\ \frac{1-\lambda}{4} = \frac{2}{9} \end{cases}, \text{解得} m = \frac{1}{9}.$$

故答案为: $\frac{1}{9}$.

三点共线

- 24 2019~2020学年黑龙江哈尔滨南岗区哈尔滨市第三中学高一下学期期中第10题5分

在 $\triangle ABC$ 中, D 在线段 BC 上, 且 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN} = \mu\overrightarrow{AB}$, λ, μ 均为非零实数, 若 N, D, M 三点共线, 则 $\frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = (\quad)$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 C

解析

$$\therefore \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC},$$

$$\therefore \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN} = \mu \overrightarrow{AB},$$

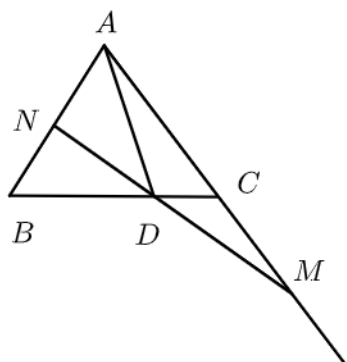
$$\therefore \overrightarrow{AC} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} = \frac{1}{\mu} \overrightarrow{AN},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3\mu} \overrightarrow{AN} + \frac{2}{3\lambda} \overrightarrow{AM},$$

$$\text{若 } N, D, M \text{ 三点共线, 则 } \frac{1}{3\mu} + \frac{2}{3\lambda} = 1,$$

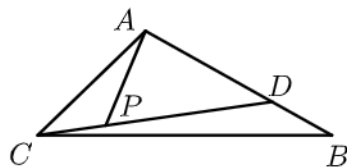
$$\therefore \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\mu} = 3.$$

故选C.



25 2020年湖北武汉武昌区高三下学期高考模拟文科(6月)第7题5分

如图在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DB}$, P 为 CD 上一点, 且 $\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 则 m 的值为().



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{5}$

答案

B

解析

$$\therefore \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{DB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$= m\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD},$$

又 $\because C、P、D$ 三点共线，

$$\therefore m + \frac{2}{3} = 1,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1}{3}.$$

故选B.

4. 复数

相等条件

26 2020年天津南开区天津中学高三下学期高考模拟（3月）第10题

若 $\frac{a}{1+i} = 1+bi$ ，其中 $a、b$ 都是实数， i 是虚数单位，则 $|a+bi| = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\sqrt{5}$

解析 由 $\frac{a}{1+i} = 1+bi$ ，得 $a = (1+bi)(1+i) = 1-b + (b+1)i$ ，
 则 $\begin{cases} a = 1-b \\ b+1 = 0 \end{cases}$ ，即 $a = 2, b = -1$ ，
 $\therefore |a+bi| = |2-i| = \sqrt{5}$.
 故答案为： $\sqrt{5}$.

运算

27 2020年天津南开区天津市南大奥宇学校高三二模第1题5分

若复数 z 满足 $\bar{z} - |z| = -1 - 3i$ ，其中 i 为虚数单位，则 $z = (\quad)$.

A. $4+3i$

B. $3+4i$

C. $-5+3i$

D. $4-3i$

答案 A

解析 $z = a+bi$ ，则 $\bar{z} = a-bi$ ，
 $\therefore \bar{z} - |z| = -1 - 3i$ ，
 $\therefore b = 3, a - \sqrt{a^2 + b^2} = -1$.

$$\therefore a = 4,$$

$$\therefore z = 4 + 3i,$$

故选：A.

28 2020~2021学年天津高三上学期期末(部分区)第2题5分

设 i 是虚数单位,若复数 z 满足 $(z-2)i = \sqrt{3} - i$,则 $z = ()$.

A. $1 - \sqrt{3}i$

B. $1 + \sqrt{3}i$

C. $1 - 3i$

D. $1 + 3i$

答案 A

解析 由 $(z-2)i = \sqrt{3} - i$,

$$\text{得 } z - 2 = \frac{\sqrt{3} - i}{i} = -\sqrt{3}i - 1,$$

$$\text{所以 } z = 1 - \sqrt{3}i.$$

故选：A.

29 2020~2021学年天津南开区高三上学期期末第10题5分

已知复数 $z = \frac{5i}{2-i} + 5i$,则 $|z| = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $5\sqrt{2}$

解析 复数 $z = \frac{5i}{2-i} + 5i$

$$= \frac{5i(2+i)}{(2-i)(2+i)} + 5i$$

$$= \frac{10i + 5i^2}{4 - i^2} + 5i$$

$$= -1 + 7i,$$

$$\text{则 } |z| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = 5\sqrt{2},$$

故答案为： $5\sqrt{2}$.

实部/虚部

30 2020年天津河北区高三二模第3题5分

若复数 $\frac{1+2ai}{2-i}$ (i 为虚数单位) 的实部与虚部相等, 则实数 a 的值为 ().

- A. $\frac{1}{6}$ B. $-\frac{1}{6}$ C. 1 D. -1

答案 A

解析 复数 $\frac{1+2ai}{2-i} = \frac{(1+2ai)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$$= \frac{2+2ai^2+(4a+1)i}{4-i^2}$$

$$= \frac{2-2a+(4a+1)i}{5}$$

又: 该复数实部与虚部相等,

$$\therefore 2-2a=4a+1,$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{6}.$$

故选 A.

31 2020年天津宝坻区高三二模第3题5分

已知 i 为虚数单位, 若复数 $z = \frac{1+ai}{2-i}$ ($a \in \mathbf{R}$) 的实部为 -1, 则 $|z| = ()$.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{5}{3}$ D. $\sqrt{10}$

答案 D

解析 $z = \frac{1+ai}{2-i} = \frac{(1+ai)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2-a+(2a+1)i}{5},$

$\therefore$ 复数 z 的实部为 -1,

$$\therefore \frac{2-a}{5} = -1, \text{ 故 } a = 7,$$

$$\text{则 } z = -1 + 3i,$$

$$\therefore |z| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

故选: D.

32 2017~2018学年12月天津南开区天津市南开中学高三上学期周测理科13周第9题5分

i 是虚数单位，若复数 $(1-2i)(a+i)$ 是纯虚数，则实数 a 的值为_____.

答案 -2

解析 $(1-2i)(a+i) = a+2-(2a-1)i$ 为纯虚数.

$$\therefore a+2=0,$$

$$\therefore a=-2.$$

33 2020~2021学年天津河西区高三上学期期末第10题5分

设 $a \in \mathbf{R}$ ，若 $\frac{a}{1+i}+1+i$ 是实数，则 a = _____.

答案 2

解析 解： $\because \frac{a}{1+i}+1+i = \frac{a(1-i)}{(1+i)(1-i)}+1+i = \frac{a+2}{2} + \frac{2-a}{2}i$ 是实数，

$$\therefore 2-a=0, \text{ 即 } a=2.$$

故答案为：2.

复数几何意义

34 2018~2019学年2月天津南开区天津市南开中学高三下学期月考理科第9题5分

若复数 z 满足 $(1-2i)z = -\frac{1}{2}(2+i)$ ，其中 i 为虚数单位，则 z 的共轭复数在复平面内对应点的坐标为_____.

答案 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

解析 $\because (1-2i)z = -\frac{1}{2}(2+i) = -1 - \frac{1}{2}i,$

$$\therefore z = \frac{-1 - \frac{1}{2}i}{1-2i} = -\frac{1}{2}i, \bar{z} = \frac{1}{2}i,$$

$\therefore$ 对应点坐标 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

故答案为： $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

35 2020年天津和平区高三二模第1题5分

设复数 $z = a + 2i$ ($a \in \mathbf{R}$)的共轭复数为 $\bar{z}$ ，且 $z + \bar{z} = 2$ ，则复数 $\frac{|z|}{2 - ai}$ 在复平面内对应点位于 () .

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

答案 A

解析 $\bar{z} = a - 2i$,

$$z + \bar{z} = 2a = 2 ,$$

$$\therefore a = 1 , z = 1 + 2i ,$$

$$\therefore \frac{|1 + 2i|}{2 - i} = \frac{\sqrt{1 + 2^2}}{2 - i}$$

$$= \frac{\sqrt{5}(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}i ,$$

故在第一象限 .