

03数列、基本不等式专项复习练习题

1. 数列



数列性质在选填题中的应用

1

2020~2021学年天津高三上学期期末(部分区)第4题5分

设 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $2S_3 = a_4 + 1$, $2S_2 = a_3 + 1$, 则 $a_1 = ()$.

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

答案

B

解析

$$2S_3 = a_4 + 1, 2S_2 = a_3 + 1,$$

两式相减可得 $2a_3 = a_4 - a_3$, 即 $a_4 = 3a_3$, 则公比 $q = 3$,

$$\therefore 2(a_1 + 3a_1) = 9a_1 + 1,$$

$$\therefore a_1 = -1.$$

故选B.

2

2020年天津宝坻区高三二模第6题5分

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = 9$, $S_{10} = 100$, 则 $a_7 = ()$.

A. 11

B. 13

C. 15

D. 17

答案

B

解析

设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公差为 d ,

$$\text{由题意得} \begin{cases} 3a_1 + 3b = 9 \\ 10a_1 + 45d = 100 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases},$$

$$\therefore a_7 = a_1 + 6d = 13.$$

故选B.

3 2020年天津红桥区高三二模第2题5分

若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，其前 n 项和为 S_n ，且 $S_3 = 3a_3$ ，则公比 $q = (\quad)$.

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1或 $-\frac{1}{2}$

D. -1或 $\frac{1}{2}$

答案 C

解析 $\because$ 等比数列 $\{a_n\}$ 中， $S_3 = 3a_3$ ，

$$\text{则 } a_1 + a_2 + a_3 = 3a_3 ,$$

$$\text{即 } a_1 + a_2 = 2a_3 ,$$

$$2q^2 - q - 1 = 0 ,$$

$$(2q + 1)(q - 1) = 0 ,$$

$$\text{解得 } q = -\frac{1}{2} \text{ 或 } q = 1 ,$$

$$\therefore \text{公比 } q = 1 \text{ 或 } -\frac{1}{2} .$$

故选C .

4 2020~2021学年天津南开区高三上学期期末第4题5分

已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ， $a_3 \cdot a_5 = 4a_6^2$ ，则 a_3 的值为 $(\quad)$.

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

答案 C

解析 设等比数列公比为 q ，

$$\text{则 } a_3 \cdot a_5 = 4a_6^2 \Rightarrow a_1 q^2 \cdot a_1 q^4 = 4a_1^2 q^{10} ,$$

$$\text{解得 } q^4 = \frac{1}{4} , q^2 = \frac{1}{2} ,$$

$$\text{故 } a_3 = a_1 q^2 = 1 .$$

故选C .



错位相减

5 2020年天津武清区高三二模第17题15分

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ ，满足 $2S_n = 3(a_n - 1) (n \in \mathbf{N}^*)$.

- (1) 求证： $\{a_n\}$ 为等比数列，并写出其通项公式 .
- (2) 设 $b_n = (2n - 1)a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

答案

- (1) $a_n = 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$ ，证明见解析 .
- (2) $T_n = 3 + (n - 1) \cdot 3^{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$.

解析

- (1) 由 $2S_n = 3(a_n - 1)$ 可得：

当 $n \geq 2$ 时， $2S_{n-1} = 3(a_{n-1} - 1)$ ，

两式相减可得： $2S_n - 2S_{n-1} = 3a_n - 3a_{n-1}$ ，

即 $2a_n = 3a_n - 3a_{n-1}$ ，

$a_n = 3a_{n-1} (n \geq 2)$ ，

又 $2S_1 = 3(a_1 - 1)$ ，

$2a_1 = 3a_1 - 3$ ，

所以 $a_1 = 3 \neq 0$ ，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为首项是3，公比是3的等比数列，

$\therefore a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n (n \in \mathbf{N}^*)$.

- (2) 由(1)可得： $b_n = (2n - 1) \cdot a_n = (2n - 1) \cdot 3^n$ ，

$T_n = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + (2n - 1) \cdot 3^n$ ，

$3T_n = 1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + (2n - 3) \cdot 3^n + (2n - 1) \cdot 3^{n+1}$ ，

两式相减可得： $-2T_n = 3 + 2(3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) - (2n - 1) \cdot 3^{n+1}$

$= -3 + 2(3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) - (2n - 1) \cdot 3^{n+1}$

$= -3 + 2 \times \frac{3(1 - 3^n)}{1 - 3} - (2n - 1) \cdot 3^{n+1}$

$= -6 - 2(n - 1) \cdot 3^{n+1}$ ，

$\therefore T_n = 3 + (n - 1) \cdot 3^{n+1}$.

6

2019年天津红桥区高三一模理科第18题13分

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , d 为整数, 前 n 项和为 S_n , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 已知 $a_1 = b_1$, $b_2 = 2$, $d = q$, $S_{10} = 100$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

答案

(1) $a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^{n-1}$.

(2) $T_n = 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

解析

(1) 有题意可得 $\begin{cases} 10a_1 + 45d = 100 \\ a_1d = 2 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a_1 = 6 \\ d = \frac{2}{9} \end{cases}$ (舍去) 或 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$,

$\therefore a_n = 2n - 1$, $b_n = 2^{n-1}$.

(2) $\therefore c_n = \frac{a_n}{b_n} = (2n - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$\therefore T_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{9}{2^4} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}$ ①,

$\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \cdots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n}$ ②,

①-②得: $\frac{1}{2}T_n = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n}$,

$= 3 - \frac{2n+3}{2^n}$.

$\therefore T_n = 6 - \frac{2n+3}{2^{n-1}}$.



裂项相消

7

2020~2021学年天津高三上学期期末(部分区)第18题15分

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $3S_n = a_n - 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 对任意的正整数 n , 设 $b_n = -\frac{1}{n \log_2 |a_{n+2}|}$, 记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $T_n < \frac{3}{4}$.

答案

(1) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) 由题意, 知 $3S_n = a_n - 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, ①

令 $n=1$ 得, $3S_1 = a_1 - 1$,

$$\therefore S_1 = a_1,$$

$$\therefore a_1 = -\frac{1}{2}.$$

当 $n \geq 2$ 时, $3S_{n-1} = a_{n-1} - 1$, ②

$$\therefore \text{①} - \text{②}, \text{得 } 3S_n - 3S_{n-1} = (a_n - 1) - (a_{n-1} - 1),$$

$$\text{即 } 3a_n = a_n - a_{n-1},$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}} = -\frac{1}{2} \quad (n \geq 2).$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $-\frac{1}{2}$, 以 $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

$$\therefore a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } |a_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\therefore b_n = -\frac{1}{n \log_2 |a_{n+2}|} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right),$$

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right), \end{aligned}$$

$$\therefore n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) > 0,$$

$$\therefore T_n < \frac{3}{4}.$$

8

2016~2017 学年广东深圳南山区高三上学期期末文科第 17 题 12 分

设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $3a_2 - a_1 = 1$, 且 $\frac{2}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_{n-1}a_{n+1}} (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $b_1 = \frac{1}{2}$, $4b_n = a_{n-1}a_n$, 设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n . 证明: $T_n < 1$.

答案

(1) $\frac{2}{n+1}$.

(2) 证明见解析.

解析

(1) $\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, $3a_2 - a_1 = 1$, 且 $\frac{2}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_{n-1}a_{n+1}} (n \geq 2)$,

$$\therefore \frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}},$$

$$\text{又 } a_1 = 1, 3a_2 - a_1 = 1,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a_1} &= 1, \frac{1}{a_2} = \frac{3}{2}, \therefore \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}, \\ \therefore \left\{ \frac{1}{a_n} \right\} &\text{是首项为} 1, \text{公差为} \frac{1}{2} \text{的等差数列}, \\ \therefore \frac{1}{a_n} &= 1 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}(n+1), \\ \therefore a_n &= \frac{2}{n+1}. \end{aligned}$$

(2) 证明: $\because$ 数列 $b_1 = \frac{1}{2}, 4b_n = a_{n-1}a_n,$

$$\therefore b_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

$\therefore$

$$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

,

故 $T_n < 1$.



简单综合

9

2020~2021学年天津南开区高三上学期期末第19题16分

已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$, $2a_1, a_1 + a_2 + a_3$ 分别是等比数列 $\{b_n\}$ 的首项和第二项.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 求数列 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 的前 n 项和.

(3) 求 $\sum_{i=1}^n a_{2i-1} b_i (n \in \mathbf{N}^*)$.

答案

(1) $a_n = n; b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

(2) $\frac{2n}{n+1}$.

(3) $M_n = (2n-2)3^n + 2$.

解析

(1) 由已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, 记其公差为 d .

因为 $a_{n+1} = 2a_n - n + 1$,

所以 $a_2 = 2a_1 - 1 + 1, a_3 = 2a_2 - 2 + 1$,

即 $a_1 = d, a_2 = d + 1$,

解得 $a_1 = d = 1$,

所以 $a_n = n$.

从而 $b_1 = 2a_1 = 2$, $b_2 = a_1 + a_2 + a_3 = 6$,

所以公比 $q = 3$,

所以 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$.

$$\begin{aligned} (2) \quad S_n &= \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{1}{S_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right), \\ \text{所以 } T_n &= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{2n}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \text{因为 } M_n &= \sum_{i=1}^n a_{2i-1} b_i = a_1 b_1 + a_3 b_2 + a_5 b_3 + \cdots + a_{2n-3} b_{n-1} + a_{2n-1} b_n \\ &= 2 \cdot 3^0 + 6 \cdot 3^1 + 10 \cdot 3^2 + \cdots + 2(2n-3)3^{n-2} + 2(2n-1)3^{n-1}, \\ \text{所以 } 3M_n &= 2 \cdot 3^1 + 6 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3^3 + \cdots + 2(2n-3)3^{n-1} + 2(2n-1)3^n, \\ \text{所以 } -2M_n &= 2 \cdot 3^0 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3^3 + \cdots + 4 \cdot 3^{n-1} - 2(2n-1)3^n \\ &= \frac{4 \cdot (1-3^n)}{1-3} - 2 - 2(2n-1)3^n \\ &= (4-4n)3^n - 4, \\ \text{所以 } M_n &= (2n-2)3^n + 2. \end{aligned}$$

10 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高三上学期期末第18题15分

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n = 3a_n - 3 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_3 a_n$, 且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求数列 $\left\{ \frac{1}{T_n} \right\}$ 的前 n 项和 .

(3) 设 $c_n = \frac{b_{2n-1}}{a_n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 P_n .

答案

(1) $a_n = 3^n$.

(2) $T_n = \frac{(n+1)n}{2}$, $Q_n = \frac{n}{2(n+1)}$.

(3) $P_n = 1 - \frac{n+1}{3^n}$.

解析

(1) 由 $2S_n = 3a_n - 3$ 可知 , 当 $n = 1$ 时 , $2S_1 = 2a_1 = 3a_1 - 3$,

$$\therefore a_1 = 3 ,$$

当 $n \geq 2$ 时, 则有 $2S_{n-1} = 3a_{n-1} - 3$,

$$\therefore 2a_n = 2S_n - 2S_{n-1} = (3a_n - 3) - (3a_{n-1} - 3),$$

即 $a_n = 3a_{n-1} (n \geq 2)$,

$\therefore \{a_n\}$ 是等比数列, 且公比为 3,

$$\therefore a_n = a_1 \cdot 3^{n-1} = 3^n.$$

(2) 由(1)可知, $b_n = \log_3 a_n = \log_3 3^n = n$,

$$\therefore T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{(n+1)n}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{T_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

记数列 $\left\{ \frac{1}{T_n} \right\}$ 的前 n 项和为 Q_n ,

$$\begin{aligned} \text{则 } Q_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{n}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

(3) 由(2)可知, $b_{2n-1} = 2n - 1$,

$$\text{则 } c_n = \frac{2n-1}{3^n},$$

$$\therefore P_n = \frac{1}{3^1} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \cdots + \frac{2n-1}{3^n} \quad ①,$$

$$\frac{1}{3} P_n = \frac{1}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \cdots + \frac{2n-1}{3^{n+1}} \quad ②,$$

$$① - ② \text{ 得 } \frac{2}{3} P_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{3^2} \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{2n-1}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2n+2}{3^{n+1}},$$

$$\therefore P_n = 1 - \frac{n+1}{3^n}.$$



分组求和

11

2020~2021 学年天津河北区高三上学期期末第 18 题 15 分

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为正数, $a_1 = 1$, 其前 n 项和为 S_n , 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, $b_1 = 2$, 且

$$b_2 S_2 = 12, b_2 + S_3 = 10.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 设 $c_n = b_n + \frac{1}{S_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和 .

答案

(1) $a_n = n$, $b_n = 2^n$.

(2) $T_n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$.

(3) $2^{2n+1} - \frac{2}{2n+1}$.

解析

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 d 为正数 , $a_1 = 1$, 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列 ,

设公比为 q , $b_1 = 2$, 且 $b_2 S_2 = 12$, $b_2 + S_3 = 10$,

可得 $2q(2+d) = 12$, $2q+3+3d = 10$,

解得 $q = 2$, $d = 1$,

则 $a_n = 1 + n - 1 = n$, $b_n = 2^n$.

(2) $a_n \cdot b_n = n \cdot 2^n$,

前 n 项和 $T_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$,

$2T_n = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n+1}$,

两式相减可得 $-T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+1}$,

化简可得 $T_n = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$.

(3) 由 $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$,

可得 $c_n = b_n + \frac{1}{S_n} = 2^n + \frac{2}{n(n+1)} = 2^n + 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$,

则前 n 项和 $T_n = (2 + 4 + \cdots + 2^n) + 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

$= \frac{2(1-2^n)}{1-2} + 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 2^{n+1} - \frac{2}{n+1}$,

则数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 $2^{2n+1} - \frac{2}{2n+1}$.

2. 基本不等式

12 2020年天津蓟县高三二模第12题5分

已知点 $P(x, y)$ 在直线 $x + 2y - 3 = 0$ 上 , 则 $2^x + 4^y$ 的最小值为 _____ .

答案

$2\sqrt{2}$

解析 利用基本不等式及 $x + 2y = 3$ 得：

$$2^x + 4^y \geq 2\sqrt{2^x \cdot 4^y} = 2\sqrt{2^{x+2y}} = 4\sqrt{2},$$

当且仅当 $2^x = 4^y = 2\sqrt{2}$.

13 2020年天津南开区天津市第二十五中学高三下学期高考模拟（3月）第15题5分

已知正实数 x, y 满足 $xy = 1$, 则 $\left(\frac{x}{y} + y\right)\left(\frac{y}{x} + x\right)$ 的最小值为 _____ .

答案 4

解析

$$\text{依题意, } \left(\frac{x}{y} + y\right)\left(\frac{y}{x} + x\right) = 1 + \frac{y^2}{x} + \frac{x^2}{y} + 1 \geq 2 + 2\sqrt{\frac{y^2}{x} \times \frac{x^2}{y}} = 4,$$

当且仅当 $x = y = 1$ 时取等号 .

故答案为：4 .

14 2019年天津河西区高三一模文科第13题5分

已知 $x > 0, y > 0$, 且 $2x + 8y - xy = 0$, 则 xy 的最小值为 _____ .

答案 64

解析

$$\because x > 0, y > 0, 2x + 8y - xy = 0,$$

$$\therefore xy = 2x + 8y \geq 2\sqrt{16xy} = 8\sqrt{xy},$$

$$\therefore \sqrt{xy} \geq 8,$$

$\therefore xy \geq 64$, 当且仅当 $x = 4y = 16$ 时取等号 .

故 xy 的最小值为 64 .

故答案为：64 .

15 2020年天津高三上学期高考模拟第14题5分

已知 $a > 0, b > 0$, 则 $\frac{a^2 + 4b^2 + a^3b^3}{a^2b^2}$ 的最小值为 _____ .

答案 4

解析

$$\because a > 0, b > 0,$$

$$\therefore \frac{a^2 + 4b^2 + a^3b^3}{a^2b^2}$$

$$= \frac{1}{b^2} + \frac{4}{a^2} + ab \geqslant 2\sqrt{\frac{4}{a^2b^2}} + ab$$

$$= \frac{4}{ab} + ab \geqslant 2\sqrt{\frac{4}{ab} \cdot ab}$$

$$= 4,$$

$$\text{当且仅当} \begin{cases} \frac{1}{b^2} = \frac{4}{a^2} \\ \frac{4}{ab} = ab \end{cases},$$

$$\text{即} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \text{时, 等号成立,}$$

$$\text{故} \frac{a^2 + 4b^2 + a^3b^3}{a^2b^2} \text{的最小值为} 4.$$

16 已知 $a > 0, b > 0$, 并且 $\frac{1}{a}, \frac{1}{2}, \frac{1}{b}$ 成等差数列, 则 $a + 9b$ 的最小值为 ().

A. 16

B. 9

C. 5

D. 4

答案 A

解析

$$\because \frac{1}{a}, \frac{1}{2}, \frac{1}{b} \text{成等差数列,}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

$$\text{又} a > 0, b > 0, \text{则} a + 9b = (a + 9b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 10 + \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \geqslant 10 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 16,$$

$$\text{当且仅当} \frac{a}{b} = \frac{9b}{a} \text{时, 等号成立.}$$

$$\therefore a + 9b \text{的最小值为} 16.$$

故选A.