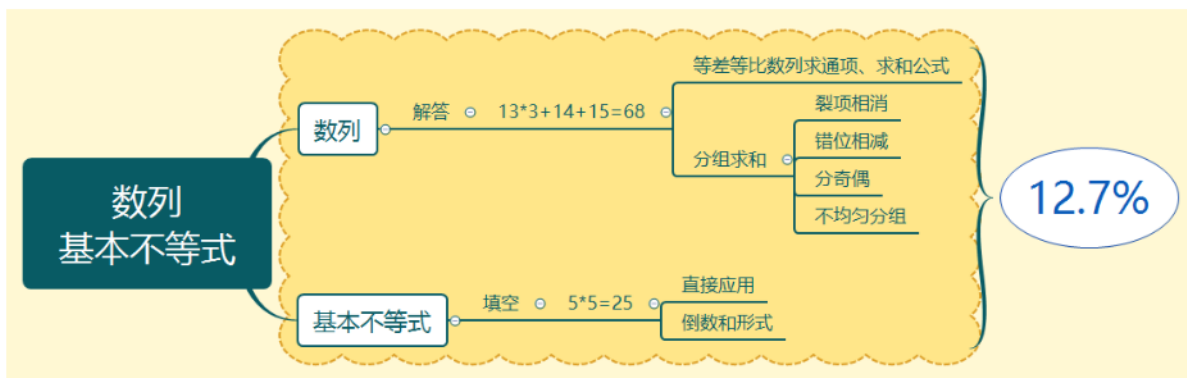


03数列、基本不等式专项复习



1. 数列



数列性质在选填题中的应用

- 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = n^2 \sin(\frac{2n+1}{2}\pi)$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12} = ()$.
A. 0 B. 55 C. 66 D. 78
- 等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为2, 项数为奇数, 其奇数项之和为 $\frac{85}{32}$, 偶数项之和为 $\frac{21}{16}$, 这个等比数列前 n 项和的积为 $T_n (n \geq 2)$, 则 T_n 的最大值为().
A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2
- 已知实数 a, b 满足条件: $ab < 0$, 且1是 a^2 与 b^2 的等比中项, 又是 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的等差中项, 则 $\frac{a+b}{a^2+b^2} =$ _____.
- 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 均为等差数列, 前 n 项和分别为 S_n, T_n , 且满足: $\forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{S_n}{T_n} = \frac{n+3}{2n+1}$, 则 $\frac{a_1 + a_6 + a_{14} + a_{19}}{b_5 + b_8 + b_{12} + b_{15}} =$ _____.



错位相减求和

5

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_4 = 4S_2$ ， $a_{2n} = 2a_n + 1$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $T_n + \frac{a_n + 1}{2^n} = \lambda$ (λ 为常数)。令 $c_n = b_{2n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)。求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 R_n 。

6 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $b_1 = a_1 = 1$ ， $b_3 = a_3 + 1$ ， $b_5 = a_5 - 7$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 A_n 。

(3) 设 S_n 为数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和，若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，有 $S_n + \frac{1}{3} = t \cdot 2^{b_n}$ ，求实数 t 的值。

7 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 , 求证 : $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.



分段数列通项求解（分奇偶）

8

已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ， $a_2 = \frac{1}{2}$ ，且 $[3 + (-1)^n]a_{n+2} - 2a_n + 2[(-1)^n - 1] = 0$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

(1) 求 a_3 ， a_4 ， a_5 ， a_6 的值及数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $b_n = a_{2n-1} \cdot a_{2n}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n 。

 裂项相消

9 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2S_n = 3a_n + 4n - 7$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

(1) 证明：数列 $\{a_n - 2\}$ 是等比数列。

(2) 若 $b_n = \frac{a_n - 2}{(a_{n+1} - 1)(a_n - 1)}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。

10 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数， $2a_5$ ， a_4 ， $4a_6$ 成等差数列，且满足 $a_4 = 4a_3^2$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{(n+1)b_n}{2}, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 = 1.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{b_{2n+5}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}a_n$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证： $\sum_{k=1}^n c_k < \frac{1}{3}$.

11 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，且 $a_1 + a_4 = 9$ ， $a_2 a_3 = 8$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和， $b_n = \frac{a_{n+1}}{S_n S_{n+1}}$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。



分组求和

12 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为1的等差数列，数列 $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_3 + a_4 = a_7$ ， $b_2 \cdot b_4 = b_5$ ，

$$a_4 = 4b_2 - b_3, \text{ 数列}\{c_n\}\text{满足: } c_n = \begin{cases} b_{2m-1}, n = 3m - 2 \\ b_{2m}, n = 3m - 1 \\ a_m, n = 3m \end{cases}, \text{ 其中 } m \in \mathbf{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 记 $t_n = c_{3n-2}c_{3n-1} + c_{3n-1}c_{3n} + c_{3n}c_{3n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，求数列 $\{t_n\}$ 的前 n 项和.

13 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = 2$ ， $S_5 = 30$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $T_n = 2^n - 1$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $c_n = \frac{b_n}{(b_n + 1)(b_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 M_n ，求 M_n 。

(3) 设 $d_n = (-1)^n (a_n b_n + \ln S_n)$ ，求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和。



分段数列求和

14

设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0， $\{b_n\}$ 是等差数列， $(n \in \mathbf{N}^*)$ 。已知 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ，

$$a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = c_2 = 1$ ， $c_n = \begin{cases} 1, & 3^k < n < 3^{k+1} \\ a_k, & n = 3^k \end{cases}$ ，其中 $k \in \mathbf{N}^*$ 。

① 求数列 $\{b_{3^n} (c_{3^n} - 1)\}$ 的通项公式。

② 若 $\left\{ \frac{na_n}{(n+1)(n+2)} \right\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 n 项和 T_n ，求 $T_{3^n} + \sum_{i=1}^{3^n} b_i c_i (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

15 设 $\{a_n\}$ 是等比数列的公比大于0，其前 n 项和为 S_n ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ， $a_3 = a_2 + 2$ ，

$$a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{(a_n + 1)(a_{n+1} + 1)}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求 T_n .

(3) 设 $d_n = \begin{cases} b_n, n \neq 2^k \\ b_n(\log_2 b_n + 1), n = 2^k \end{cases}$ ，其中 $k \in \mathbf{N}^*$ ，求 $\sum_{i=1}^{2^n} d_i$.



数列的函数性质

16 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为0的等差数列, $a_1 = \frac{3}{2}$, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $b_1 = a_1$, $b_2 = -a_3$,

$b_3 = a^4$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \begin{cases} b_n, n \leq 5 \\ 8a_n, n \geq 6 \end{cases}$, $(n \in \mathbf{N}^*)$. 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

(3) 若 $A \leq S_n - \frac{1}{S_n} \leq B$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 求 $B - A$ 的最小值.

17 设各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 = 10$, $a_3 + a_5 = 40$, $b_n = \log_2 a_n$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $c_1 = 1$, $c_{n+1} = c_n + \frac{b_n}{a_n}$, 求证: $c_n < 3$.

(3) 是否存在正整数 k , 使得 $\frac{1}{b_n+1} + \frac{1}{b_n+2} + \cdots + \frac{1}{b_n+n} > \frac{k}{10}$ 对任意正整数 n 均成立?

若存在, 求出 k 的最大值, 若不存在, 说明理由.



放缩

18 设 $\{a_n\}$ 是各项都为整数的等差数列，其前 n 项和为 S_n ， $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1 = b_1 = 1$ ，

$$a_3 + b_2 = 7, S_5 b_2 = 50, n \in \mathbf{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \log_2 b_3 + \cdots + \log_2 b_n$ ， $T_n = a_{c_n+1} + a_{c_n+2} + a_{c_n+3} + \cdots + a_{c_n+n}$.

① 求 T_n .

② 求证： $\sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{T_i - i}} < 2$.

2. 基本不等式

配凑及1的代换

19 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} = \frac{1}{6}$, 则 $a+b$ 的最小值为 _____ .

20 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $\frac{3}{a+2} + \frac{3}{b+2} = 1$, 则 $a+2b$ 的最小值为 _____ .

换元法/配凑法

21 已知实数 x, y 满足 $x > y > 0$, 则 $\frac{4x+2y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ 的取值范围是 _____ .

22 若正实数 x, y 满足 $x+2y=5$, 则 $\frac{x^2-3}{x+1} + \frac{2y^2-1}{y}$ 的最大值是 _____ .

1的代换 (数化为式)

23 已知正数 a, b 满足 $ab=1$, 则 $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ 的最小值为 _____ .

24 已知 a, b 均为正数, 且 $a+b=1$, 则 $\frac{a^2+1}{2ab} - 1$ 的最小值为 _____ .

25 若 $x > 0, y > 0$, 且 $x+2y=1$, 则 $\frac{y}{x+y} + \frac{1}{2y}$ () .

A. 有最大值为 $\frac{7}{3}$

B. 有最小值为 $\sqrt{2} + \frac{1}{2}$

C. 有最小值为2

D. 无最小值