

02三角函数解三角形专项复习练习题

1. 三角函数基础性质应用



平移变换

1

2020年天津塘沽区天津市实验中学滨海学校高三下学期高考模拟第4题5分

要得到函数 $y = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，只需将函数 $y = \cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象 () .

A. 向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

B. 向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度

C. 向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度

答案 C

解析 将函数 $y = \cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度，可得函数 $y = \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象 .

故选C .



奇偶性、对称性

2

若将函数 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$ 的图象向左平移 φ 个单位，所得图象关于 y 轴对称，则 φ 的最小正值是 _____ .

答案 $\frac{\pi}{8}$

解析 函数 $f(x) = \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ ，向左平移 φ 个单位，可得 $\sqrt{2} \sin\left(2x + 2\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$

,

要使所得图象关于 y 轴对称，

$$\therefore 2\varphi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ 即 } \varphi = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}k\pi, (k \in \mathbf{Z})$$

当 $k = 0$ 时，可得 φ 的最小正值为 $\frac{\pi}{8}$.

故答案为： $\frac{\pi}{8}$.

3 2020年天津河东区高三下学期高考模拟第14题5分

若将函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 φ 个单位, 所得的图象关于 y 轴对称, 则 φ 的最小正值是 _____.

答案 $\frac{3\pi}{8}$

解析 将函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 φ 个单位, 所得图象对应的函数解析式为 $y = \sin[2(x - \varphi) + \frac{\pi}{4}] = \sin(2x + \frac{\pi}{4} - 2\varphi)$ 关于 y 轴对称, 则 $\frac{\pi}{4} - 2\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = -\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, 故 φ 的最小正值为 $\frac{3\pi}{8}$.

确定区间上的单调性

4 2020年天津和平区高三三模第7题5分

若函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 成中心对称, 且 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 则函数

$y = f(x + \frac{\pi}{3})$ 为 ().

- A. 奇函数且在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内单调递增
- B. 偶函数且在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递增
- C. 偶函数且在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递减
- D. 奇函数且在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内单调递减

答案 D

解析 因为函数 $f(x) = \cos 2(x + \varphi)$ 的图象关于点 $(\frac{4\pi}{3}, 0)$ 成中心对称, 所以 $\frac{8\pi}{3} + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = k\pi - \frac{13\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$, 又因为 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, 则 $y = f(x + \frac{\pi}{3}) = \cos[2(x + \frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6}] = \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = -\sin 2x$, 所以该函数为奇函数且在 $(0, \frac{\pi}{4})$ 内单调递减.

故选D.

5 2020年天津东丽区一百中学高三下学期高考模拟(4月)第5题

设函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 ().

- A. $y = f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
- B. $y = f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
- C. $y = f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称
- D. $y = f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

答案 D

解析 因为 $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 2x$, 所以 $y = \sqrt{2} \cos 2x$, 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减, 对称轴为 $2x = k\pi$, 即 $x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$. 故答案为D.

综合判断

6 2020年天津河北区高三二模第8题5分

已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x$, 则 ().

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
- B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 对称
- C. $f(x)$ 的最大值为2
- D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

答案 D

解析 A选项: $f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \cos^2 x$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2},$$

$$\therefore T_{\min} = \frac{2\pi}{2} = \pi, \text{ 故A错误.}$$

B选项：当 $x = -\frac{\pi}{12}$ 时， $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{3}{2} \neq \frac{1}{2} \neq 0$ ，

$\therefore$ 点 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 不是对称中心，故B错误。

C选项： $f(x)_{\max} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ，故C错误。

D选项：对称轴， $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，

$$2x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z}) ,$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}) ,$$

$$\text{当 } k = 0 \text{ 时, } x = \frac{\pi}{6} ,$$

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ 是对称轴，故D正确。

故选D。



三角函数解答

7

2017~2018学年10月天津南开区天津市南开中学高三上学期周测理科第16题13分

已知函数 $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x (x \in \mathbf{R})$ 。

(1) 求 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 的值。

(2) 求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间。

答案

(1) 2。

$$(2) T = \pi, \left[-\frac{5}{6}\pi + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}.$$

解析

$$(1) f(x) = -\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$$

$$= 2\sin\left(2x + \frac{7}{6}\pi\right),$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{2}{3}\pi + \frac{7}{6}\pi\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)$$

$$= 2.$$

$$(2) \because \omega = 2,$$

$$\therefore T = \pi,$$

$$2x + \frac{7}{6}\pi \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{得 } x \in \left[-\frac{5}{6}\pi + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z},$$

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{5}{6}\pi + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$.



三角函数的图像性质

8

2020年天津南开区高三二模第8题5分

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{6}$ 对称, 且与 x 轴交点的横坐标构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列, 则函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的一个单调减区间为 () .

- A. $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$
- B. $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$
- C. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$
- D. $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$

答案 A

解析

$\therefore f(x)$ 与 x 轴的交点的横坐标构成一个公差为 $\frac{\pi}{2}$ 的等差数列,

$$\therefore \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \text{周期 } T = \pi,$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \omega = 2,$$

又 $y = f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{5}{6}\pi$ 对称,

$$\therefore 2 \times \frac{5}{6}\pi + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$\text{由 } |\varphi| < \frac{\pi}{2} \text{ 可知 } \varphi = -\frac{\pi}{6},$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore f'(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\therefore 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \pi + 2k\pi,$$

$$\therefore \text{解得 } \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{7}{12}\pi + k\pi,$$

$$\text{令 } k = 0,$$

$$\therefore \frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{7}{12}\pi.$$

故选 A.

9 2020年天津宁河县芦台一中高三二模第8题5分

已知函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称且 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1$, $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调, 则 ω 可取数值的个数为 ().

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

答案 A

解析

$\because f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调, 即 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 同一单调区间内,

$$\therefore -\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$\therefore 0 < \omega \leq 8 \text{ ①}.$$

$\because$ 函数 $f(x) = \sqrt{2} \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称,

$\therefore$ 当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $f(x) = \pm\sqrt{2}$, 即 $\frac{\omega\pi}{2} + \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ ②}.$

由 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 1$, 可得如 $\sin\left(\omega \cdot \frac{3\pi}{8} + \varphi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore \omega \cdot \frac{3\pi}{8} + \varphi = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \text{ ③},$$

$$\text{或 } \omega \cdot \frac{3\pi}{8} + \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2m\pi, m, n \in \mathbf{Z} \text{ ④}.$$

故①②③成立, 或①②④成立.

$$\text{由②③可得 } \omega = 2 + (k - 2n) \cdot 8,$$

再结合①可得, $\omega = 2$; 此时, $k = 2n$,

$$\text{令 } n = 0, \text{ 可得 } \varphi = -\frac{\pi}{2}, f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right),$$

满足 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减,

$$\text{由②④可得 } \omega = -2 + (k - 2m) \cdot 8,$$

再结合①可得 $\omega = 6$, 此时, $k = 2m + 1$,

$$\text{令 } m = 1, \text{ 可得 } \varphi = \frac{\pi}{2}, f(x) = \sqrt{2} \sin\left(6x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$f(x)$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{4}\right]$ 上不单调, 故不满足条件.

综上所述, ω 可取数值的个数为 1.

10 2020年天津宁河县高三二模第8题5分

若函数 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递减, 且在区间 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上存在零点, 则 φ 的取值范围是 ().

- A. $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$
- B. $[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$
- C. $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$
- D. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

答案 D

解析 当 $x \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 时, $2x + \varphi \in [-\frac{\pi}{3} + \varphi, \frac{\pi}{3} + \varphi]$,
 又 $\varphi \in (0, \pi)$, $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递减,
 $\therefore [-\frac{\pi}{3} + \varphi, \frac{\pi}{3} + \varphi] \subseteq [0, \pi]$, 即 $\begin{cases} \varphi - \frac{\pi}{3} \geq 0 \\ \varphi + \frac{\pi}{3} \leq \pi \end{cases}$,
 $\therefore \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$,
 由 $\cos(2x + \varphi) = 0$, 得 $2x + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,
 $\therefore x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,
 $\therefore 0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} < \frac{\pi}{6}$, 解得 $\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2}$,
 综上, $\frac{\pi}{3} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$.
 故选 D.

2. 解三角形

基础应用

11 2020年天津南开区天津市南大奥宇学校高三二模第4题5分

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\cos A = \frac{7}{8}$, $c - a = 2$, $b = 3$, 则 a 等于 ().

- A. 2
- B. $\frac{5}{2}$
- C. 3
- D. $\frac{7}{2}$

答案 A

解析

由题意可得 $c = a + 2$, $b = 3$, $\cos A = \frac{7}{8}$,
 $\therefore$ 由余弦定理可得 $\cos A = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$,
 代入数据可得 $\frac{7}{8} = \frac{9 + (a+2)^2 - a^2}{2 \times 3(a+2)}$,
 解方程可得 $a = 2$.
 故选 A.

12 2020年天津和平区天津市耀华中学高三二模第4题5分

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$, 则 $\sin \angle BAC =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$
 C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

答案 C

解析

由 $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $AB = \sqrt{2}$, $BC = 3$, 由余弦定理得:
 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 2 + 9 - 6 = 5$, $\therefore AC = \sqrt{5}$, 由正弦定理得:
 $\sin \angle BAC = \frac{3\sqrt{10}}{10}$,
 故选 C.

13 2020年天津静海县高三二模第13题5分

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $\sqrt{2}a \sin C - c \cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 则
 $\cos A =$ _____.

答案 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析

$\therefore \sqrt{2}a \sin C - c \cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right) = 0$,
 $\therefore \sqrt{2} \sin A \sin C - \sin C \cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right) = 0$,
 $\therefore \sqrt{2} \sin A - \cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right) = 0$,

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\sin A - \cos A \cos \frac{\pi}{4} - \sin A \sin \frac{\pi}{4} &= 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin A - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos A &= 0, \sin\left(A - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \text{又 } A \in [0, \pi), \therefore A &= \frac{\pi}{4}, \text{ 故 } \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

 解答

14 2020年天津东丽区一百中学高三下学期高考模拟(4月)第16题

已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x - 1, x \in \mathbf{R}$.

- (1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期.
- (2) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c = \sqrt{6}, f(C) = 0$,
 $\sin C + \sin(B - A) = 2\sin 2A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

答案

- (1) $T = \pi$.
- (2) $\sqrt{3}$.

解析

- (1) $\because f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x - 1 = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x - 2 = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$.
 $\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
- (2) $\because f(x) = 2\sin\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] - 2$, 且 $f(C) = 0$,
 $\therefore \sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right) = 1$,
 $\because 0 < C < \pi$, 可得 $0 < 2C < 2\pi$,
 $\therefore -\frac{\pi}{6} < 2C - \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{6}$,
 $\therefore 2C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 可得 $C = \frac{\pi}{3}$,
 由 $\sin C + \sin(B - A) = 2\sin 2A$,
 得 $\sin(A + B) + \sin(B - A) = 2\sin 2A$,
 $\therefore \sin A \cos B + \cos A \sin B + \sin B \cos A - \cos B \sin A$
 $= 4\sin A \cos A$,
 整理得 $\sin B \cos A = 2\sin A \cos A$,
 若 $\cos A = 0$, 则 $A = \frac{\pi}{2}$, 又 $c = \sqrt{6}, \angle C = \frac{\pi}{3}$,
 $\therefore a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2}$.
 此时 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}bc = \sqrt{3}$.

若 $\cos A \neq 0$, 则 $\sin B = 2 \sin A$, 由正弦定理可知 $b = 2a$,

由余弦定理 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow 6 = a^2 + 4a^2 - 2a^2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$,

于是 $b = 2\sqrt{2}$.

此时 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \sqrt{3}$.

综上所述 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$.

15 2020年天津红桥区高三二模第16题15分

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 已知 $a = 1, b = 2, \cos C = \frac{1}{4}$.

(1) 求 c 的值.

(2) 求 $\sin\left(2C + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值.

答案

(1) $c = 2$.

(2) $\frac{\sqrt{15} - 7\sqrt{3}}{16}$.

解析

(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $a = 1, b = 2, \cos C = \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{5 - c^2}{4} \\ &= \frac{1}{4},\end{aligned}$$

解得 $c = 2$.

(2) $\because \cos C = \frac{1}{4}, 0 < C < \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{16}} \\ &= \frac{\sqrt{15}}{4},\end{aligned}$$

$$\text{则 } \sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{\sqrt{15}}{8}, \cos 2C = 2 \cos^2 C - 1 = -\frac{7}{8},$$

$$\therefore \sin\left(2C + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2C \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos 2C$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \sin 2C + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2C \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{7}{8} \\ &= \frac{\sqrt{15} - 7\sqrt{3}}{16}.\end{aligned}$$

16 2020年天津河西区天津市第四中学高三下学期高考模拟(4月)第16题14分

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos B = -\frac{1}{3}$, $b \sin B - a \sin A = 2c \sin C$.

(1) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{3}\right)$.

(2) 求 $\frac{a}{c}$ 的值.

答案

(1) $-\frac{4\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}$.

(2) $\frac{3}{2}$.

解析

(1) $\because \cos B = -\frac{1}{3}$,

$$\therefore \cos 2B = 2\cos^2 B - 1 = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9},$$

$\because B$ 为 $\triangle ABC$ 的内角,

$$\therefore 0 < B < \pi,$$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin\left(2B + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin 2B \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{3}, \\ &= -\frac{4\sqrt{2}}{9} \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{7}{9}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{4\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{18}. \end{aligned}$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\because b \sin B - a \sin A = 2c \sin C,$$

$$\therefore \text{由正弦定理得 } b^2 - a^2 = 2c^2,$$

$$\text{由余弦定理得 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= a^2 + c^2 + \frac{2}{3}ac,$$

$$\therefore a^2 + c^2 + \frac{2}{3}ac - a^2 = 2c^2, \text{ 即 } \frac{2}{3}ac = c^2,$$

$$\because c > 0,$$

$$\therefore \frac{2}{3}a = c, \text{ 即 } a = \frac{3}{2}c,$$

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{\frac{3}{2}c}{c} = \frac{3}{2}.$$

17 2020~2021学年天津南开区高三上学期期末第16题14分

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c , 且 $b - c = 1$, $\cos A = \frac{1}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$.

- (1) 求 a, b, c 的值.
- (2) 求 $\cos(2C + A)$ 的值.

答案

- (1) $a = 3, b = 3, c = 2$.
- (2) $-\frac{23}{27}$.

解析

- (1) 由 $\cos A = \frac{1}{3}$, $0 < A < \pi$, 得 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2}bc \sin A = 2\sqrt{2},$$

$$\text{解得 } bc = 6,$$

$$\text{又 } b - c = 1, \text{ 解得 } b = 3, c = 2,$$

$$\text{由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b - c)^2 + 2bc - \frac{2}{3}bc = 9,$$

$$\text{即 } a = 3.$$

- (2) 由(1)及正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\frac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{2}{\sin C}$,

$$\text{解得 } \sin C = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\text{因为 } c < b, \text{ 所以 } \cos C = \sqrt{1 - \sin^2 C} = \frac{7}{9},$$

$$\text{所以 } \sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{56\sqrt{2}}{81}, \cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = \frac{17}{81},$$

$$\text{所以 } \cos(2C + A) = \cos 2C \cos A - \sin 2C \sin A = \frac{17}{81} \cdot \frac{1}{3} - \frac{56\sqrt{2}}{81} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{23}{27}.$$

18 2020~2021学年天津和平区高三上学期期末第16题14分

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且满足 $a \sin A = 4b \sin B$,

$$ac = \sqrt{3}(a^2 - b^2 - c^2).$$

- (1) 求 $\cos A$ 的值.
- (2) 求 $\sin(2B + A)$ 的值.

答案

- (1) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- (2) $\frac{2\sqrt{6} - \sqrt{15}}{9}$.

解析

$$(1) \because a \sin A = 4b \cdot \sin B, \text{ 由正弦定理得: } a^2 = 4b^2, \text{ 即 } a = 2b,$$

$$\because ac = \sqrt{3}(a^2 - b^2 - c^2), \text{ 得 } b^2 + c^2 - a^2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}ac,$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3}ac}{2bc} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{3} \times 2bc}{2bc} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$(2) \because \cos A = -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{由正弦定理得: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = 2 \sin B,$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{6}}{6}, \text{ 则 } \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{\sqrt{30}}{6},$$

$$\therefore \sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \times \frac{\sqrt{6}}{6} \times \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\cos 2B = 1 - 2\sin^2 B = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \sin(2B + A) = \sin 2B \cos A + \cos 2B \sin A$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$= \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{15}}{9}.$$