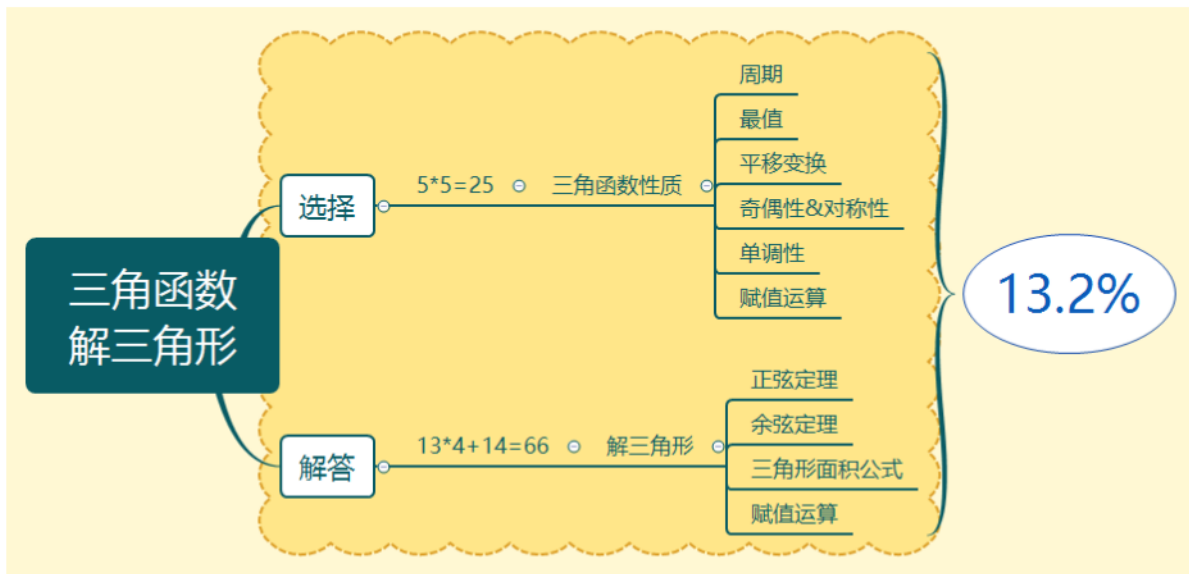


02三角函数及解三角形专项复习



1. 三角函数基础性应用



平移变换

1

2018年天津武清区高三二模理科（宝坻区，宁河区，蓟县区，静海区联考）第4题5分

要得到函数 $y = \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象，只需将函数 $y = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上的所有点的横坐标（ ）。

- A. 伸长到原来的2倍（纵坐标不变），再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度。
- B. 伸长到原来的2倍（纵坐标不变），再将得到的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度。
- C. 缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再将得到的图象向左平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位长度。
- D. 缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），再将得到的图象向右平移 $\frac{11\pi}{24}$ 个单位长度。

答案

A

解析

将函数 $y = \sqrt{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的2倍（纵坐标不变），得到 $y = \sqrt{3} \sin\left(\frac{1}{2} \times 2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，

再将得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得 $y = \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right)$ 图象。

故选A.

2 函数 $y = \sin 2x$ 的图象经过怎样的平移变换得到函数 $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ 的图象().

A. 向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度

B. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

答案 B

解析 解: 因为 $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right] = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,
 所以将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度即可得到函数 $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ 的图象,
 故选B.

奇偶性、对称性

3 2020年天津红桥区高三二模第7题5分

将函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 的图象沿 x 轴向右平移 m ($m > 0$)个单位长度, 所得函数的图象关于 y 轴对称, 则 m 的最小值是().

A. $-\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{12}$

C. $-\frac{\pi}{6}$

D. $\frac{\pi}{6}$

答案 D

解析 $\because$ 函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$,
 将函数 $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x$ 向左平移 m ($m > 0$)个单位得到函数
 $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3} - m\right)$,
 由题意可得 $-\frac{\pi}{3} - m = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,
 $\therefore m = -\frac{5}{6}\pi - k\pi, k \in \mathbf{Z}$,
 所以 m 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$.
 故选D.

4 2020年天津和平区高三二模第7题5分

把函数 $f(x) = A \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($A \neq 0$) 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x-m)$ ($m > 0$) 是偶函数, 则实数 m 的最小值是 ().

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{5\pi}{12}$ D. $\frac{\pi}{12}$

答案 C

解析 $g(x) = A \sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{6}\right]$
 $= A \sin\left(2x - \frac{2}{3}\pi\right),$
 $\therefore g(x-m)$ 的对称轴为 $x = 0,$
 $\therefore g(x)$ 的对称轴为 $x = -m,$
 即 $2x - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{2} + k\pi,$
 $x = \frac{7}{12}\pi + \frac{k}{2}\pi$
 $-m = \frac{7}{12}\pi + \frac{k}{2}\pi$
 $m = -\frac{7}{12}\pi - \frac{k}{2}\pi,$
 又 $\because m > 0,$
 $\therefore$ 当 $k = 2$ 时, m 最小为 $\frac{5}{12}\pi.$
 故选 C.

确定区间上单调性

5 2020~2021学年天津河北区高三上学期期末第8题5分

将函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则关于函数 $g(x)$ 的正确结论是 ().

- A. 奇函数, 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递减 B. 最大值为 1, 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称
 C. 最小正周期为 π , 图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ 对称 D. 偶函数, 在 $\left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ 上单调递增

答案 B

解析

A选项：将函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后得到函数

$g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$ 的图象，则关于函数 $g(x)$ ，显然它是偶函数，故A错误；

B选项：显然， $g(x)$ 的最大值为1，当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时， $g(x) = \cos \pi = -1$ ，为最小值，故 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称，故B正确；

C选项： $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ ，当 $x = \frac{3\pi}{8}$ 时， $g(x) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，故C错误；

D选项：当 $x \in \left(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$ ， $2x \in \left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ， $g(x)$ 没有单调性，故D错误；

故选B.



综合判断

6

2020~2021学年天津滨海新区高三上学期期末（七校联考）第8题5分

设函数 $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + 2 \sin x \cos x$ ，给出下列结论：

① $f(x)$ 的最小正周期为 π ；

② $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 对称；

③ $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 单调递减；

④ 把函数 $y = 2 \cos 2x$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，可得到函数 $y = f(x)$ 的图象.

其中所有正确结论的编号是 ().

A. ①④

B. ②④

C. ①②④

D. ①②③

答案

C

解析

$$f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + 2 \sin x \cos x = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right).$$

对于①， $f(x)$ 最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ，所以①对；

对于②， $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 \cos \left(2 \times \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cos(0) = 2$ ，所以②对；

对于③，求 $f(x)$ 的递减区间： $0 + 2\pi k \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \pi + 2\pi k \Rightarrow \frac{\pi}{12} + \pi k \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + \pi k$ ，

所以③错；

对于④，把函数 $y = 2 \cos 2x$ 的图象上所有点向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，

得到如下函数： $y = 2 \cos 2 \left(x - \frac{\pi}{12} \right) = 2 \cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$ ，所以④对.

故选C.

7 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十一中学高三上学期月考第7题4分

已知函数 $f(x) = \sin x + \cos x$, 下列结论错误的是 () .

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π B. $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{4}$ 对称
C. $\frac{7\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 的一个零点 D. $f(x)$ 在区间 $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ 单调递减

答案 D

解析

A选项：函数 $f(x) = \sin x + \cos x$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right)$$

$$= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right),$$

函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$, 故A正确 ;

B选项：令 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

则函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

当 $k = 1$ 时 , 函数 $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{5\pi}{4}$, 故B正确 ;

C选项：令 $x + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$f(x)$ 的零点为 $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

当 $k = 2$ 时 , 函数 $f(x)$ 的一个零点为 $\frac{7\pi}{4}$, 故C正确 ;

D选项： $\because \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right] (k \in \mathbf{Z})$ 上为减函数 , 故D错误 .

故选D.

8 2020年天津南开区天津中学高三下学期高考模拟 (3月) 第8题

关于函数 $f(x) = \cos x + \sin |x|$ 有下述四个结论 :

- ① $f(x)$ 的周期为 2π ;
 ② $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上单调递增 ;
 ③ 函数 $y = f(x) - 1$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 3 个零点 ;
 ④ 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$.

其中所有正确结论的编号为 () .

A. ①②

B. ②③

C. ③④

D. ②④

答案 C

解析

对于①, $\because f(x) = \cos x + \sin|x|$,

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}+1}{2},$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{11\pi}{6}\right) &= \cos\frac{11\pi}{6} + \sin\frac{11\pi}{6} \\ &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \end{aligned}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) \neq f\left(\frac{11\pi}{6}\right),$$

所以, 函数 $y = f(x)$ 的周期不是 2π , 命题①错误;

对于②, 当 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$ 时,

$$f(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{则 } x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right],$$

所以, 函数 $y = f(x)$ 在区间 $\left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$ 上不单调, 命题②错误;

对于③, $f(-x) = \cos(-x) + \sin|-x| = \cos x + \sin|x| = f(x)$,

且该函数的定义域为 $\mathbf{R}$, 则函数 $y = f(x)$ 为偶函数,

当 $x \in [0, \pi]$ 时,

$$f(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4},$$

$$\text{令 } f(x) - 1 = 0 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{可得 } x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ 或 } x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4},$$

解得 $x = 0$ 或 π ,

由于函数 $y = f(x)$ 为偶函数,

则方程 $f(x) - 1 = 0$ 在区间 $[-\pi, 0)$ 上的实根为 $x = -\pi$.

所以, 函数 $y = f(x) - 1$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 3 个零点, 命题③正确;

对于④, 当 $x \geq 0$ 时,

$$f(x) = \cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

所以, 函数 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最小值为 $-\sqrt{2}$,

由于函数 $y = f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

则该函数在 $(-\infty, 0)$ 上的最小值为 $-\sqrt{2}$.

因此, 函数 $y = f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$, 命题④正确.

故选: C.

9

2020~2021 学年天津南开区天津市南开中学高三上学期期末第 8 题

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 其图象相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 且函数 $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 是偶函数. 关于函数 $f(x)$ 给出下列命题:

- ① 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -\frac{5\pi}{12}$ 轴对称;
- ② 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 中心对称;
- ③ 函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减;
- ④ 把函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$, 然后再将所得的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 单位长度, 即可得到函数 $y = f(x)$ 的图象.

其中真命题共有 () 个.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 C

解析

由题知: $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$,

$$\therefore T = \pi,$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2,$$

$$f(x) = \sin(2x + \varphi),$$

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2x + \varphi + \frac{\pi}{6}\right) \text{ 为偶函数,}$$

$$\therefore \varphi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{又: } |\varphi| < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{对称轴: 令 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$k = -1 \text{ 时, } x = -\frac{5}{12}\pi, \text{ 故①正确;}$$

$$\text{对称中心: 令 } 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 故②正确;}$$

$$\text{递减: } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 故③正确;}$$

$$y = \sin x \text{ 变换后为 } y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right), \text{ 故④错误.}$$

故选C.



三角函数解答

10

2020年天津南开区天津市南大奥宇学校高三二模第16题

$$\text{已知函数 } f(x) = 2\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin(x + \pi).$$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域和最小正周期.

(2) 若将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 求函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值和最小值.

答案

(1) 定义域为 $\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

$$\text{最小正周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi.$$

(2) 最大值是2, 最小值是-1.

解析

(1) 由题意, $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$

$$\text{解得: } x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

$$\text{函数 } f(x) = 2\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin(x + \pi).$$

$$\text{化解可得: } f(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin x$$

$$= \sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x$$

$$= \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

$$= 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\therefore f(x) \text{ 的最小正周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi.$$

(2) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到 $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$, 即 $g(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

$$\because x \in [0, \pi] \text{ 时, } x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right].$$

$\therefore$ 当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 时, 函数 $g(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 取得最大值为 2.

$\therefore$ 当 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$ 时, 函数 $g(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 取得最小值为 -1.

故得函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的最大值是 2, 最小值是 -1.

2. 三角函数的图像性质

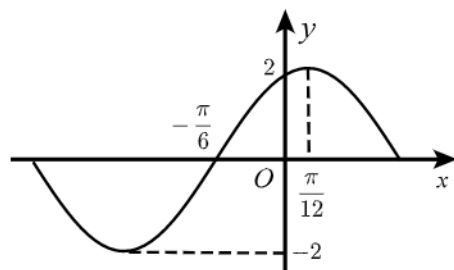


根据已知图像确定周期和相位参数

11

2020~2021 学年天津高三上学期期末 (部分区) 第 13 题 5 分

将函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 所得函数的部分图象如图所示, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.



答案

$$2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

解析

将函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象上所有点向左平行移动 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,

所得函数 $g(x) = A \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\omega + \varphi\right)$,

由 $g(x)$ 图象可得 $A = 2$, $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4}$,

所以 $T = \pi$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$,

因为 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2$, 所以 $2 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 2$, $2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\varphi = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$,

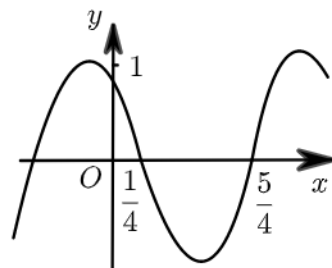
因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$,

所以 $f(x) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

故答案为 : $2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

12 2019~2020学年广东深圳龙华区深圳市龙华中学高一上学期期末第8题4分

函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 () .



A. $\left(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$

B. $\left(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$

C. $\left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$

D. $\left(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$

答案 D

解析 方法一: 若 $\omega > 0$, 观察题中的函数图象, 得 $T = 2 \times \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) = 2 = \frac{2\pi}{\omega}$, 从而 $\omega = \pi$,

所以 $f(x) = \cos(\pi x + \varphi)$.

将点 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 的坐标代入上式, 得 $0 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$.

结合图象, 得 $\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

取 $k = 0$, 得 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 所以 $f(x) = \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$,

由 $2k\pi < \pi x + \frac{\pi}{4} < \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

解得 $2k - \frac{1}{4} < x < 2k + \frac{3}{4} (k \in \mathbf{Z})$,

当 $\omega < 0$ 时, 所得单调区间与 $\omega > 0$ 时一样 .

故选 D .

方法二: 由五点作图知, $\begin{cases} \frac{1}{4}\omega + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{5}{4}\omega + \varphi = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$,

可得 $\omega = \pi, \varphi = \frac{\pi}{4}$,

所以 $f(x) = \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$,

令 $2k\pi < \pi x + \frac{\pi}{4} < 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $2k - \frac{1}{4} < x < 2k + \frac{3}{4}, k \in \mathbf{Z}$,
故单调减区间为 $\left(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}\right), k \in \mathbf{Z}$.
故选D.

利用题目分析出图像情况

13 2020年天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高三二模第7题5分

已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$, 其中 $\omega > 0, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象, 则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 ().

- A. $\left[k\pi - \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$ B. $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right] (k \in \mathbf{Z})$
C. $\left[k\pi + \frac{\pi}{3}, k\pi + \frac{5\pi}{6}\right] (k \in \mathbf{Z})$ D. $\left[k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$

答案 B

解析 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \theta)$, 其中 $\omega > 0, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称,

对满足 $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$ 的 x_1, x_2 , 有 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\omega}$,

$\therefore \omega = 2$,

再根据其图象关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 可得 $2 \times \frac{\pi}{6} + \theta = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}, \therefore f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x$ 的图象,

令 $2k\pi \leq 2x \leq 2k\pi + \pi$, 求得 $k\pi \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{2}$,

则函数 $g(x)$ 的单调递减区间是 $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbf{Z}$.

故选B.

14 2020~2021学年天津和平区高三上学期期末第8题5分

设函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\omega > 0, |\varphi| < \pi$, 若 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2, f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, 且 $f(x)$ 的最小正周期大于 2π , 则 ().

A. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{24}$
 C. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = \frac{\pi}{12}$

B. $\omega = \frac{2}{3}, \varphi = -\frac{11\pi}{12}$
 D. $\omega = \frac{1}{3}, \varphi = \frac{7\pi}{24}$

答案 C

解析

由 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 2, f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 0$, $f(x)$ 最小正周期 $T > 22$,

$$\text{得: } \frac{11\pi}{8} - \frac{5\pi}{8} = \frac{3\pi}{4} = \frac{T}{4},$$

$$T = 3\pi = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$\text{得 } \omega = \frac{2}{3}, \text{ 即 } f(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x + \varphi\right),$$

且 $f(x)$ 过 $\left(\frac{5\pi}{8}, 2\right)$, 即

$$2\sin\left(\frac{2}{3} \times \frac{5\pi}{8} + \varphi\right) = 2,$$

$$\frac{5\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \text{ 且 } |\varphi| < \pi,$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{12}.$$

故选 C.

15 2020年天津南开区天津市第二十五中学高三下学期高考模拟(3月)第5题5分

已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + 3\cos\omega x (\omega > 0)$, 对任意的 x_1, x_2 , 当 $f(x_1)f(x_2) = -12$ 时,

$|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$. 则下列判断正确的是().

A. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$

B. 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上递增

C. 函数 $f(x)$ 的一条对称轴是 $x = \frac{7\pi}{6}$

D. 函数 $f(x)$ 的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$

答案 D

解析

$$\because f(x) = \sqrt{3}\sin\omega x + 3\cos\omega x = 2\sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{又 } \because -1 \leq \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \text{ 即 } -2\sqrt{3} \leq 2\sqrt{3}\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ 有且仅有 $-2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = -12$ 满足条件;

$$\text{又 } |x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \pi,$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2,$$

$\therefore$ 函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

A选项: $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3} = 3$, 故A错误;

B选项: 由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

解得 $-\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 故B错误;

C选项: 当 $x = \frac{7\pi}{6}$ 时, $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{7\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\sin\frac{2\pi}{3}$, 故C错误;

D选项: 由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 故D正确.

故选D.

零点问题

16 2020年天津高三二模十二重点中学毕业班联考(二)第8题5分

已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) (\omega > 0)$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上有且只有两个零点, 则 ω 的取值范围为 ().

A. $\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right)$

B. $\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right]$

C. $\left(\frac{5}{6}, \frac{11}{6}\right)$

D. $\left(\frac{5}{6}, \frac{11}{6}\right]$

答案 B

解析

$\because x \in (0, \pi), \omega > 0$,

$\therefore \omega x - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \omega\pi - \frac{\pi}{6}\right)$,

由 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $(0, \pi)$ 上恰有2个零点可得:

$\because y = \sin x$, 当 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $y = 0$,

$\therefore x > -\frac{\pi}{6}$ 时, $y = \sin x$ 恰有2个零点, 只能是 $0, \pi$,

$\therefore \pi < \omega\pi - \frac{\pi}{6} \leq 2\pi$,

$\frac{7\pi}{6} < \omega\pi \leq \frac{13\pi}{6}$,

解得: $\frac{7}{6} < \omega \leq \frac{13}{6}$,

$\therefore \omega$ 的取值范围是 $\left(\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right]$.

故选B.

17 2020年天津河西区天津市第四中学高三下学期高考模拟(4月)第7题5分

已知函数 $f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2}$, ($\omega > 0, x \in \mathbf{R}$), 若 $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 则 ω 的取值范围是 ().

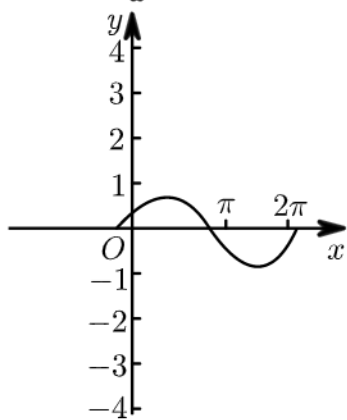
- A. $(0, \frac{5}{12}]$ B. $(0, \frac{5}{12}] \cup [\frac{5}{6}, \frac{11}{12})$ C. $(0, \frac{5}{6}]$ D. $(0, \frac{5}{12}] \cup [\frac{5}{6}, \frac{11}{12}]$

答案 D

解析

$$\text{函数 } f(x) = \cos^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cos \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right),$$

可得 $T = \frac{2\pi}{\omega} \geq \pi, 0 < \omega \leq 2$, $f(x)$ 在区间 $(\pi, 2\pi)$ 内没有零点, 函数的图象如图两种类型,



结合三角函数可得: $\begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} \geq 0 \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq \pi \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \omega\pi + \frac{\pi}{6} \geq \pi \\ 2\omega\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \end{cases}$,

解得 $\omega \in (0, \frac{5}{12}] \cup [\frac{5}{6}, \frac{11}{12}]$.

故选: D.

3. 解三角形

基础应用

18 2020年天津河西高三二模第5题5分

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的面积为 S , $3c^2 = 16S + 3(b^2 - a^2)$, 则 $\tan B = ()$.

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

答案 D

解析

根据面积公式, $S = \frac{1}{2}ac \sin B$,

则原式可整理为:

$$3c^2 = 16 \times \frac{1}{2}ac \sin B + 3b^2 - 3a^2,$$

$$3(c^2 + a^2 - b^2) = 8ac \sin B,$$

$$(a^2 + c^2 - b^2) = \frac{8}{3}ac \sin B,$$

根据余弦定理:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{\frac{8}{3}ac \sin B}{2ac} = \frac{4}{3} \sin B,$$

$$\text{即} \tan B = \frac{3}{4}.$$

故选D.

19 2020~2021学年12月河南郑州中原区郑州市第十九中学高二上学期月考第3题5分

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 已知 $\sin B + \sin A(\sin C - \cos C) = 0, a = 2, c = \sqrt{2}$, 则 $C = (\quad)$.

A. $\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{3}$

答案 B

解析

因为 $\sin B + \sin A(\sin C - \cos C) = 0$,

所以 $\sin(A + C) + \sin A \sin C - \sin A \cos C = 0$,

所以 $\sin A \cos C + \cos A \sin C + \sin A \sin C - \sin A \cos C = 0$,

整理得 $\sin C(\sin A + \cos A) = 0$,

因为 $\sin C \neq 0$,

所以 $\sin A + \cos A = 0$,

所以 $\tan A = -1$,

因为 $A \in (0, \pi)$,

$$\text{所以} A = \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{由正弦定理得} \sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } 0 < C < \frac{\pi}{4},$$

$$\text{所以 } C = \frac{\pi}{6}.$$

故选B.



边角互化范围问题

20

2020年天津塘沽区天津市塘沽区第一中学高三二模第14题5分

若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}(a^2 + c^2 - b^2)$, 且 $\angle C$ 为钝角, 则 $\angle B =$ _____ ; $\frac{c}{a}$ 的取值范围是 _____ .

答案

1: 45°

2: $(\sqrt{2}, +\infty)$

解析

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}(a^2 + c^2 - b^2),$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B,$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\therefore a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{4} \times 2ac \cos B,$$

$$\therefore \sin B = \cos B,$$

$$\therefore \tan B = 1,$$

$$\text{① } \therefore \angle B = 45^\circ,$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin C}{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - C\right)}$$

$$= \frac{\sin C}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin C}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\tan C + \frac{\sqrt{2}}{2}},$$

$$\therefore C \text{ 为钝角, 且 } C \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\therefore \frac{c}{a} \in (\sqrt{2}, +\infty).$$

21

2020年天津和平区高三三模第16题14分

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c 且 $2a - c = 2b \cos C$.

- (1) 求 $\sin\left(\frac{A+C}{2} + B\right)$ 的值.
- (2) 若 $b = \sqrt{3}$, 求 $c - a$ 的取值范围.

答案

- (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- (2) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

解析

- (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $2a - c = 2b \cos C$,

由正弦定理得:

$$2 \sin A - \sin C = 2 \sin B \cos C,$$

$$\because A + B + C = \pi,$$

$$\therefore A = \pi - (B + C),$$

$$\therefore \sin A = \sin[\pi - (B + C)]$$

$$= \sin(B + C)$$

$$= \sin B \cos C + \cos B \sin C,$$

$$\therefore 2 \sin B \cos C + 2 \cos B \sin C - \sin C = 2 \sin B \cos C,$$

$$\therefore 2 \cos B \sin C - \sin C = 0,$$

由 $0 < C < \pi$, 得 $\sin C \neq 0$,

$$\therefore 2 \cos B - 1 = 0,$$

$$\text{即} \cos B = \frac{1}{2},$$

$$\because 0 < B < \pi,$$

$$\therefore B = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \frac{A+C}{2} = \frac{\pi - B}{2} = \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore \sin\left(\frac{A+C}{2} + B\right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- (2) 由(1)得, $B = \frac{\pi}{3}$,

$$\because b = \sqrt{3},$$

$\therefore$ 由正弦定理得:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2,$$

$$\therefore a = 2 \sin A, c = 2 \sin C,$$

$$\begin{aligned}
 &\because A + B + C = \pi, \\
 &\therefore C = \frac{2\pi}{3} - A, \\
 &\therefore c - a = 2 \sin C - 2 \sin A \\
 &= 2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - A \right) - 2 \sin A \\
 &= 2 \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cos A - \cos \frac{2\pi}{3} \sin A \right) - 2 \sin A \\
 &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A \right) - 2 \sin A \\
 &= \sqrt{3} \cos A - \sin A \\
 &= 2 \cos \left(A + \frac{\pi}{6} \right), \\
 &\because \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}, \\
 &\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos \left(A + \frac{\pi}{6} \right) < \frac{\sqrt{3}}{2}, \\
 &\therefore -\sqrt{3} < 2 \cos \left(A + \frac{\pi}{6} \right) < \sqrt{3}, \\
 &\therefore c - a \text{ 的取值范围是 } (-\sqrt{3}, \sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

4. 解三角形解答

22 2020年天津南开区天津市第二十五中学高三下学期高考模拟(3月)第16题

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $c \sin A = a \sin \left(C + \frac{\pi}{3} \right)$.

- (1) 求角 C 的大小.
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, $a - b = 1$, 求 c 和 $\cos(2A - C)$ 的值.

答案

- (1) $\frac{\pi}{3}$.
- (2) $c = \sqrt{13}$, $\cos(2A - C) = \frac{1}{26}$.

解析

- (1) $\because c \sin A = a \sin \left(C + \frac{\pi}{3} \right)$,
 $\therefore c \sin A = a \left(\frac{1}{2} \sin C + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C \right)$,
 由正弦定理可得 $\sin A \sin C = \frac{1}{2} \sin A \sin C + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos C$,
 $\therefore \frac{1}{2} \sin A \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos C$,
 $\because A \in (0, \pi)$, $\sin A > 0$,
 $\therefore \sin C = \sqrt{3} \cos C$, 可得 $\tan C = \sqrt{3}$,

由 $C \in (0, \pi)$, 可得 $C = \frac{\pi}{3}$.

(2) $\because C = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, $a - b = 1$ ①,

$$\therefore 3\sqrt{3} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{\sqrt{3}}{4}ab, \text{ 解得 } ab = 12 \text{ ②},$$

$$\therefore (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 24 = 1,$$

$$\text{可得 } a^2 + b^2 = 25,$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得 } c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$$

$$= \sqrt{25 - 12}$$

$$= \sqrt{13},$$

$$\therefore \text{由 ①② 可得 } b^2 + b - 12 = 0,$$

$$\text{解得 } b = 3, \text{ 可得 } a = 4,$$

$$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{9 + 13 - 16}{2 \times 3 \times \sqrt{13}}$$

$$= \frac{\sqrt{13}}{13},$$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{39}}{13},$$

$$\text{可得 } \cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = -\frac{11}{13},$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{13}}{13} \times \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{13},$$

$$\therefore \cos(2A - C) = \cos 2A \cos C + \sin 2A \sin C$$

$$= \left(-\frac{11}{13}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{13} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{26}.$$

23 2020年天津河北区高三二模第16题14分

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 满足 $b^2 + c^2 - a^2 = c(a \cos C + c \cos A)$.

(1) 求角 A 的大小.

(2) 若 $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 $\sin(2B + A)$ 的值.

(3) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $a = 3$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

答案

- (1) $\frac{\pi}{3}$.
 (2) $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$.
 (3) 8 .

解析

- (1) $\because b^2 + c^2 - a^2 = c(a \cos C + c \cos A)$,
 由余弦定理得 , $b^2 + c^2 - a^2 = c \left(a \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$,
 化简得 , $b^2 + c^2 - a^2 = bc$.
 $\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$.
 又 $0 < A < \pi$,
 $\therefore A = \frac{\pi}{3}$.
- (2) 由已知得 , $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,
 $\therefore \sin 2B = 2 \sin B \cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,
 $\cos 2B = 2 \cos^2 B - 1 = -\frac{1}{3}$.
 $\therefore \sin(2B + A) = \sin\left(2B + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= \sin 2B \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{3}$
 $= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$.
- (3) $\therefore S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,
 $\therefore bc = \frac{16}{3}$.
 由余弦定理得 , $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b+c)^2 - 2bc - 2bc \cos A$,
 解得 $b+c=5$.
 $\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=8$.

24

2020年天津高三上学期高考模拟第16题15分

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $3(a-c)^2 = 3b^2 - 2ac$.

- (1) 求 $\cos B$ 的值 .
 (2) 若 $5a = 3b$,
 ① 求 $\sin A$ 的值 .
 ② 求 $\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值 .

答案

(1) $\cos B = \frac{2}{3}$.

(2) ① $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

② $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$.

解析

(1) 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\text{由 } 3(a-c)^2 = 3b^2 - 2ac,$$

$$\text{整理得 } \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{又由余弦定理, 可得 } \cos B = \frac{2}{3}.$$

(2) ① 由(1)可得 $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

$$\text{又由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ 及已知 } 5a = 3b,$$

$$\text{可得 } \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

② 由(1)可得 $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = \frac{3}{5}$.

$$\text{由已知 } 5a = 3b \text{ 可得 } a < b,$$

$$\text{故有 } A < B,$$

$$\text{所以 } A \text{ 为锐角,}$$

$$\text{故由 } \sin A = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{可得 } \cos A = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{从而有 } \sin 2A = 2 \sin A \cos A = \frac{4}{5},$$

$$\text{所以,}$$

$$\sin\left(2A + \frac{\pi}{6}\right) = \sin 2A \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2A \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}+3}{10}.$$

25

2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高三上学期期末第16题14分

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $2a \sin A = (2b+c) \sin B + (b+2c) \sin C$.

(1) 求角 A 的大小.

(2) 若 $a = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

答案

(1) $\frac{2\pi}{3}$.

(2) $\sqrt{3}$.

解析

(1) $\because 2a \sin A = (2b + c) \sin B + (b + 2c) \sin C$.

由正弦定理得： $2a^2 = (2b + c)b + (b + 2c)c$,

即 $2a^2 = 2b^2 + bc + bc + 2c^2$,

$\therefore 2(b^2 + c^2 - a^2) = -2bc$,

$\therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$,

即 $\cos A = -\frac{1}{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $A \in (0, \pi)$,

$\therefore A = \frac{2\pi}{3}$.

(2) 由(1)知 $A = \frac{2\pi}{3}$,

$\therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

即 $-\frac{1}{2} = \frac{b^2 + c^2 - 12}{2bc}$,

$\therefore 12 - bc = b^2 + c^2$.

根据基本不等式得： $b^2 + c^2 \geq 2bc$,

$\therefore 12 - bc \geq 2bc$,

$\therefore bc \leq 4$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}bc$

$\leq \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \sqrt{3}$, 当且仅当 $b = c = 2$ 时, $S_{\triangle ABC}$ 取最大值 $\sqrt{3}$.