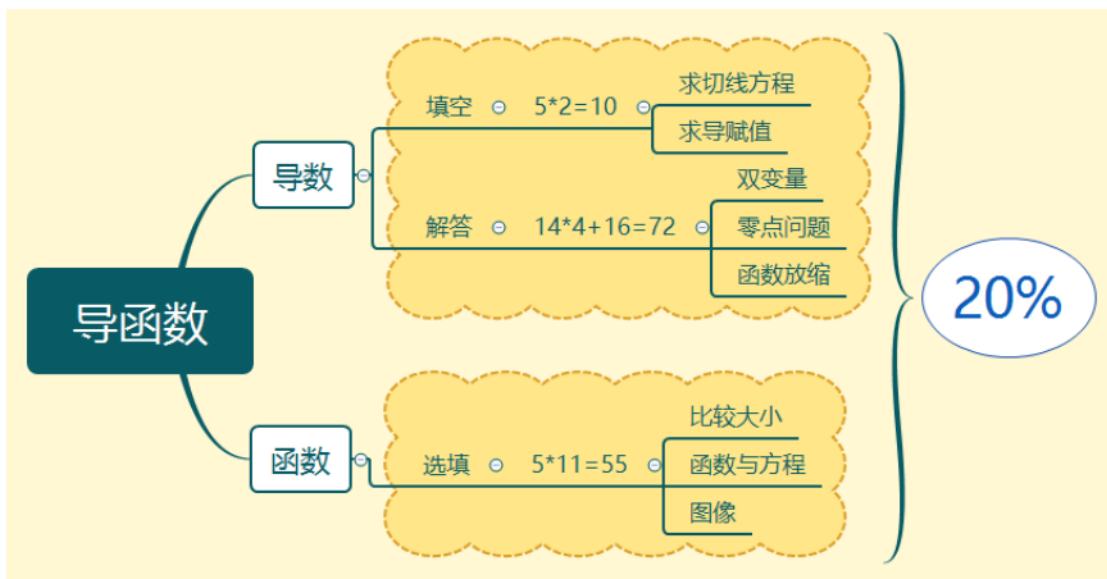


01导函数专项复习



1. 导函数的基础应用



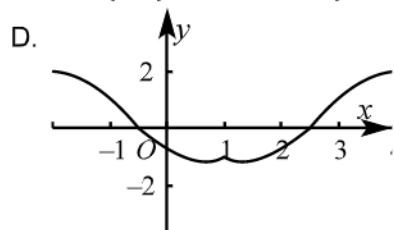
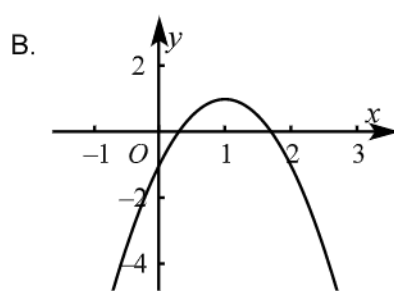
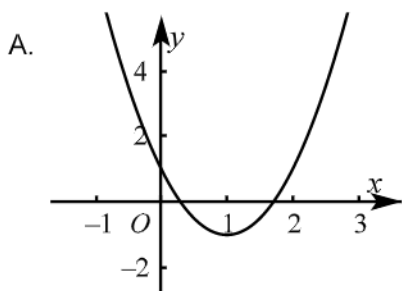
图像判定

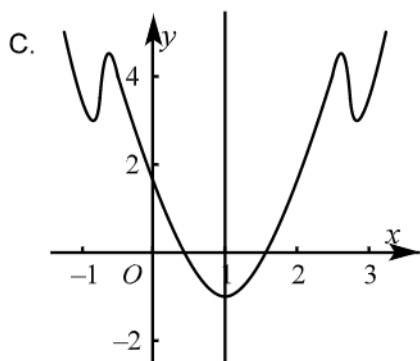
此类题目多出现于选择题部分，题号靠前，难度较低

主要解题办法及思路：**赋值、判断奇偶、判断单调性、判断正负**

1 2020年天津河西区高三二模第7题5分

函数 $f(x) = e^{|x-1|} - 2 \cos(x-1)$ 的部分图象可能是 () .





教法备注

【特殊位置赋值及单调性判断】

观察图像，可借由特殊位置 $x = 1$ $x = 0$ 处的赋值排除B、D

再观察剩下的A、C，差别主要是 $x \in (2, 3)$ 时的单调性，求导判断后，可知选A

答案 A

解析 因为 $f(1) = -1$ ，所以排除B；

因为 $f(0) = e - 2\cos 1 > 0$ ，所以排除D；

因为当 $x > 2$ 时， $f(x) = e^{x-1} - 2\cos(x-1)$ ，

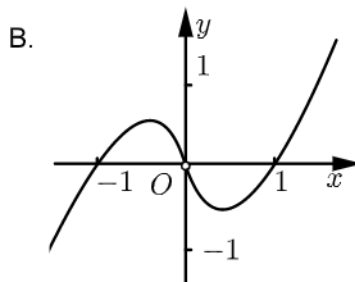
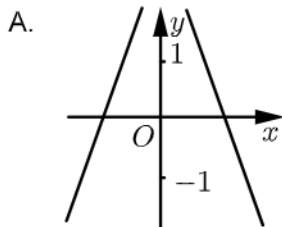
所以 $f'(x) = e^{x-1} + 2\sin(x-1) > e - 2 > 0$ ，

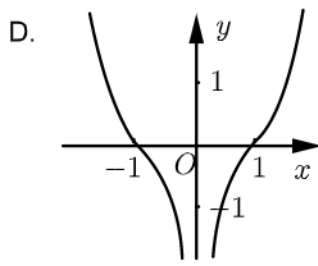
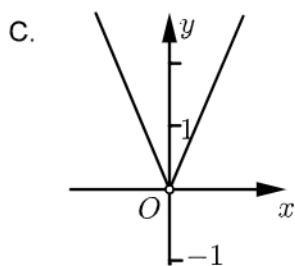
即 $x > 2$ 时， $f(x)$ 具有单调性，排除C。

故选A。

2 2019~2020学年10月山东潍坊高三上学期月考第7题4分

函数 $f(x) = (3^x + 3^{-x}) \lg|x|$ 的图象大致为 ()。





教法备注

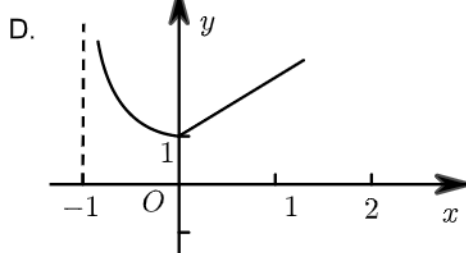
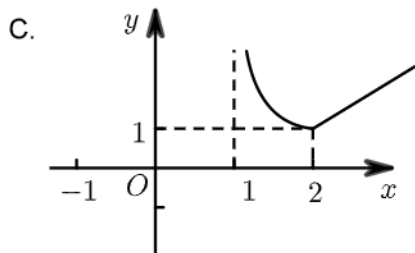
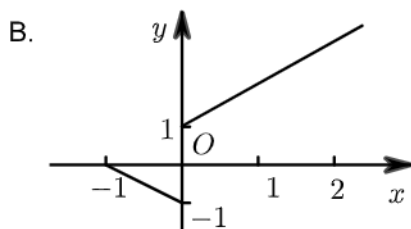
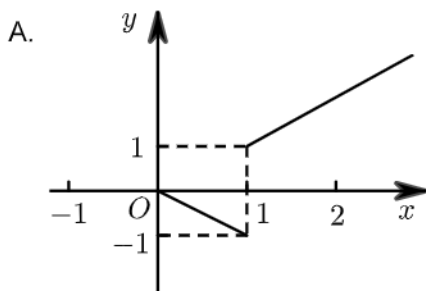
【判断奇偶性&正负】

答案 D

解析 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$ ，因为 $f(-x) = (3^{-x} + 3^x) \lg|-x| = f(x)$ ，
所以 $f(x)$ 为偶函数，
排除 B；
当 $0 < x < 1$ 时， $\lg x < 0$ ， $3^x + 3^{-x} > 0$ ，
所以 $f(x) = (3^x + 3^{-x}) \lg x < 0$ ，
排除 A，C。
故选 D。

3 2020年天津宁河县芦台一中高三二模第4题5分

已知函数 $f(x) = e^{|\ln x|}$ ，则函数 $y = f(x+1)$ 的图像大致为 ()。



教法备注

【函数图像的识别与平移】

答案 D

解析 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = e^{\ln x} = x$, 其图像为一条直线;

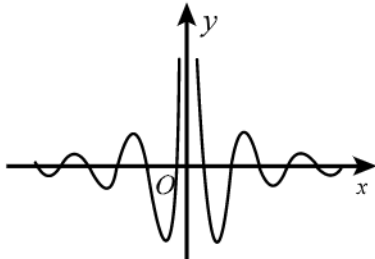
当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$, 函数 $y = f(x+1)$ 的图像为函数 $y = f(x)$ 的图像向左平移1个单位长度后得到的.

故选D.

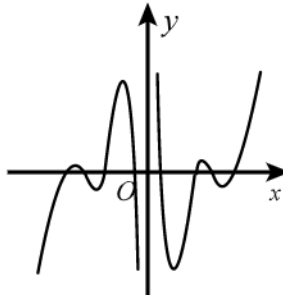
4 2020~2021学年天津南开区天津市南开中学高三上学期期末第5题

若函数 $f(x) = \frac{\cos 6x}{2^x - 2^{-x}}$ 的图象大致为 ().

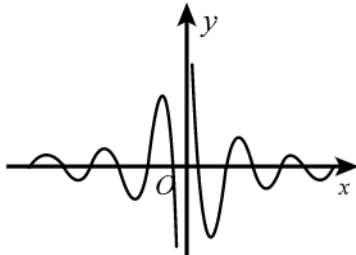
A.



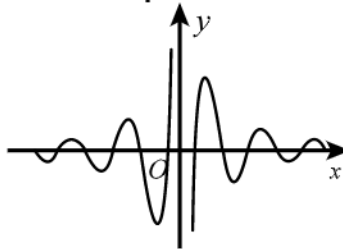
B.



C.



D.



教法备注

【函数在逼近0或者无穷远处的趋势】

由于函数是奇函数, 可以排除A;

根据 $x \rightarrow 0^+$ 时, 函数值 $f(x) \rightarrow +\infty$, 排除D;

根据 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数值 $f(x) \rightarrow 0$, 排除B;

答案 C

解析

$$\because f(x) = \frac{\cos 6x}{2^x - 2^{-x}},$$

$$\therefore f(-x) = \frac{\cos(-6x)}{2^{-x} - 2^x}$$

$$= \frac{\cos 6x}{2^{-x} - 2^x} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数，故排除A选项；

$$\because \lim_{x \rightarrow 0} \cos 6x \rightarrow 1, \lim_{x \rightarrow 0} 2^x - 2^{-x} \rightarrow 0,$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow +\infty, \text{ 故排除D选项；}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - 2^{-x} \rightarrow 2^{+\infty} - 2^{-\infty} \rightarrow +\infty,$$

而 $\cos 6x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为振荡函数且 $-1 \leq \cos 6x \leq 1$,

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow 0$ ，故排除B选项。



比较大小

5

2020~2021学年天津南开区高三上学期期末第7题5分

已知函数 $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$ ，且 $a = f(0.2^{0.2})$ ， $b = f(\log_3 4)$ ， $c = f(\log_{\frac{1}{3}} 3)$ ，则 a, b, c 的大小关系为 ()。

A. $a < b < c$

B. $c < b < a$

C. $c < a < b$

D. $a < c < b$

教法备注

【结合奇偶性、单调性】

判断函数奇偶性——为**偶函数**

判断 $x > 0$ 时函数的单调性——**单增（无需求导）**

答案

D

解析

$$\because f(-x) = \ln \sqrt{(-x)^2 + 1} = \ln \sqrt{x^2 + 1} = f(x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 为偶函数，

$$\text{又} \because f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + 1},$$

当 $x > 0$ 时，

$f'(x) > 0$ ，即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，

$$\therefore 0.2^{0.2} < 0.2^0 = 1 \Rightarrow a = f(0.2^{0.2}) < f(1),$$

$$\log_3 4 > \log_3 3 = 1 \Rightarrow b = f(\log_3 4) > f(1),$$

$$c = f\left(\log_{\frac{1}{3}} 3\right) = f(-1) = f(1),$$

即可得： $b > c > a$.

故选D .

6 2020年天津南开区天津中学高三下学期高考模拟（3月）第6题

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$ ，且在区间 $[1, 2]$ 上是减函数，令 $a = \ln 2$ ，

$b = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ， $c = \log_{\frac{1}{2}} 2$ ，则 $f(a)$ ， $f(b)$ ， $f(c)$ 的大小关系为（ ） .

- A. $f(b) < f(c)$ B. $f(a) < f(c) < f(b)$ C. $f(c) < f(b) < f(a)$ D. $f(c) < f(a) < f(b) < f(a)$

教法备注

【结合函数的单调性&线对称】

题干第一个等式表示函数关于 $x = 1$ 对称

答案 C

解析 $\because f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且满足 $f(x+2) = -f(x)$ ，

$$\therefore f(x+2) = f(-x),$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = 1$ 对称；

$\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 是减函数，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上为增函数，且 $f(2) = f(0) = 0$ ，

由题知 $c = -1$ ， $b = 2$ ， $0 < a < 1$ ，

$$\therefore f(c) < f(b) < f(a).$$

故选C .

7 2007年高考真题天津卷理科第9题5分

设 a, b, c 均为正数，且 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ ， $\left(\frac{1}{2}\right)^b = \log_{\frac{1}{2}} b$ ， $\left(\frac{1}{2}\right)^c = \log_2 c$ ，则（ ） .

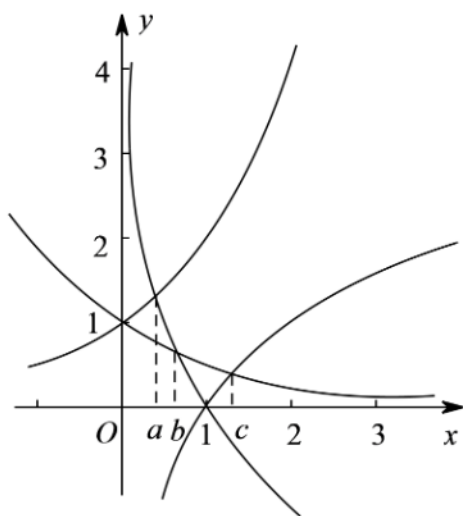
- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

教法备注

【利用题目涉及的函数图像 判断交点位置进行比较】

答案 A

解析 方法一：分别作出四个函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = 2^x$, $y = \log_2 x$ 的图象，观察它们的交点情况。



由图象知：

$$\therefore a < b < c .$$

故选：A .

方法二：因为 a, b, c 均为正数，

所以由指数函数和对数函数的单调性得：

$$\log_{\frac{1}{2}} a = 2^a > 1 \Rightarrow 0 < a < \frac{1}{2} ,$$

$$\log_{\frac{1}{2}} b = \left(\frac{1}{2}\right)^b \in (0, 1) \Rightarrow \frac{1}{2} < b < 1 ,$$

$$\log_2 c = \left(\frac{1}{2}\right)^c > 0 \Rightarrow c > 1 ,$$

所以 $a < b < c$,

故选A .

8

2009年高考真题全国卷II理科第7题5分

设 $a = \log_3 \pi$, $b = \log_2 \sqrt{3}$, $c = \log_3 \sqrt{2}$, 则 () .

A. $a > b > c$

B. $a > c > b$

C. $b > a > c$

D. $b > c > a$

教法备注

【二分法】

同在 $(0, 1)$ 区间的 b, c 与 $\frac{1}{2}$ 比较大小

答案 A

解析

方法一： $a = \log_3 \pi > \log_3 3 = 1$,

$$b = \log_2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} \log_2 3 \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right),$$

$$c = \log_3 \sqrt{2} = \frac{1}{2} \log_3 2 < \frac{1}{2}.$$

$\therefore a > b > c$.

故选A.

方法二：因为 $\log_3 \sqrt{2} < \log_2 \sqrt{2} < \log_2 \sqrt{3}$ ，所以 $b > c$ ，因为 $\log_2 \sqrt{3} < \log_2 2 = \log_3 3 < \log_3 \pi$ ，

所以 $a > b$ ，所以 $a > b > c$ 。

故选A.



求解切线方程

9

2020年天津河西区天津市第四中学高三下学期高考模拟（4月）第12题5分

已知函数 $f(x) = 4 \sin x + \frac{1}{3}x^3$ 在 $x = 0$ 处的切线与直线 $nx - y - 6 = 0$ 平行，则 $\left(x - \frac{2}{x}\right)^n$ 的展开式

中常数项为 _____。

答案

24

解析

由题意， $f'(x) = 4 \cos x + x^2$ ，

则 $f'(0) = 4 = n$ ，即 $n = 4$ ，

$$\text{故 } \left(x - \frac{2}{x}\right)^n = \left(x - \frac{2}{x}\right)^4,$$

$$T_{r+1} = C_4^r \cdot x^{4-r} \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-1)^r \cdot 2^r \cdot C_4^r \cdot x^{4-2r},$$

故当 $4 - 2r = 0$ ，即 $r = 2$ 时，

常数项为 $T_3 = (-1)^2 \cdot 2^2 \cdot C_4^2 = 24$.

故答案为 : 24 .

10 2020年天津河北区高三二模第12题5分

曲线 $y = e^x - \frac{1}{x}$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 _____ 在该点处的切线方程为 _____ .

答案

1: $e + 1$

2: $(e + 1)x - y - 2 = 0$

解析

设函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$,

$\therefore f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$,

$\therefore f'(1) = e + 1$, $f(1) = e - 1$,

$\therefore$ 曲线 $y = e^x - \frac{1}{x}$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 $e + 1$, 切线方程为 $(e + 1)x - y - 2 = 0$.

2. 导函数模考常见基础题型



分段函数单调性

11 2019~2020学年江西新余渝水区江西省新余市第一中学高一上学期段考(一)第10题5分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$, 若函数 $y = f(x + 2)$ 为偶函数 , 且 $f(x)$ 对任意数

$x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$) , 都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$, 若 $f(a) \leq f(3a + 1)$, 则实数 a 的取值范围是

() .

A. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$

B. $[-2, -1]$

C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

D. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$

答案

A

解析

由于函数 $y = f(x + 2)$ 为偶函数 ,

故函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称 ,

又 $\therefore$ 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$) , 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$,

∴函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, 2]$ 上单调递增,

由 $f(a) \leq f(3a+1)$ 得 $|a-2| \geq |3a+1-2|$,

解得 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{4}$.

故选A.

12 2020年天津塘沽区天津市实验中学滨海学校高三下学期高考模拟第5题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} a^{-x}, & x < -1 \\ (1-2a)x + 3a, & x \geq -1 \end{cases}$, 对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R} (x_1 \neq x_2)$, 总有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是().

- A. $(0, \frac{1}{4})$ B. $(0, \frac{1}{2})$ C. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

答案 C

解析

∴对任意的 $x_1, x_2 \in \mathbf{R} (x_1 \neq x_2)$, 总有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 成立,

∴函数 $f(x) = \begin{cases} a^{-x}, & x < -1 \\ (1-2a)x + 3a, & x \geq -1 \end{cases}$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是增函数,

$$\therefore \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 1 - 2a > 0 \\ a^{-1} \leq -1 + 2a + 3a \end{cases},$$

解得 $\frac{1}{4} \leq a < \frac{1}{2}$.

故选: C.



利用函数性质求解参数值或求解不等式

13 2020~2021学年天津河西区高三上学期期末第4题5分

函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x + x + a$ (a 为常数), 则 $f(a) =$ ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. -2

答案 D

解析

∴函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x + x + a$,

则 $f(0) = 0$, 即 $f(0) = 1 + a = 0$, 得 $a = -1$,

则当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x + x - 1$,

则 $f(-1) = -f(1) = -(2 + 1 - 1) = -2$.

故选D.

14 2020年天津南开区天津市南大奥宇学校高三二模第9题5分

若函数 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+ax}{2-x}$ 为奇函数, 则使不等式 $f\left(\frac{1}{m}\right) + \log_2 6 < 0$ 成立的 m 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, 1)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

答案 B

解析 $\because$ 函数 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+ax}{2-x}$ 为奇函数,
 $\therefore f(-x) = -f(x)$, 即 $x - \log_2 \frac{2-ax}{2+x} = x + \log_2 \frac{2+ax}{2-x}$,
 $\therefore a = 1$,
 不等式 $f\left(\frac{1}{m}\right) + \log_2 6 < 0$, 即不等式 $f\left(\frac{1}{m}\right) < f(1)$,
 而 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+x}{2-x}$, 要使 $f(x)$ 有意义,
 则 $\frac{2+x}{2-x} > 0 \Rightarrow -2 < x < 2$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $(-2, 2)$, 又
 $f(x) = -x - \log_2 \frac{2+x}{2-x} = -x - \log_2 \left(\frac{4}{2-x} - 1\right)$,
 根据单调性的四则运算法则可得:
 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上为单调减函数,
 $\therefore 1 < \frac{1}{m} < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < m < 1$,
 故选B.

利用函数周期性进行赋值运算

15 2018~2019学年山东济宁高三上学期期末理科第9题5分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = f(1-x)$ ，且当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x) = 2^x - m$ ，则
 $f(2019) = (\quad)$.

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

答案 B

解析 $\because f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x+1) = f(1-x)$ ；

$$\therefore f(x+2) = f(-x) = -f(x),$$

$$\therefore f(x+4) = f(x),$$

$\therefore f(x)$ 的周期为4；

$$\because x \in [0, 1] \text{ 时, } f(x) = 2^x - m;$$

$$\therefore f(0) = 1 - m = 0;$$

$$\therefore m = 1,$$

$$\therefore x \in [0, 1] \text{ 时, } f(x) = 2^x - 1,$$

$$\therefore f(2019) = f(-1 + 505 \times 4) = f(-1) = -f(1) = -1.$$

故选B .

3. 函数与方程

此类题目多出现于选择题、填空题最后一题，题号靠前，难度较高

主要题型及解题思路：

①分参型函数交点问题：分离参数后，画出不含参函数图像，平移 $y = a$ （参数），确定解个数；

②不分参型函数交点问题：画出不含参函数图像，之后判断等号另一侧含参直线的方程是斜率确定还是过定点型——

斜率确定——平移；

过定点——绕定点旋转

③复合函数型 $y = f(g(x))$ ——将 $g(x)$ 看作一个整体 t 分析 $f(t)$ ，再分析 $t = g(x)$ 的解个数

16 2020年天津和平区天津市耀华中学高三二模第9题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = |f(x)| - x + m$ 恰有三个零点, 则实数 m 的取值范围是 ().

- A. $(-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{4}, 0]$ B. $[0, \frac{1}{4}) \cup (2, +\infty)$ C. $(-2, -\frac{1}{4}] \cup [0, +\infty)$ D. $(\frac{1}{4}, 2) \cup [0, +\infty)$

教法备注

除解析给的办法外, 此题还可以分离参数, 将函数化为

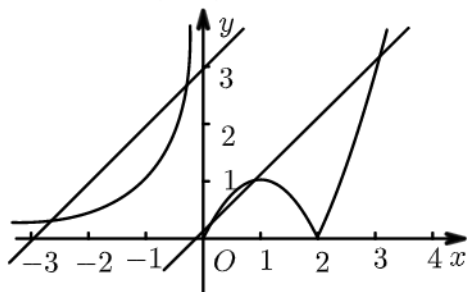
$$-m = |f(x)| - x = \begin{cases} -\frac{1}{x} - x, & x \in (-\infty, 0) \\ -x^2 + x, & x \in [0, 2] \\ x^2 - 3x, & x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

画出右侧函数图像, 之后判断 $-m$ 的取值范围, 从而确定 m 的取值范围

答案 A

解析

根据 $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$ 的图象, 取绝对值可知 $|f(x)| = x - m$ 如图.



当 $|f(x)| = x - m$ 的函数图象有三个交点时分两种情况.

①当直线 $y = x - m$ 与抛物线部分相交于三个点时, 临界条件分别为 $y = x - m$ 过原点时, 此时

$m = 0$, 以及与抛物线相切, 此时 $2x - x^2 = x - m \Rightarrow x^2 - x - m = 0$,

判别式 $\Delta = 1 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$, 故 $m \in (-\frac{1}{4}, 0]$;

②当直线 $y = x - m$ 与抛物线部分相交于1个点, 与 $y = -\frac{1}{x}$ 相交于两点, 此时临界条件为直线

$y = x - m$ 与 $y = -\frac{1}{x}$ 相切, 此时 $-\frac{1}{x} = x - m \Rightarrow x^2 - mx + 1 = 0$, 判别式

$\Delta = m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$, 由图得 $y = x - m$ 中 $m < 0$, 故 $m = -2$ 为临界条件.

故此时 $m \in (-\infty, -2)$;

综上所述, $m \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{1}{4}, 0]$;

故选A.

过定点型

17 2020年天津高三上学期高考模拟第9题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \frac{2x-4}{x}, & x > 0 \end{cases}$, 若函数 $F(x) = f(x) - |kx - 1|$ 有且只有3个零点, 则实数 k 的取值范围 ().

- A. $(0, \frac{9}{16})$ B. $(\frac{9}{16}, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(-\frac{1}{16}, 0) \cup (0, \frac{9}{16})$

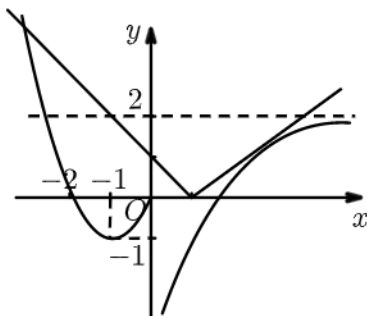
答案 D

解析

由 $F(x) = f(x) - |kx - 1| = 0$ 得 $f(x) = |kx - 1|$,

函数 $F(x) = f(x) - |kx - 1|$ 有且只有3个零点等价于 $y = f(x)$ 与 $y = g(x) = |kx - 1|$ 的图象有且只有3个交点,

作出函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 0 \\ \frac{2x-4}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 的图象, 如图所示.



①当 $k = 0$ 时, 显然不符合题意, 舍去;

② $k > 0$ 时, 如图所示,

当 $x > 0$ 时, 需有2个交点,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx - 1 \\ y = \frac{2x-4}{x} \end{cases}, \text{ 可得 } kx - 1 = \frac{2x-4}{x},$$

$$\text{即: } kx^2 - 3x + 4 = 0,$$

$$\text{可得 } \begin{cases} \Delta = 9 - 16k > 0 \\ \frac{3}{k} > 0 \\ \frac{4}{k} > 0 \end{cases}, \text{ 解得 } 0 < k < \frac{9}{16};$$

③当 $k < 0$ 时, $\begin{cases} y = -kx - 1 \\ y = \frac{2x-4}{x} \end{cases}$,

可得 $-kx - 1 = \frac{2x-4}{x}$,

即: $kx^2 + x - 4 = 0$,

可得 $\begin{cases} \Delta = 1 + 16k > 0 \\ -\frac{1}{k} > 0 \\ -\frac{4}{k} > 0 \end{cases}$,

解得 $-\frac{1}{16} < k < 0$.

综上, 实数 k 的取值范围是 $(-\frac{1}{16}, 0) \cup (0, \frac{9}{16})$.

故选 D.

18 2017年天津南开区高三一模文科第14题5分

已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足: 当 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, 0 < x \leq 1 \end{cases}$, 且

$f(x+2) = f(x)$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立. 若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1)$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有 6 个零点, 则实数 m 的取值范围是 _____.

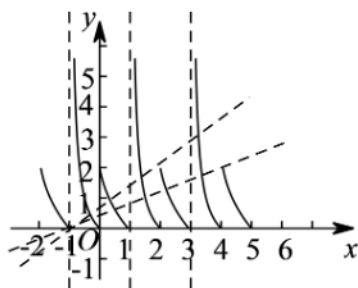
答案 $[\frac{2}{5}, \frac{2}{3})$

解析 $\because f(x+2) = f(x)$ 对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的周期为 2.

又 $\because$ 当 $x \in (-1, 1]$ 时, $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x+1}, -1 < x \leq 0 \\ 2^{2-x} - 2, 0 < x \leq 1 \end{cases}$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象如下图所示:



令函数 $g(x) = f(x) - m(x+1) = 0$,

则 $f(x) = m(x+1)$,

若函数 $g(x) = f(x) - m(x+1) = 0$ 在区间 $[-1, 5]$ 内有 6 个零点,

则 $y = f(x)$ 与 $y = m(x+1)$ 的图象在区间 $[-1, 5]$ 内有 6 个交点 .

$\because y = m(x+1)$ 恒过点 $(-1, 0)$,

过 $(-1, 0)$, $(4, 2)$ 点的直线斜率为 $\frac{2}{5}$,

过 $(-1, 0)$, $(2, 2)$ 点的直线斜率为 $\frac{2}{3}$,

根据图象可得 : $m \in \left[\frac{2}{5}, \frac{2}{3} \right)$,

故答案为 : $\left[\frac{2}{5}, \frac{2}{3} \right)$.

斜率确定型

19 2020~2021 学年天津滨海新区高三上学期期末 (七校联考) 第 9 题 5 分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_a(x+2), & x \geq -1 \\ (x+1)^2 + 4a, & x < -1 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调函数 ,

若函数 $g(x) = |f(x)| - |x-2|$ 有三个不同的零点 , 则实数 a 的取值范围是 () .

- A. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right]$ B. $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right]$ C. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \cup \left\{ \frac{13}{16} \right\}$ D. $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right] \cup \left\{ \frac{13}{16} \right\}$

答案 D

解析 因为函数 $f(x) = \begin{cases} 1 + \log_a(x+2), & x \geq -1 \\ (x+1)^2 + 4a, & x < -1 \end{cases}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) ,

当 $x < -1$ 时 , $f(x) = (x+1)^2 + 4a$,

所以 $f(x)$ 再 $(-\infty, -1)$ 上单调递减 ,

又因为 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调函数 ,

所以 $0 < a < 1$ 且 $(-1+1)^2 + 4a \geq 1 + \log_a(-1+2)$,

解得 $\frac{1}{4} \leq a < 1$,

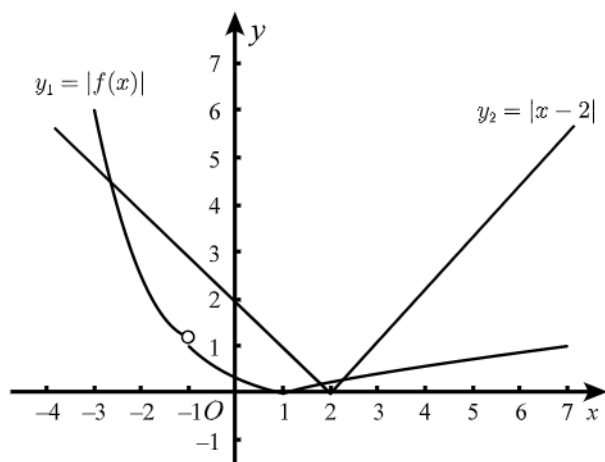
令 $g(x) = |f(x)| - |x-2| = 0$, 即 $|f(x)| = |x-2|$,

令 $y_1 = |f(x)|$, $y_2 = |x-2|$,

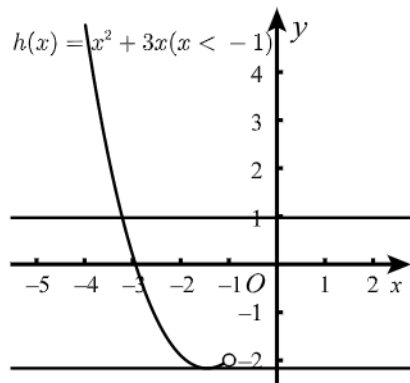
则函数 $g(x) = |f(x)| - |x-2|$ 有三个不同的零点 ,

等价于 $y_1 = |f(x)|$ 和 $y_2 = |x-2|$ 有三个不同的交点 ,

分别画出 $y_1 = |f(x)|$ 和 $y_2 = |x-2|$ 的图象如图所示 ,



由图可知，当 $x \geq -1$ 时， $y_1 = |f(x)|$ 和 $y_2 = |x - 2|$ 有 2 个不同的交点，
故只需满足：当 $x < -1$ 时， $y_1 = |f(x)|$ 和 $y_2 = |x - 2|$ 有 1 个不同的交点，
即当 $x < -1$ 时， $(x + 1)^2 + 4a = -x + 2$ ，化简 $x^2 + 3x + 4a - 1 = 0$ ，
即 $1 - 4a = x^2 + 3x (x < -1)$ ，
令 $h(x) = x^2 + 3x (x < -1)$ ，即 $y = h(x)$ 与 $y = 1 - 4a$ 有一个交点，
画出函数 $y = h(x)$ 的图象如图所示，



$$\text{易知 } h(x)_{\min} = h\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{4},$$

$$h(-1) = (-1)^2 + 3 \times (-1) = -2,$$

$$\text{所以 } 1 - 4a = -\frac{9}{4} \text{ 或 } 1 - 4a \geq -2,$$

$$\text{解得 } a = \frac{13}{16} \text{ 或 } a \leq \frac{3}{4},$$

$$\text{又因为 } \frac{1}{4} \leq a < 1,$$

$$\text{所以 } a \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \cup \left\{\frac{13}{16}\right\}.$$

故选 D.



复合函数型

20 2020年天津南开区天津市第二十五中学高三下学期高考模拟(3月)第9题5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 0 \\ |\ln x|, & x > 0 \end{cases}$, 方程 $f[f(x)] = 3$ 的实数根的个数是 ().

- A. 6 B. 3 C. 4 D. 5

答案 D

解析 由题意得,

$$2f(x) + 1 = 3 \text{ 或 } |\ln f(x)| = 3,$$

$$\text{即 } f(x) = 1 \text{ (舍去) 或 } f(x) = e^3 \text{ 或 } f(x) = e^{-3};$$

$$\text{若 } f(x) = e^3,$$

$$\text{则 } 2x + 1 = e^3 \text{ 或 } |\ln x| = e^3,$$

$$\text{故 } x = \frac{e^3 - 1}{2} \text{ (舍去) 或 } x = e^{e^3} \text{ 或 } x = e^{-e^3};$$

$$\text{若 } f(x) = e^{-3},$$

$$\text{则 } 2x + 1 = e^{-3} \text{ 或 } |\ln x| = e^{-3},$$

$$\text{故 } x = \frac{e^{-3} - 1}{2} \text{ 或 } x = e^{e^{-3}} \text{ 或 } x = e^{-e^{-3}};$$

$$\text{故方程 } f[f(x)] = 3 \text{ 共有5个解,}$$

所以D选项是正确的.

21 2020年天津南开区高三二模第15题5分

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 且 $f(-1) = -1$. 若 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 则 x 的取值范围是 _____; 设函数 $g(x) = \begin{cases} (\sqrt{x}+1)^2 - a - 1, & x > 0 \\ 2^x + x - a + 1, & x \leq 0 \end{cases}$, 若方程 $f(g(x)) + 1 = 0$ 有且只有两个不同的实数解, 则实数 a 的取值范围为 _____.

答案 1: $[0, 2]$

2: $(-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$

解析 由 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 得 $f(x+1) \geq -1$,

$\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(-1) = -1$, 则 $f(1) = -1$,

$\therefore f(x-1) \geq -1$ 等价于 $f(x+1) \geq f(-1)$, 等价于 $f(|x-1|) \geq f(1)$, 又 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, $\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

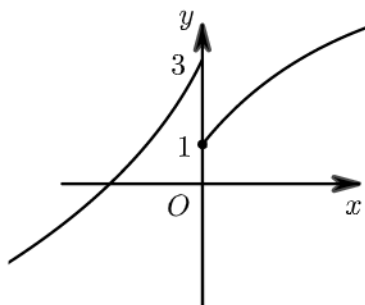
$\therefore |x-1| \leq 1$, 解得 $0 \leq x \leq 2$,

故若 $f(x-1) + 1 \geq 0$, 则 x 的取值范围是 $[0, 2]$,

若 $f(g(x)) + 1 = 0$, 则 $g(x) = -1$ 或 $g(x) = 1$,

$$\text{令 } h(x) = \begin{cases} (\sqrt{x}+1)^2, \\ 2^x + x + 2 \end{cases}$$

则 $g(x) = -1$ 等价于 $h(x) = a$, $g(x) = 1$ 等价于 $h(x) = a+2$, 若方程 $f(g(x)) + 1 = 0$ 有且只有两个不同的实数根, 则函数 $y = h(x)$ 与直线 $y = a$ 和直线 $y = a+2$ 共有两个不同的交点, 作出函数 $y = h(x)$ 的大致图像, 如下图所示.



由图像知, $\begin{cases} a \leq 1 \\ a+2 \leq 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a > 3 \\ a+2 > 3 \end{cases}$.

解得 $a \leq -1$ 或 $a > 3$.

则实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup (3, +\infty)$.



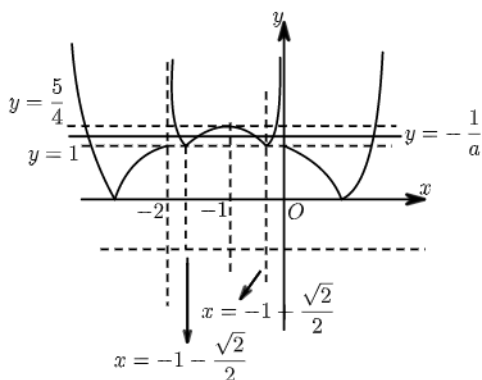
换元法求解型

22 2019~2020学年天津河西區高三上學期期中第15題5分

已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + \frac{1}{4x^2 + 8x}, & -2 < x < 0 \\ x^2 + 2x - 1, & x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 0 \end{cases}$, 若函数 $g(x) = a|f(x)| + 1$ 有 6 个零点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

答案 $\left[-1, -\frac{4}{5}\right)$

解析 令 $t = x^2 + 2x$,



$$\therefore -2 < x < 0,$$

$$\therefore t \in [-1, 0),$$

$$\text{则 } x^2 + 2x + \frac{1}{4(x^2 + 2x)} = t + \frac{1}{4t} \in (-\infty, -1],$$

函数 $g(x) = a|f(x)| + 1$ 有 6 个零点,

即方程 $a|f(x)| + 1 = 0$ 有 6 个根,

也就是 $|f(x)| = -\frac{1}{a}$ 有 6 个根,

即 $y = |f(x)|$ 与 $y = -\frac{1}{a}$ 有 6 个不同交点,

如图:

要使函数 $g(x) = a|f(x)| + 1$

有 6 个零点,

$$\text{则 } 1 \leq -\frac{1}{a} < \frac{5}{4}, \text{ 即 } -1 \leq a < -\frac{4}{5},$$

则实数 a 的取值范围是: $\left[-1, -\frac{4}{5}\right)$.

故答案为: $\left[-1, -\frac{4}{5}\right)$.

4. 导数解答



恒能成立典型问题

23

2020~2021 学年天津河西区高三上学期期末第 20 题 16 分

已知函数 $f(x) = e^x (\sin x - \cos x + 4)$, 函数 $g(x) = 2x - \cos x$, 其中 $e = 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程.

(2) 设函数 $h(x) = f(x) - ag(x)$ ($a \in \mathbf{R}$), 讨论 $h(x)$ 的单调性.

- (3) 若对任意 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$, 恒有关于 x 的不等式 $\cos x - \frac{x+m}{e^x} \leq 0$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

答案

- (1) $4x - y + 3 = 0$.
 (2) ①当 $a \leq 0$ 时, $h(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;
 ②当 $a > 0$ 时, $h(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln \frac{a}{2})$ 上单调递减, 在区间 $(\ln \frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增.
 (3) $(1, +\infty)$.

解析

- (1) 由题意, 得:

$$f'(x) = e^x (\sin x - \cos x + 4) + e^x (\cos x + \sin x)$$

$$= e^x (2 \sin x + 4),$$

$$\text{所以 } f'(0) = 4,$$

$$\text{因为 } f(0) = 3, \text{ 所以 } y - 3 = 4(x - 0),$$

$$\text{即所求曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } (0, f(0)) \text{ 处的切线方程为 } 4x - y + 3 = 0.$$

- (2) 易知, 函数 $h(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $g'(x) = 2 + \sin x$,

$$\text{且有 } h'(x) = f'(x) - ag'(x)$$

$$= e^x (2 \sin x + 4) - a(\sin x + 2)$$

$$= (2e^x - a)(\sin x + 2),$$

由于 $\sin x + 2 > 0$ 在 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 所以

$$\text{①当 } a \leq 0 \text{ 时, } 2e^x - a > 0 \text{ 在 } x \in \mathbf{R} \text{ 上恒成立, 此时 } h'(x) > 0,$$

所以, $h(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{②当 } a > 0 \text{ 时, 由 } h'(x) > 0, \text{ 即 } 2e^x - a > 0, \text{ 解得 } x > \ln \frac{a}{2},$$

$$\text{由 } h'(x) < 0, \text{ 即 } 2e^x - a < 0, \text{ 解得 } x < \ln \frac{a}{2}.$$

所以, $h(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln \frac{a}{2})$ 上单调递减, 在区间 $(\ln \frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增.

- (3) 易知, $\cos x - \frac{x+m}{e^x} \leq 0$ 等价于 $e^x \cos x - x - m \leq 0$,

$$\text{设 } \varphi(x) = e^x \cos x - x - m \left(x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right] \right),$$

$$\text{由题意, 对 } x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right] \text{ 时, 不等式 } \cos x - \frac{x+m}{e^x} \leq 0 \text{ 恒成立,}$$

$$\text{只需 } \varphi(x)_{\max} \leq 0,$$

$$\text{易得 } \varphi'(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1, x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right],$$

$$\text{令 } t(x) = e^x (\cos x - \sin x) - 1, x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right],$$

$$\text{所以 } t'(x) = e^x (\cos x - \sin x) + e^x (-\sin x - \cos x) = -2e^x \sin x,$$

显然, 当 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 时, $t'(x) \leq 0$ 恒成立,

所以函数 $t(x)$ 在 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递减, 所以 $t(x) \leq t(0) = 0$,

即 $\varphi'(x) \leq 0$ 在 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 恒成立,

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $x \in \left[0, \frac{5\pi}{12}\right]$ 上单调递减,

$$\text{所以有 } \varphi(x)_{\max} = \varphi(0) = 1 - m \leq 0,$$

所以 $m \geq 1$, 故所求实数 m 的取值范围是 $(1, +\infty)$.



零点存在性定理的应用

24

2020~2021 学年天津河北区高三上学期期末第20题16分

已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2 - (a+2)x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线的斜率为1, 求 a 的值.
- (2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.
- (3) 若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上存在零点, 证明: 当 $x \in (1, e)$ 时, $f(x) > -e^2$.

答案

(1) $a = 2$.

(2) $a \leq 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x)$ 单调递减,

$x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增;

若 $0 < a < 2$, 当 $x \in \left(0, \frac{a}{2}\right), (1, +\infty)$ 时, $f(x)$ 单调递增, $x \in \left(\frac{a}{2}, 1\right)$ 时, $f(x)$ 单调递减;

若 $a = 2$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

若 $a > 2$, 当 $x \in (0, 1), \left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$ 时, $f(x)$ 单调递增,

$x \in \left(1, \frac{a}{2}\right)$ 时, $f(x)$ 单调递减.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 因为 $f(x) = a \ln x + x^2 - (a+2)x$,

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{a}{x} + 2x - (a+2),$$

所以 $f'(2) = \frac{a}{2} + 4 - (a+2) = 1$, 解得 $a = 2$.

$$(2) \quad f'(x) = \frac{a}{x} + 2x - (a+2) = \frac{(x-1)(2x-a)}{x}, \quad x > 0,$$

①若 $\frac{a}{2} \leq 0$ 即 $a \leq 0$, $f'(x) > 0$, $x > 0$ 的解为 $x > 1$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时 , $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减 ;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时 , $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增 ;

②若 $0 < \frac{a}{2} < 1$ 即 $0 < a < 2$, $f'(x) > 0$, $x > 0$ 的解为 $0 < x < \frac{a}{2}$ 或 $x > 1$,

所以当 $x \in (0, \frac{a}{2})$, $(1, +\infty)$ 时 , $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增 ;

当 $x \in (\frac{a}{2}, 1)$ 时 , $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减 ;

③若 $\frac{a}{2} = 1$ 即 $a = 2$, $f'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x} \geq 0$ 恒成立 ,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 ;

④若 $\frac{a}{2} > 1$ 即 $a > 2$, $f'(x) > 0$, $x > 0$ 的解为 $x < 1$ 或 $x > \frac{a}{2}$,

所以当 $x \in (0, 1)$, $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 时 , $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增 ;

当 $x \in (1, \frac{a}{2})$ 时 , $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减

综上所述 , 若 $a \leq 0$, 当 $x \in (0, 1)$ 时 , $f(x)$ 单调递减 ,

$x \in (1, +\infty)$ 时 , $f(x)$ 单调递增 ;

若 $0 < a < 2$, 当 $x \in (0, \frac{a}{2})$, $(1, +\infty)$ 时 , $f(x)$ 单调递增 , $x \in (\frac{a}{2}, 1)$ 时 , $f(x)$ 单调递减 ;

若 $a = 2$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增 ;

若 $a > 2$, 当 $x \in (0, 1)$, $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 时 , $f(x)$ 单调递增 ,

$x \in (1, \frac{a}{2})$ 时 , $f(x)$ 单调递减 .

(3) 由题意 ,

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2x - (a+2) = \frac{(x-1)(2x-a)}{x},$$

因为导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上存在零点 ,

设零点为 x_0 , $x_0 \in (1, e)$, 则 $a = 2x_0 \in (2, 2e)$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减 , 在 (x_0, e) 上单调递增 ,

故

$$\begin{aligned} f(x)_{\min} &= f(x_0) = a \ln x_0 + x_0^2 - (a+2)x_0 = 2x_0 \ln x_0 + x_0^2 - (2x_0+2)x_0 \\ &= 2x_0 \ln x_0 - x_0^2 - 2x_0, \end{aligned}$$

设 $g(x) = 2x \ln x - x^2 - 2x$, $x \in (1, e)$,

则 $g'(x) = 2 \ln x - 2x$,

设 $h(x) = g'(x) = 2 \ln x - 2x, x \in (1, e)$,

则 $h'(x) = \frac{2}{x} - 2 < 0, h(x)$ 单调递减,

又 $h(1) = g'(1) = -2$,

故 $g'(x) = 2 \ln x - 2x < 0$ 在 $(1, e)$ 上恒成立, 故 $g(x)$ 单调递减,

所以 $g(x) > g(e) = -e^2$,

故当 $x \in (1, e)$ 时, $f(x) > -e^2$.



已知零点信息求参数取值范围

25 2020年天津河北区高三二模第20题16分

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}ax - a + 1 - \frac{\ln x}{x}$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$ 为单调递减函数, 求 a 的取值范围.

(2) 若 $f(x)$ 有两个不同的零点, 求 a 的取值范围.

答案

(1) $\left(-\infty, -\frac{1}{e^3}\right]$.

(2) $(2, +\infty)$.

解析

(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\because f(x) = \frac{1}{2}ax - a + 1 - \frac{\ln x}{x},$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}a - \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

若函数 $f(x)$ 为单调递减函数,

则 $f'(x) \leq 0$,

$\therefore a \leq \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

$$\text{设 } g(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2},$$

$$\text{令 } g'(x) = \frac{4 \ln x - 6}{x^3} = 0,$$

$$\text{解得 } \ln x = \frac{3}{2},$$

$$\therefore x = e^{\frac{3}{2}},$$

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 在 $(0, e^{\frac{3}{2}})$ 单调递减, 在 $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 单调递增,

$\therefore$ 函数 $g(x)$ 的最小值为 $g(e^{\frac{3}{2}}) = -\frac{1}{e^3}$,

$\therefore a \leq -\frac{1}{e^3}$, 即 a 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{e^3}\right]$.

(2) 由已知, $f(x) = \frac{\frac{1}{2}ax^2 - (a-1)x - \ln x}{x}$,

设 $h(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (a-1)x - \ln x$,

则函数 $f(x)$ 有两个不同的零点等价于函数 $h(x)$ 有两个不同的零点,

$$\begin{aligned} \therefore h'(x) &= ax - (a-1) - \frac{1}{x} = \frac{ax^2 - (a-1)x - 1}{x} \\ &= \frac{(ax+1)(x-1)}{x}, \end{aligned}$$

$\therefore$ (1) 当 $a \geq 0$ 时,

函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

若函数 $h(x)$ 有两个不同的零点,

则 $h(1) = -\frac{1}{2}a + 1 < 0$, 即 $a > 2$

当 $a > 2$ 时,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h(2) = 2a - 2(a-1) - \ln 2 = 2 - \ln 2 > 0$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) = \frac{1}{2}a(x^2 - 2x) + x - \ln x$,

$\therefore -1 < x^2 - 2x < 0$,

$\therefore h(x) > -\frac{1}{2}a + x - \ln x$,

$\therefore h(e^{-\frac{1}{2}a}) > -\frac{1}{2}a + e^{-\frac{1}{2}a} - \ln e^{-\frac{1}{2}a} = e^{-\frac{1}{2}a} > 0$,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ 上各有一个零点,

故 $a > 2$ 符合题意.

(2) 当 $a = -1$ 时,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 至多有一个零点, 不符合题意,

(3) 当 $-1 < a < 0$ 时,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递减, 在 $(1, -\frac{1}{a})$ 单调递增, 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 单调递减,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 的极小值为 $h(1) = -\frac{1}{2}a + 1 > 0$,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 至多有一个零点, 不符合题意,

(4) 当 $a < -1$ 时,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{a})$ 单调递减, 在 $(-\frac{1}{a}, 1)$ 单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 单调递减,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 的极小值为 $h(-\frac{1}{a}) = 1 - \frac{1}{2a} + \ln(-a) > 0$,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 至多有一个零点, 不符合题意,

综上, a 的取值范围是 $(2, +\infty)$.



隐零点——无需对隐零点范围进行估计

26 已知函数 $f(x) = x + a \ln x$, $a \in \mathbb{R}$.

- (1) 当 $a = 1$ 时, 求曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程.
- (2) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值.
- (3) 若函数 $F(x) = \frac{1}{x^2} f(x)$, 当 $a = 2$ 时, $F(x)$ 的最大值为 M , 求证: $M < \frac{3}{2}$.

答案

- (1) $2x - y - 1 = 0$.
- (2) 当 $a \geq -1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(1) = 1$.
当 $-e \leq a \leq -1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(-a) = -a + a \ln(-a)$.
当 $a \leq -e$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(e) = e + a$.
- (3) 证明见解析.

解析

- (1) 因为函数 $f(x) = x + a \ln x$, 且 $a = 1$,
所以 $f(x) = x + \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.
所以 $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.
所以 $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$.
所以曲线 $f(x) = x + \ln x$ 在 $x = 1$ 处的切线方程是 $y - 1 = 2(x - 1)$,
即 $2x - y - 1 = 0$3分
- (2) 因为函数 $f(x) = x + a \ln x (x > 0)$, 所以 $f'(x) = 1 + \frac{a}{x} = \frac{x + a}{x}$.
当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.
所以函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(1) = 1$.
当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 即 $x + a > 0$, 所以 $x > -a$.
令 $f'(x) < 0$, 即 $x + a < 0$, 所以 $x < -a$.
(i) 当 $0 < -a \leq 1$, 即 $a \geq -1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增,
所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(1) = 1$.
(ii) 当 $1 < -a < e$, 即 $-e \leq a \leq -1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, -a]$ 上单调递减, 在 $(-a, e]$ 上单调递增,
所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(-a) = -a + a \ln(-a)$.

(iii) 当 $-a \geq e$, 即 $a \leq -e$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(e) = e + a$.

综上所述, 当 $a \geq -1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(1) = 1$.

当 $-e \leq a \leq -1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(-a) = -a + a \ln(-a)$.

当 $a \leq -e$ 时, $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $f(e) = e + a$7分

(3) 因为函数 $F(x) = \frac{1}{x^2} f(x)$, 所以 $F(x) = \frac{1}{x} + \frac{a \ln x}{x^2}$.

所以当 $a = 2$ 时, $F'(x) = \frac{2 - x - 4 \ln x}{x^3}$.

令 $g(x) = 2 - x - 4 \ln x$, 所以 $g(x)$ 是单调递减函数.

因为 $g(1) = 1 > 0$, $g(2) = -4 \ln 2 < 0$,

所以在 $(1, 2)$ 上存在 x_0 , 使得 $g(x_0) = 0$, 即 $2 - x_0 - 4 \ln x_0 = 0$.

所以当 $x \in (1, x_0)$ 时, $g(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, 2)$ 时, $g(x) < 0$.

即当 $x \in (1, x_0)$ 时, $F'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, 2)$ 时, $F'(x) < 0$.

所以 $F(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 2)$ 上单调递减.

所以当 $x = x_0$ 时, $F(x)$ 取得最大值是 $M = F(x_0) = \frac{x_0 + 2 \ln x_0}{x_0^2}$.

因为 $2 - x - 4 \ln x = 0$, 所以 $M = \frac{2 + x_0}{2x_0^2} = \frac{1}{x_0^2} + \frac{1}{2x_0} = \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$.

因为 $x_0 \in (1, 2)$, 所以 $\frac{1}{x_0} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

所以 $M < \frac{3}{2}$14分



隐零点——需要对隐零点所在区间进行估计

27

2020年天津河西区高三二模第20题16分

已知函数 $f(x) = e^x - e^x \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (e 为自然对数的底数).

(1) 求函数 $f(x)$ 的值域.

(2) 若不等式 $f(x) \geq k(x-1)(1-\sin x)$ 对任意 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

(3) 证明: $e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$.

答案

(1) $[0, 1]$.

(2) $-1 \leq k \leq \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2} - 1}$.

(3) 证明见解析 .

解析

(1) 因为 $f(x) = e^x - e^x \sin x$,

$$\text{所以 } f'(x) = e^x - e^x (\sin x + \cos x)$$

$$= e^x (1 - \sin x - \cos x)$$

$$= e^x \left[1 - \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right] ,$$

$$\because x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] ,$$

$$\therefore x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] ,$$

$$\therefore \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} ,$$

$$\text{所以 } f'(x) \leq 0 ,$$

故函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 上单调递减 , 函数 $f(x)$ 的最大值为 $f(0) = 1 - 0 = 1$;

$$f(x) \text{ 的最小值为 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{2} = 0 ,$$

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$.

(2) 方法一 : 原不等式可化为 $e^x(1 - \sin x) \geq k(x - 1)(1 - \sin x)$, (*)

因为 $1 - \sin x \geq 0$ 恒成立 , 故(*)式可化为 $e^x \geq k(x - 1)$.

$$\text{令 } g(x) = e^x - kx + k , x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] , \text{ 则 } g'(x) = e^x - k ,$$

$$\text{当 } k \leq 0 \text{ 时 } , g'(x) = e^x - k > 0 ,$$

所以函数 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 上单调递增 ,

$$\text{故 } g(x) \geq g(0) = 1 + k \geq 0 ,$$

$$\text{所以 } -1 \leq k \leq 0 ;$$

$$\text{当 } k > 0 \text{ 时 } , \text{ 令 } g'(x) = e^x - k = 0 ,$$

$$\text{得 } x = \ln k ,$$

$$\text{所以当 } x \in (0, \ln k) \text{ 时 } , g'(x) = e^x - k < 0 ;$$

$$\text{当 } x \in (\ln k, +\infty) \text{ 时 } , g'(x) = e^x - k > 0$$

所以当 $\ln k < \frac{\pi}{2}$, 即 $0 < k < e^{\frac{\pi}{2}}$ 时 , 函数 $g(x)_{\min} = g(\ln k) = 2k - k \ln k > 0$ 成立 ;

当 $\ln k \geq \frac{\pi}{2}$, 即 $k \geq e^{\frac{\pi}{2}}$ 时 , 函数 $g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ 上单调递减 ,

$$g(x)_{\min} = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} - k \cdot \frac{\pi}{2} + k \geq 0 ,$$

$$\text{解得 } e^{\frac{\pi}{2}} \leq k \leq \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2} - 1} ,$$

$$\text{综上 } , -1 \leq k \leq \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\frac{\pi}{2} - 1} .$$

方法二：由题易知即 $(1 - \sin x)[e^x - k(x-1)] \geq 0$ ，故原题可变为 $e^x \geq k(x-1)$ ，对任意 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 恒成立，

令 $g(x) = \frac{e^x}{x-1}$ ，则 $g'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$ ， $x \in [0, 1) \cup (1, \frac{\pi}{2}]$ ；①当 $x \in [0, 1)$ 时，分离参

数得 $g(x) = \frac{e^x}{x-1} \leq k$ ，易知 $g(x)$ 在 $[0, 1)$ 上单调递减，

故 $k \geq g(x)_{\max} = g(0) = -1$ ，则 $k \in [-1, +\infty)$ ；

②当 $x \in (1, \frac{\pi}{2}]$ 时，分离参数得 $g(x) = \frac{e^x}{x-1} \geq k$ ，易知 $g(x)$ 在 $(1, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减，

故 $k \leq g(x)_{\min} = g(\frac{\pi}{2}) = \frac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{\pi-2}$ ，则 $k \in (-\infty, \frac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{\pi-2}]$ ；

综上所述， $k \in (-1, \frac{2e^{\frac{\pi}{2}}}{\pi-2}]$ 。

(3) 方法一：令 $h(x) = e^{x-1} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 1$ ，

则 $h'(x) = e^{x-1} + x - \frac{3}{2}$ 。

令 $t(x) = h'(x) = e^{x-1} + x - \frac{3}{2}$ ，则 $t'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$ ，所以 $h'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

由 $h'(\frac{1}{2}) = e^{\frac{1}{2}-1} - 1 < 0$ ， $h'(\frac{3}{4}) = e^{-\frac{1}{4}} - \frac{3}{4} > 0$ ，

故存在 $x_0 \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ ，

使得 $h'(x_0) = 0$ ，

即 $e^{x_0-1} = \frac{3}{2} - x_0$ ，

所以当 $x \in (-\infty, x_0)$ 时， $h'(x) < 0$ ；

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时， $h'(x) > 0$ ，

故当 $x = x_0$ 时，函数 $h(x)$ 有极小值，且是唯一的极小值，

故函数

$h(x)_{\min} = h(x_0)$

$$\begin{aligned} &= e^{x_0-1} + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{3}{2}\right)^2 - 1 \\ &= -\left(x_0 - \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{3}{2}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\left(x_0 - \frac{3}{2}\right) - 1\right]^2 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

因为 $x_0 \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ ，

所以 $\frac{1}{2}\left(x_0 - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} > \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{32} > 0$ ，

故 $h(x) = e^{x-1} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 1 > 0$ ，

$$\text{即 } e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1.$$

方法二：令 $h(x) = e^{x-1} - x$ ，则 $h'(x) = e^{x-1} - 1$ ，则 $h(x) \geq h(1) = 0$ ，则 $e^{x-1} \geq x$ ，

则要证 $e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$ ，即证 $x > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$ ，即证 $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$ ，

又 $e^{x-1} \geq x$ ，当且仅当 $x = 1$ 时取等，故 $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$ 恒成立，即

$$e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1 \text{ 恒成立.}$$

方法三：要证 $e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$ ，即证 $e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$ ，即证

$$1 > \left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] e^{-x}$$

令 $F(x) = \left[-\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right] e^{-x}$ ，则 $F'(x) = \frac{e^{-x}}{8}(4x^2 - 12x - 3)$ ， $F'(x) = 0$ 推出

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{3},$$

则 $F(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)$ 和 $\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}, +\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}, \frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$ 上单调递减，

又当 $x > \frac{1}{2} + \sqrt{2} < \frac{3}{2} + \sqrt{3}$ ， $F(x) < 0 < 1$ ，故只要证 $F\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) < 1$ 即可，

即证 $1 > (\sqrt{3} - 1)e^{\sqrt{3} - \frac{3}{2}}$ ，即证 $e^{\sqrt{3} - \frac{3}{2}} < \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ ，又

$$e^{2\sqrt{3} - 3} < e^{\frac{1}{2}} < \sqrt{2.89} = 1.7 < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2,$$

故 $F(x) < 1$ 恒成立，即 $e^{x-1} > -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$ 恒成立.



双变量——韦达定理

28

2020年天津塘沽区天津市实验中学滨海学校高三下学期高考模拟第20题

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ，证明： $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

答案

(1) 当 $a \leq 2$ 时， $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减；

当 $a > 2$ 时， $f(x)$ 在 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 和 $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 上单调递减，

在 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 上单调递增.

(2) 证明见解析.

解析

$$(1) \text{ 方法一: } f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2} \quad (x > 0),$$

$$\text{令 } g(x) = x^2 - ax + 1 \quad (x > 0),$$

当 $a \leq 0$ 时, $g(x) > 0$ 恒成立, 即 $f'(x) < 0$ 恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 判别式 $\Delta = a^2 - 4$,

i) 当 $\Delta \leq 0$ 时, 此时 $0 < a \leq 2$, $g(x) \geq 0$, 从而 $f'(x) \leq 0$, 此时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

ii) 当 $\Delta > 0$ 时, 此时 $a > 2$, 设 $g(x) = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

$$\text{利用求根公式得 } x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 0, \quad x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 0,$$

当 $x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ 时, $g(x) > 0$, 从而 $f'(x) < 0$,

此时 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 上单调递减;

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $g(x) < 0$, 从而 $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 上单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 和 $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 上单调递减,

在 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 上单调递增.

$$\text{方法二: } f(x) \text{ 的定义域为 } (0, +\infty), \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2}.$$

i) 若 $a \leq 2$, 则 $f'(x) \leq 0$, 当且仅当 $a = 2, x = 1$ 时, $f'(x) = 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减;

ii) 若 $a > 2$, 令 $f'(x) = 0$ 得, $x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 或 $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

$f(x)$ 在 $(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2})$, $(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty)$ 单调递减;

在 $(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2})$ 单调递增.

(2) 方法一: 由 (1) 可知, 若 $f(x)$ 有两个极值点, 则 $a > 2$, 且 $f'(x) = 0$ 的两根即为 x_1, x_2

($x_1 < x_2$), 且满足根与系数的关系 $x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = 1$, 易得 $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$

$$, \quad x_1 = \frac{1}{x_2},$$

由 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$, 可得 $f(x_2) + f(\frac{1}{x_2}) = 0$, 即 $f(x_2) + f(x_1) = 0$,

若要证 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$, 只需证 $\frac{2f(x_2)}{x_2 - x_1} < a - 2$, 即证

$$2f(x_2) < (a - 2)(x_2 - \frac{1}{x_2}), \text{ 整理得 } 2 \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} < 0 \quad (x_2 > 1),$$

构造函数 $h(x) = 2 \ln x - x + \frac{1}{x} \quad (x > 1)$, 求导得

$$h'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} \leq 0,$$

因此 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore h(x) < h(1) = 0$, 从而

$$2\ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} < 0 \quad (x_2 > 1) \text{ 成立, 原式得证.}$$

方法二: 由(1)可知, 若 $f(x)$ 有两个极值点, 则 $a > 2$, 且 $f'(x) = 0$ 的两根即为 x_1, x_2

($x_1 < x_2$), 且满足根与系数的关系 $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = 1$, 易得 $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$

$$, x_1 = \frac{1}{x_2},$$

$$\begin{aligned} \text{令 } h(x) &= \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{\frac{1}{x_2} - x_2 + a \ln x_2 - (\frac{1}{x_1} - x_1 + a \ln x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} - (x_2 - x_1) + a(\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + \frac{a(\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= -2 + \frac{a(\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1}, \end{aligned}$$

若要证 $h(x) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$, 只需证 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} < 1$, 即 $\ln \frac{x_2}{x_1} < x_2 - x_1$,

由于 $x_1 = \frac{1}{x_2}$, 上式可转化为 $\ln x_2^2 = 2 \ln x_2 < x_2 - \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow 2 \ln x_2 - x_2 + \frac{1}{x_2} < 0$,

(※)

构造函数 $p(x) = 2 \ln x - x + \frac{1}{x} \quad (x > 1)$,

则 $p'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} \leq 0$, 故 $p(x) < p(1) = 0$, 故(※)式成立, 原结论得证.

方法三: 由(1)知, 当且仅当 $a > 2$ 时 $f(x)$ 存在两个极值点.

由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1, x_2 满足 $x^2 - ax + 1 = 0$,

所以 $x_1 x_2 = 1$,

不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $x_2 > 1$.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} \\ &= -2 + a \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = -2 + a \frac{-2 \ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2}, \end{aligned}$$

所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$ 等价于 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0$.

设函数 $t(x) = \frac{1}{x} - x + 2 \ln x$, 则(1)知, $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

又 $t(1) = 0$, 从而当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $t(x) < 0$,

所以 $\frac{1}{x_2} - x_2 + 2 \ln x_2 < 0$,

即 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2$.

方法四: 函数 $f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{函数的导数 } f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = -\frac{x^2 - ax + 1}{x^2},$$

$\therefore f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 ,

$\therefore f'(x)$ 存在两个零点 x_1, x_2 ,

$\therefore f'(x) = 0$ 存在两个根 x_1, x_2 ,

$\therefore x^2 - ax + 1 = 0$ 存在两个根 x_1, x_2 ,

$\therefore x_1 + x_2 = a > 0, x_1 x_2 = 1$,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = (x_2 - x_1) \left(1 + \frac{1}{x_1 x_2} \right) + a(\ln x_1 - \ln x_2)$$

$$= 2(x_2 - x_1) + a(\ln x_1 - \ln x_2),$$

$$\therefore \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -2 + \frac{a(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2},$$

$$\therefore \text{欲证 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2, \text{ 即证 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1,$$

$$\text{由 } A-L-G \text{ 不等式可知 } \sqrt{x_1 x_2} < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2},$$

$$\text{又 } x_1 x_2 = 1,$$

$$\therefore 1 < \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2}, \text{ 即 } \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} < 1,$$

证毕.

函数的放缩

29 已知 $f(x) = a \sin(1-x) + \ln x$, 其中 $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a = 0$ 时, 设函数 $g(x) = f(x) - x^2$, 求函数 $g(x)$ 的极值.

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上递增, 求 a 的取值范围.

(3) 证明: $\sum_{k=1}^n \sin \frac{1}{(2+k)^2} < \ln 3 - \ln 2$.

答案

(1) 极大值 $\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$ 无极小值.

(2) $a \leq 1$.

(3) 证明见解析.

解析

(1) 极大值 $\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$ 无极小值.

(2) 即 $a \leq \frac{1}{x \cos(1-x)}$ 在区间 $(0, 1)$ 上恒成立.

设 $t(x) = x \cos(1-x)$, 则 $t'(x) = \cos(1-x) + x \sin(1-x) > 0$ 在区间 $(0, 1)$ 上恒成立.

所以 $t(x) = x \cos(1-x)$ 在 $(0, 1)$ 单调递增, 则 $0 < t(x) < 1$,

所以 $a \leq 1$.

(3) 由 (2) 可知当 $a = 1$ 时, 函数 $G(x) = \sin(1-x) + \ln x$ 在区间 $(0, 1)$ 上递增, 所以

$$\sin(1-x) + \ln x < G(1) = 0, \text{ 即 } \sin(1-x) < \ln \frac{1}{x} (0 < x < 1),$$

$$\text{所以 } \sin \frac{1}{(2+k)^2} = \sin \left[1 - \frac{(k+1)(k+3)}{(2+k)^2} \right] < \ln \frac{(2+k)^2}{(k+1)(k+3)}.$$

求和即可得证.