

随机变量及其分布列

一、 随机变量的数字特征

1. 真题分析

1. 一个盒子里有1个红球1个绿球2个黄球（除颜色外其他都相同），每次拿一个，不放回，拿出红球即停，设拿出黄球的个数为 ξ ，则 $P(\xi = 0) = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $E(\xi) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
2. 一袋中装有6个大小相同的黑球和白球。已知从袋中任意摸出2个球，至少得到1个白球的概率是 $\frac{4}{5}$ ，则袋中白球的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；从袋中任意摸出2个球，则摸到白球的个数 X 的数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
3. 甲、乙两名枪手进行射击比赛，每人各射击三次，甲三次射击命中率均为 $\frac{4}{5}$ ；乙第一次射击的命中率为 $\frac{7}{8}$ ，若第一次未射中，则乙进行第二次射击，射击的命中率为 $\frac{3}{4}$ ，如果又未中，则乙进行第三次射击，射击的命中率为 $\frac{1}{2}$ ，乙若射中，则不再继续射击。则甲三次射击命中次数 ξ 的期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；乙射中的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 思路总结

（1）分析事件模型：

- ①二项式分布 $X \sim B(n, p)$ 的期望： $E(X) = np$ ，方差： $D(X) = np(1 - p)$
- ②超几何分布 $X \sim H(N, n, M, k)$ 的期望： $E(X) = \frac{nM}{N}$ ，（注意：不是所有的超几何公式都可用该公式，该式中 M 表示随机变量 X 对应产品的个数）
- ③正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma)$ 的期望： μ ，方差： σ

（2）确定随机变量间关系：

$Y = aX + b$ ，则 $E(Y) = aE(X) + b, D(Y) = a^2D(X)$ 。

3. 模拟演练

4. 某批产品共10件，其中含有2件次品。若从该批产品中任意抽取3件，则取出的3件产品中恰好有一件次品的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；取出的3件产品中次品的件数 X 的期望是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
5. 已知一个袋子中装有1个黑球、2个白球、3个红球，假设每一个球被摸到的可能性是相等的，若从袋子中摸出3个球，则摸出白球比黑球多一个的概率为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；记摸到的白球的个数为 X ，则随机变量 X 的数学期望是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 秉承提升学生核心素养的理念，学校开设以提升学生跨文化素养为核心的多元文化融合课程，选某艺术课程的学生唱歌、跳舞至少会一项，已知会唱歌的有2人，会跳舞的有5人，现从中选2人，设 ξ 为选出的人中既会唱歌又会跳舞的人数，其中 $P(\xi > 0) = \frac{7}{10}$ ，则选该艺术课程的学生人数为 _____， ξ 的 $E\xi$ 是 _____。

7. 某校在高一年级一班至六班进行了“社团活动”满意度调查（结果只有“满意”和“不满意”两种），从被调查的学生中随机抽取了50人，具体的调查结果如表：

班号	一班	二班	三班	四班	五班	六班
频数	4	5	11	8	10	12
满意人数	3	2	8	5	6	6

现从一班和二班调查对象中随机选取4人进行追踪调查，则选中的4人中恰有2人不满意的概率为 _____；若将以上统计数据中学生持满意态度的频率视为概率，在高一年级全体学生中随机抽取3名学生，记其中满意的人数为 X ，则随机变量 X 的数学期望是 _____。

二、二项分布

1. 真题分析

8. 设甲、乙两位同学上学期间，每天7:30之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立。
- (1) 用 X 表示甲同学上学期间的三天中7:30之前到校的天数，求随机变量 X 的分布列和数学期望。
- (2) 设 M 为事件“上学期间的三天中，甲同学在7:30之前到校的天数比乙同学在7:30之前到校的天数恰好多2”，求事件 M 发生的概率。

2. 思路总结

二项式分布 $X \sim B(n, p)$

- (1) 要明确二项式分布的特点：①每次试验相互独立；②每次试验仅有两种结果；③每次实验相同结果的概率保持不变（有放回）。
- (2) 结合题意分析每次试验成功的概率。
- (3) 明确事件类型，并结合题设要求分析随机变量 X 的可能取值。
- (4) 运用二项分布概率公式 $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 计算。

3. 模拟演练

9. 设甲、乙两人每次射击命中目标的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$ ，且各次射击互相独立．
- (1) 若甲、乙两人各射击1次，求至少有一人命中目标的概率．
- (2) 若甲连续射击3次，设命中目标次数为 ξ ，求命中目标次数 ξ 的分布列及数学期望．
10. 现有10道题，其中6道甲类题，4道乙类题，张同学从中任取3道题解答．
- (1) 求张同学至少取到1道乙类题的概率；
- (2) 已知所取的3道题中有2道甲类题，1道乙类题．设张同学答对甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$ ，答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$ ，且各题答对与否相互独立．用 X 表示张同学答对题的个数，求 X 的分布列和数学期望．

三、超几何分布

1. 真题分析

11. 已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为24，16，16，现采用分层抽样的方法从中抽取7人，进行睡眠时间的调查．
- (1) 应从7人甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人？
- (2) 若抽出的7人中有4人睡眠不足，3人睡眠充足，现从这7人中随机抽取3人做进一步的身体检查．
- ① 用 X 抽取的3人中睡眠不足的员工人数，求随机变量 X 的分布列与数学期望．
- ② 设 A 为事件“抽取的3人中，既有睡眠充足的员工，也有睡眠不足的员工”，求事件 A 发生的概率．
12. 改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变．近年来，移动支付已成为主要支付方式之一，为了解某校学生上个月 A ， B 两种移动支付方式的使用情况，从全校学生中随机抽取了100人，发现样本中 A ， B 两种支付方式都不使用的有5人，样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下：
- | 支付方式 \ 支付金额 (元) | (0, 1000] | (1000, 2000] | 大于2000 |
|-----------------|-----------|--------------|--------|
| 仅使用 A | 18人 | 9人 | 3人 |
| 仅使用 B | 10人 | 14人 | 1人 |
- (1) 从全校学生中随机抽取1人，估计该学生上个月 A ， B 两种支付方式都使用的概率．
- (2) 从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取1人，以 X 表示这2人中上个月支付金额大于1000元的人数，求 X 的分布列和数学期望．

- (3) 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化. 现从样本仅使用A的学生中, 随机抽查3人, 发现他们本月的支付金额都大于2000元. 根据抽查结果, 能否认为样本仅使用A的学生中本月支付金额大于2000元的人数有变化? 说明理由.

2. 思路总结

超几何分布 $X \sim H(n, M, N)$

(N : 总个数; M : A类产品的个数; n : 抽取产品个数; k : 抽取A类产品的个数)

(1) 明确超几何分布的特点: ①总体个数分为两类; ②不放回的进行抽取, 无顺序; ③每次试验多种结果.

(2) 结合题意分析得出 N, M, n 的值.

(3) 指出随机变量 X 的可能取值.

(4) 运用公式计算每一种结果的概率 $P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

3. 模拟演练

13. 天津市某中学为全面贯彻“五育并举, 立德树人”的教育方针, 促进学生各科平衡发展, 提升学生综合素养. 该校教务处要求各班针对薄弱学科成立特色学科“兴趣学习小组”(每位学生只能参加一个小组), 以便课间学生进行相互帮扶. 已知该校某班语文、数学、英语三个兴趣小组学生人数分别为10人、10人、15人. 经过一段时间的学习, 上学期中考试中, 他们的成绩有了明显进步. 现采用分层抽样的方法从该班的语文, 数学, 英语三个兴趣小组中抽取7人, 对期中考试这三科成绩及格情况进行调查.

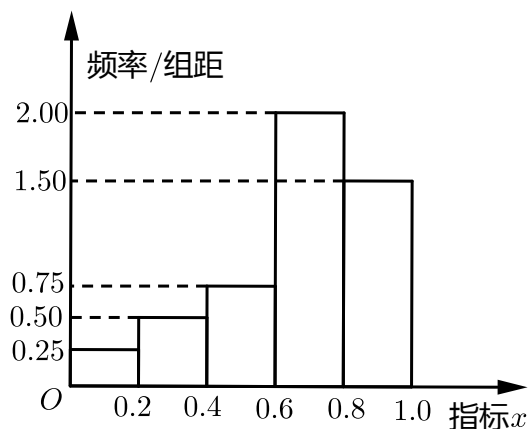
(1) 应从语文, 数学, 英语三个兴趣小组中分别抽取多少人?

(2) 若抽取的7人中恰好有5人三科成绩全部及格, 其余2人三科成绩不全及格. 现从这7人中随机抽取4人做进一步的调查.

① 记 X 表示随机抽取4人中, 语文, 数学, 英语三科成绩全及格的人数, 求随机变量 X 的分布列和数学期望.

② 设 M 为事件“抽取的4人中, 有人成绩不全及格”, 求事件 M 发生的概率.

14. 在贯彻中共中央、国务院关于精准扶贫政策的过程中, 某单位在某市定点帮扶某村100户贫困户. 为了做到精准帮扶, 工作组对这100户村民的年收入情况、危旧房情况、患病情况等进行调查, 并把调查结果转化为各户的贫困指标将指标 x . 按照 $[0, 0.2)$, $[0.2, 0.4)$, $[0.4, 0.6)$, $[0.6, 0.8)$, $[0.8, 1.0)$ 分成五组, 得到如图所示的频率分布直方图. 规定若 $0 \leq x < 0.6$, 则认定该户为“绝对贫困户”, 否则认定该户为“相对贫困户”; 当 $0 \leq x < 0.4$ 时, 认定该户为“亟待帮助户”.



- (1) 为了更好的了解和帮助该村的这些贫困户，决定用分层抽样的方法从这100户中随机抽取20户进行更深入的调查，求应该抽取“绝对贫困户”的户数。
- (2) 从这20户中任取3户，求“绝对贫困户”多于“相对贫困户”的概率。
- (3) 现在从(1)中所抽取的“绝对贫困户”中任取3户，用 X 表示所选3户中“亟待帮助户”的户数，求 X 的分布列和数学期望 EX 。

四、相互独立事件

1. 真题分析

15. 从甲地到乙地要经过3个十字路口，设各路口信号灯工作相互独立，且在各路口遇到红灯的概率分别为 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ 。
- (1) 设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数，求随机变量 X 的分布列和数学期望。
- (2) 若有2辆车独立地从甲地到乙地，求这2辆车共遇到1个红灯的概率。
16. 某城市为鼓励人们绿色出行，乘坐地铁，地铁公司决定按照乘客经过地铁站的数量实施分段优惠政策，不超过30站的地铁票价如下表：

乘坐站数 x	$0 < x \leq 10$	$10 < x \leq 20$	$20 < x \leq 30$
票价(元)	3	6	9

现有甲、乙两位乘客同时从起点乘坐同一辆地铁，已知他们乘坐地铁都不超过30站。甲、乙乘坐不超过10站的概率分别为 $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{3}$ ；甲、乙乘坐超过20站的概率分别为 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ 。

- (1) 求甲、乙两人付费相同的概率。
- (2) 设甲、乙两人所付费用之和为随机变量 X ，求 X 的分布列和数学期望。

2. 思路总结

- (1) 将复杂事件拆分为简单事件，分别计算出每种简单事件的概率。

(2) 分析复杂事件的类型, 判断利用概率相加还是相乘, (注意: 遇到较复杂事件时, 可求出其对立事件的概率)

例如: 成产出一批零件, 甲车间生产合格率为0.9, 乙车间生产的合格率为0.85, 从甲乙两车间产品中各抽取一件, 则: ①两件都是正品的概率? ②恰有一件是正品的概率? ③至少有一件是正品的概率?

3. 模拟演练

17. 某企业有甲、乙两研发小组, 他们研发新产品成功的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{5}$. 现安排甲组研发新产品A, 乙组研发新产品B, 设甲、乙两组的研发相互独立.

(1) 求至少有一种新产品研发成功的概率;

(2) 若新产品A研发成功, 预计企业可获利润120万元; 若新产品B研发成功, 预计企业可获利润100万元. 求该企业可获利润的分布列和数学期望.

18. 甲、乙、丙均两次参加英语高考, 取两次成绩中较高的为最终成绩, 三人第一次成绩不低于130分的概率依次为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$. 甲若第一次成绩不低于130分, 则第二次成绩不低于130分的概率为 $\frac{2}{3}$, 若第一次成绩在130分以下, 则第二次成绩不低于130分的概率为 $\frac{1}{3}$; 乙若第一次成绩不低于130分, 则第二次成绩不低于130的概率为 $\frac{1}{4}$, 若第一次成绩在130分以下, 则第二次成绩不低于130分的概率为 $\frac{1}{2}$; 丙第二次成绩不受第一次成绩的影响, 不低于130分的概率为 $\frac{2}{3}$.

(1) 设A为事件“甲的英语高考最终成绩不低于130分”, B为事件“乙的英语高考最终成绩不低于130分”, C为事件“丙的英语高考最终成绩不低于130分”, 分别求出事件A、事件B、事件C发生的概率.

(2) 设甲、乙、丙中英语高考最终成绩不低于130分的人数为X, 求X的分布列与数学期望.

五、正态分布

1. 真题分析

19. 已知随机变量X服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 且 $P(-2 \leq X \leq 0) = 0.4$, 则 $P(X > 2) =$ _____.

20. 某实验室针对某种新型病毒研发了一种疫苗, 并在500名志愿者身上进行了人体注射实验, 发现注射疫苗的志愿者均产生了稳定的免疫应答. 若这些志愿者的某免疫反应蛋白M的数值X (单位: mg/L) 近似服从正态分布 $N(15, \sigma^2)$, 且X在区间(10, 20)内的人数占总人数的 $\frac{19}{25}$, 则这些志愿者中免疫反应蛋白M的数值X不低于20的人数大约为 ().

A. 30

B. 60

C. 70

D. 140

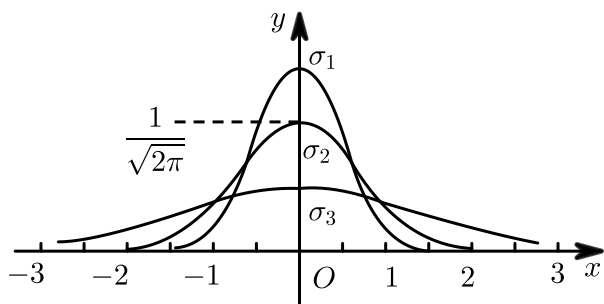
2. 思路总结

正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma)$

明确正态分布曲线的特点：①曲线位于 x 轴上方，且与 x 轴不相交；②曲线是单峰的，关于 $x = \mu$ 对称；③曲线与 x 轴间的面积为1；④几何意义： μ ：表示期望， σ ：表示方差；⑤ μ 一定时， σ 越小，曲线越“瘦高”， σ 越大，曲线越矮胖。

3. 模拟演练

21. 随机变量 $X \sim N(3, \sigma^2)$ ，且 $P(0 < X < 3) = 0.35$ ， $P(X > 6) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
22. 设随机变量 $X \sim N(1, 5^2)$ ，且 $P(X \leq 0) = P(X \geq a - 2)$ ，则实数 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。
23. 对一个物理量做 n 次测量，并以测量结果的平均值作为该物理量的最后结果。已知最后结果的误差 $\varepsilon_n \sim N\left(0, \frac{2}{n}\right)$ ，为使误差 ε_n 在 $(-0.5, 0.5)$ 的概率不小于 0.9545，至少要测量 $\underline{\hspace{2cm}}$ 次（若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0.9545$ ）。
24. 如图是当 σ 取三个不同值 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 时的三种正态曲线，那么 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的大小关系是（ ）。



- A. $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 > 0$
- B. $0 < \sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$
- C. $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$
- D. $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

六、 综合创新

25. 某工厂的某种产品成箱包装，每箱200件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品。检验时，先从这箱产品中任取20件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验。设每件产品为不合格品的概率都为 $p (0 < p < 1)$ ，且各件产品是否为不合格品相互独立。
- (1) 记20件产品中恰有2件不合格品的概率为 $f(p)$ ，求 $f(p)$ 的最大值点 p_0 。
- (2)

现对一箱产品检验了20件，结果恰有2件不合格品，以(1)中确定的 p_0 作为 p 的值．已知每件产品的检验费用为2元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付25元的赔偿费用．

(i)若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X ，求 $E(X)$ ；

(ii)以检验费用与赔偿费用之和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，设点集 $A_n = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$ ， $B_n = \{(0, 1), (n, 1)\}$ ， $C_n = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), \dots, (n, 2)\}$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，令 $M_n = A_n \cup B_n \cup C_n$ ，从集合 M_n 中任取两个不同的点，用随机变量 X 表示它们之间的距离．

(1) 当 $n = 1$ 时，求 X 的概率分布．

(2) 对给定的正整数 $n(n \geq 3)$ ，求概率 $P(X \leq n)$ （用 n 表示）．