

随机变量及其分布列

一、随机变量的数字特征

1. 真题分析

- 1 一个盒子里有1个红球1个绿球2个黄球（除颜色外其他都相同），每次拿一个，不放回，拿出红球即停，设拿出黄球的个数为 ξ ，则 $P(\xi = 0) = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $E(\xi) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 1: $\frac{1}{3}$
2: 1

解析 设红球为A，绿球为B，黄球为C，

ξ 可以取0, 1, 2三个值，

又： $\xi = 0$ 时，有BA和A两种情况，

$$\therefore P(\xi = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

又： $\xi = 1$ 时，有CA, BCA, CBA三种情况，

$$\therefore P(\xi = 1) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore P(\xi = 2) = 1 - P(\xi = 0) - P(\xi = 1) = \frac{1}{3},$$

$$\therefore E(\xi) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1.$$

故答案为： $\frac{1}{3}$ ；1。

- 2 一袋中装有6个大小相同的黑球和白球。已知从袋中任意摸出2个球，至少得到1个白球的概率是 $\frac{4}{5}$ ，则袋中白球的个数为 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；从袋中任意摸出2个球，则摸到白球的个数X的数学期望为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 1: 3
2: 1

解析

设白球的个数为 n , $n \in \mathbf{N}^*$ 且 $n \leq 5$,

$$\therefore \text{至少得到1个白球的概率为 } \frac{C_n^2 + C_n^1 \cdot C_{6-n}^1}{C_6^2} = \frac{4}{5},$$

$\therefore$ 解得 $n = 3$,

$\therefore$ 袋中白球的个数为3,

可知 $X \sim H(2, 3, 6)$,

$$\therefore EX = 2 \times \frac{3}{6} = 1,$$

$\therefore$ 摸到白球个数 X 的数学期望为1.

3

甲、乙两名枪手进行射击比赛, 每人各射击三次, 甲三次射击命中率均为 $\frac{4}{5}$; 乙第一次射击的命中率为 $\frac{7}{8}$, 若第一次未射中, 则乙进行第二次射击, 射击的命中率为 $\frac{3}{4}$, 如果又未中, 则乙进行第三次射击, 射击的命中率为 $\frac{1}{2}$, 乙若射中, 则不再继续射击. 则甲三次射击命中次数 ξ 的期望为 _____; 乙射中的概率为 _____.

答案

$$\begin{aligned} 1: & \frac{12}{5} \\ 2: & \frac{63}{64} \end{aligned}$$

解析

由题意: 甲三次射击命中次数 $\xi \sim B\left(3, \frac{4}{5}\right)$,

$$\text{则甲三次射击命中次数 } \xi \text{ 的期望 } E(\xi) = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5};$$

$$\text{乙第一次射中的概率 } P_1 = \frac{7}{8},$$

$$\text{乙第二次射中的概率 } P_2 = \left(1 - \frac{7}{8}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32},$$

$$\begin{aligned} \text{乙第三次射中的概率 } P_3 &= \left(1 - \frac{7}{8}\right) \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}, \end{aligned}$$

$$\text{则乙射中的概率 } P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$= \frac{7}{8} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

$$\text{综上, 故答案为: } \frac{12}{5}; \frac{63}{64}.$$

2. 思路总结

(1) 分析事件模型:

①二项式分布 $X \sim B(n, p)$ 的期望： $E(X) = np$ ，方差： $D(X) = np(1-p)$

②超几何分布 $X \sim H(N, n, M, k)$ 的期望： $E(X) = \frac{nM}{N}$ ，(注意：不是所有的超几何公式都可用该公式，该式中 M 表示随机变量 X 对应产品的个数)

③正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma)$ 的期望： μ ，方差： σ

(2) 确定随机变量间关系：

$Y = aX + b$ ，则 $E(Y) = aE(X) + b, D(Y) = a^2 D(X)$.

3. 模拟演练

- 4 某批产品共10件，其中含有2件次品．若从该批产品中任意抽取3件，则取出的3件产品中恰好有一件次品的概率为 _____；取出的3件产品中次品的件数 X 的期望是 _____．

答案

$$1: \frac{16}{45}$$

$$2: \frac{2}{5}$$

解析

由题意可知 X 可以取 0, 1, 2,

$$P(X=0) = \frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^3} = \frac{28}{45},$$

$$P(X=1) = \frac{C_8^1 C_2^2}{C_{10}^3} = \frac{16}{45},$$

$$P(X=2) = \frac{C_8^0 C_2^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{45},$$

$$\therefore E(X) = \frac{28}{45} \times 0 + \frac{16}{45} \times 1 + \frac{1}{45} \times 2 = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}.$$

- 5 已知一个袋子中装有1个黑球、2个白球、3个红球，假设每一个球被摸到的可能性是相等的，若从袋子中摸出3个球，则摸出白球比黑球多一个的概率为 _____；记摸到的白球的个数为 X ，则随机变量 X 的数学期望是 _____．

答案

$$1: \frac{7}{20}$$

$$2: 1$$

解析

白1，黑0，

白2, 黑1,

$$\frac{C_2^1 C_3^2 + C_2^2 \cdot C_1^1}{C_6^3} = \frac{7}{20},$$

$X = 0, 1, 2$,

$$P(X = 0) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4}{20},$$

$$P(X = 1) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = \frac{12}{20},$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^1}{C_6^3} = \frac{4}{20},$$

$$E(X) = 1.$$

- 6 秉承提升学生核心素养的理念, 学校开设以提升学生跨文化素养为核心的多元文化融合课程, 选某艺术课程的学生唱歌、跳舞至少会一项, 已知会唱歌的有2人, 会跳舞的有5人, 现从中选2人, 设 ξ 为选出的人中既会唱歌又会跳舞的人数, 其中 $P(\xi > 0) = \frac{7}{10}$, 则选该艺术课程的学生人数为 _____, ξ 的 $E\xi$ 是 _____.

答案 1:5人

2: $\frac{4}{5}$

解析 设既会唱歌又会跳舞的有 x 人,

则文娱队中共有 $7 - x$ 人, 则只会一项的人数是 $7 - 2x$ 人,

$$\therefore P(\xi > 0) = P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = \frac{7}{10},$$

$$\therefore P(\xi = 0) = \frac{3}{10}, \text{ 即 } \frac{C_{7-2x}^2}{C_{7-x}^2} = \frac{3}{10},$$

解得 $x = 2$,

$\therefore$ 选该艺术课程的学生人数共有5人,

由题意知 ξ 的可能取值为0, 1, 2,

$$P(\xi = 0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10},$$

$$P(\xi = 1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5},$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10},$$

$\therefore \xi$ 的概率分布列为:

ξ	0	1	2
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\therefore E\xi = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}.$$

- 7 某校在高一年级一班至六班进行了“社团活动”满意度调查（结果只有“满意”和“不满意”两种），从被调查的学生中随机抽取了50人，具体的调查结果如表：

班号	一班	二班	三班	四班	五班	六班
频数	4	5	11	8	10	12
满意人数	3	2	8	5	6	6

现从一班和二班调查对象中随机选取4人进行追踪调查，则选中的4人中恰有2人不满意的概率为_____；若将以上统计数据中学生持满意态度的频率视为概率，在高一年级全体学生中随机抽取3名学生，记其中满意的人数为 X ，则随机变量 X 的数学期望是_____。

答案

- 1: $\frac{10}{21}$
2: $\frac{9}{5}$

解析

由表中数据可知，一班，二班被调查的人数分别为4人，5人，

两班中有4人对“社团活动”不满意，

则选中的4人中恰有2人不满意的概率为 $\frac{C_4^2 C_5^2}{C_9^4} = \frac{6 \times 10}{126} = \frac{10}{21}$ ，

因为高一年级被调查的人数为50人，

对“社团活动”满意的人数为30人，持满意态度的频率为 $\frac{3}{5}$ ，

由题意知 $X \sim B\left(3, \frac{3}{5}\right)$ ，所以 $E(X) = 3 \times \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$ 。

二、二项分布

1. 真题分析

设甲、乙两位同学上学期间，每天7:30之前到校的概率均为 $\frac{2}{3}$ ，假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立。

- (1) 用 X 表示甲同学上学期间的三天中7:30之前到校的天数，求随机变量 X 的分布列和数学期望。
- (2) 设 M 为事件“上学期间的三天中，甲同学在7:30之前到校的天数比乙同学在7:30之前到校的天数恰好多2”，求事件 M 发生的概率。

答案

(1) 分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

数学期望 $E(X) = 2$ 。

(2) $\frac{20}{243}$ 。

解析

(1) 因为甲同学上学期间的三天中到校情况相互独立，且每天7:30之前到校的概率为 $\frac{2}{3}$ ，

故 $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$ ，从而 $P(X=k) = C_3^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}$ ， $k=0, 1, 2, 3$ ，

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$ 。

(2) 设乙同学上学期间的三天中7:30之前到校的天数为 Y ，则 $Y \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$ ，

且 $M = \{X=3, Y=1\} \cup \{X=2, Y=0\}$ ，由题意知事件 $\{X=3, Y=1\}$ 与 $\{X=2, Y=0\}$ 互斥，

且事件 $\{X=3\}$ 与 $\{Y=1\}$ ，事件 $\{X=2\}$ 与 $\{Y=0\}$ 均相互独立，从而由(1)知，

$$P(M) = P(\{X=3, Y=1\} \cup \{X=2, Y=0\})$$

$$= P(\{X=3, Y=1\}) + P(\{X=2, Y=0\})$$

$$= P(X=3)P(Y=1) + P(X=2)P(Y=0)$$

$$= \frac{8}{27} \times \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{27}$$

$$= \frac{20}{243}。$$

2. 思路总结

二项式分布 $X \sim B(n, p)$

- (1) 要明确二项式分布的特点：①每次试验相互独立；②每次试验仅有两种结果；③每次实验相同结果的概率保持不变（有放回）。
- (2) 结合题意分析每次试验成功的概率。
- (3) 明确事件类型，并结合题设要求分析随机变量 X 的可能取值。
- (4) 运用二项分布概率公式 $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ 计算。

3. 模拟演练

9 设甲、乙两人每次射击命中目标的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$ ，且各次射击互相独立。

- (1) 若甲、乙两人各射击1次，求至少有一人命中目标的概率。
- (2) 若甲连续射击3次，设命中目标次数为 ξ ，求命中目标次数 ξ 的分布列及数学期望。

答案

(1) $\frac{11}{12}$ 。

(2)

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

$E(\xi) = 2$ 。

解析

(1) 设“甲射击1次命中目标”为事件 A ，“乙射击1次命中目标”为事件 B ，

则 $P(A) = \frac{2}{3}$ ， $P(B) = \frac{3}{4}$ ，

所以 $P(A+B) = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{12}$ ，

故所求概率为 $\frac{11}{12}$ 。

(2) 由题意可知， ξ 可取 0, 1, 2, 3，

$\therefore P(\xi = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ ，

$P(\xi = 1) = C_3^1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27}$ ，

$P(\xi = 2) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{12}{27}$ ，

$P(\xi = 3) = C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ ，

$\therefore$ 分布列：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$

$$\therefore E(\xi) = \frac{1}{27} \times 0 + \frac{6}{27} \times 1 + \frac{12}{27} \times 2 + \frac{8}{27} \times 3 = 2.$$

10 现有10道题，其中6道甲类题，4道乙类题，张同学从中任取3道题解答．

- (1) 求张同学至少取到1道乙类题的概率；
- (2) 已知所取的3道题中有2道甲类题，1道乙类题．设张同学答对甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$ ，答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$ ，且各题答对与否相互独立．用 X 表示张同学答对题的个数，求 X 的分布列和数学期望．

答案

(1) $\frac{5}{6}$

(2) X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{125}$	$\frac{28}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{36}{125}$

$$E(X) = 2.$$

解析

- (1) 设事件 A = “张同学所取的3道题至少有1道乙类题”，则有 $\bar{A}$ = “张同学所取的3道题都是甲类题”．

$$\text{因为 } P(\bar{A}) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}, \text{ 所以 } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{5}{6}.$$

- (2) X 所有的可能取值为0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = C_2^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{125};$$

$$P(X=1) = C_2^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \frac{1}{5} + C_2^0 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{125};$$

$$P(X=2) = C_2^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \frac{1}{5} + C_2^1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{57}{125};$$

$$P(X=3) = C_2^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{125}.$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{125}$	$\frac{28}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{36}{125}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{4}{125} + 1 \times \frac{28}{125} + 2 \times \frac{57}{125} + 3 \times \frac{36}{125} = 2.$$

三、超几何分布

1. 真题分析

11 已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为24, 16, 16, 现采用分层抽样的方法从中抽取7人, 进行睡眠时间的调查.

- (1) 应从7人中甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人?
- (2) 若抽出的7人中有4人睡眠不足, 3人睡眠充足, 现从这7人中随机抽取3人做进一步的身体检查.
 - ① 用 X 抽取的3人中睡眠不足的员工人数, 求随机变量 X 的分布列与数学期望.
 - ② 设 A 为事件“抽取的3人中, 既有睡眠充足的员工, 也有睡眠不足的员工”, 求事件 A 发生的概率.

答案

(1) 分别抽取3人, 2人, 2人.

(2) ①

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$E(X) = \frac{12}{7}.$$

② $\frac{6}{7}$.

解析

(1) 由已知, 甲、乙、丙三个部门的员工人数之比为3:2:2, 由于采用分层抽样的方法从中抽取7人, 因此应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取3人, 2人, 2人.

(2) ① 随机变量 X 的所有可能取值为0, 1, 2, 3.

$$P(X=k) = \frac{C_4^k \cdot C_3^{3-k}}{C_7^3} \quad (k=0, 1, 2, 3).$$

所以, 随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

$$\text{随机变量 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{7}.$$

② 设事件 B 为“抽取的3人中, 睡眠充足的员工有1人, 睡眠不足的员工有2人”.

事件 C 为“抽取的3人中, 睡眠充足的员工有2人, 睡眠不足的员工有1人”,

则 $A = B \cup C$ ，且 B 与 C 互斥，

由 (1) 知， $P(A) = P(B \cup C) = P(X = 2) + P(X = 1) = \frac{6}{7}$.

所以，事件 A 发生的概率为 $\frac{6}{7}$.

- 12 改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变．近年来，移动支付已成为主要支付方式之一，为了解某校学生上个月 A ， B 两种移动支付方式的使用情况，从全校学生中随机抽取了 100 人，发现样本中 A ， B 两种支付方式都不使用的有 5 人，样本中仅使用 A 和仅使用 B 的学生的支付金额分布情况如下：

支付金额 (元) \ 支付方式	(0, 1000]	(1000, 2000]	大于 2000
仅使用 A	18 人	9 人	3 人
仅使用 B	10 人	14 人	1 人

- 从全校学生中随机抽取 1 人，估计该学生上个月 A ， B 两种支付方式都使用的概率．
- 从样本仅使用 A 和仅使用 B 的学生中各随机抽取 1 人，以 X 表示这 2 人中上个月支付金额大于 1000 元的人数，求 X 的分布列和数学期望．
- 已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化．现从样本仅使用 A 的学生中，随机抽查 3 人，发现他们本月的支付金额都大于 2000 元．根据抽查结果，能否认为样本仅使用 A 的学生中本月支付金额大于 2000 元的人数有变化？说明理由．

答案

(1) 0.4 .

(2) X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

$E(X) = 1$.

(3) 答案合理即可．

解析

- 设“从全校学生中随机抽取 1 人，该学生上个月 A ， B 两种支付方式都使用”为事件 M ，由题意可得，抽取的总人数为 100，

仅使用A的学生人数为： $18 + 9 + 3 = 30$ ，

仅使用B的学生人数为： $10 + 14 + 1 = 25$ ，

则A，B两种支付方式都使用的学生人数为： $100 - 25 - 30 - 5 = 40$ ，

$$\text{则 } P(M) = \frac{40}{100} = 0.4 .$$

(2) 方法一：由题意可知， X 表示2人中上个月支付金额大于1000元的人数，

故 X 的所有可能取值为： $0, 1, 2$ ，

$$P(X=0) = \frac{C_{18}^1 C_{10}^1}{C_{30}^1 C_{25}^1} = \frac{6}{25} ,$$

$$P(X=1) = \frac{C_{12}^1 C_{10}^1 + C_{15}^1 C_{18}^1}{C_{30}^1 C_{25}^1} = \frac{13}{25} ,$$

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^1 C_{15}^1}{C_{30}^1 C_{25}^1} = \frac{6}{25} ,$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{6}{25} + 1 \times \frac{13}{25} + 2 \times \frac{6}{25} = 1 .$$

方法二： X 的所有可能值为 $0, 1, 2$.

记事件 C 为“从样本仅使用A的学生中随机抽取1人，该学生上个月的支付金额大于1000元”，事件 D 为“从样本仅使用B的学生中随机抽取1人，该学生上个月的支付金额大于1000元”。

由题设知，事件 $C, D, \bar{C}, \bar{D}$ 相互独立，且

$$P(C) = \frac{9+3}{30} = 0.4, P(D) = \frac{14+1}{25} = 0.6 .$$

$$\text{所以 } P(X=2) = P(CD) = P(C)P(D) = 0.24 ,$$

$$P(X=1) = P(C\bar{D} \cup \bar{C}D)$$

$$= P(C)P(\bar{D}) + P(\bar{C})P(D) = 0.52 ,$$

$$P(X=0) = P(\bar{C}\bar{D}) = P(\bar{C})P(\bar{D}) = 0.24 ,$$

$$\text{故 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times 0.24 + 1 \times 0.52 + 2 \times 0.24 = 1 .$$

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{6}{25}$	$\frac{13}{25}$	$\frac{6}{25}$

(3) 方法一：不能。

原因：因为样本中使用A支付的学生一共有30人，支付金额小于等于2000元的学生有27人，支付金额大于2000元的学生有3人，现随机抽查3人，恰好是使用A支付方式的学生中支付金额大于2000元的3个学生时，不能说明本月支付金额大于2000元的人数有变化。

能。

原因：样本中使用A支付的学生一共有30人，支付金额大于2000元的学生只有3人，现随机抽查3人，正好抽到这三个学生的概率为 $\frac{C_3^3}{C_{30}^3} = \frac{1}{4060}$ ，不到千分之一，可认为是小概率事件。

因此，有大概率可以认为，本月支付金额大于2000元的人数有变化。

方法二：记事件E为“从样本仅使用A的学生中随机抽查3人，他们本月的支付金额都大于2000元”。

假设样本仅使用A的学生中，本月支付金额大于2000元的人数没有变化，则由上个月的样本数据得 $P(E) = \frac{1}{C_{30}^3} = \frac{1}{4060}$ 。

答案示例1：可以认为有变化。理由如下：

$P(E)$ 比较小；概率比较小的事件一般不容易发生。一旦发生，就有理由认为本月的支付金额大于2000元的人数发生了变化。所以可以认为有变化。

答案示例2：无法确定有没有变化。理由如下：

事件E是随机事件， $P(E)$ 比较小，一般不容易发生，但还是有可能发生的，所以无法确定有没有变化。

2. 思路总结

超几何分布 $X \sim H(n, M, N)$

(N ：总个数； M ：A类产品的个数； n ：抽取产品个数； k ：抽取A类产品的个数)

(1) 明确超几何分布的特点：①总体个数分为两类；②不放回的进行抽取，无顺序；③每次试验多种结果。

(2) 结合题意分析得出 N, M, n 的值。

(3) 指出随机变量 X 的可能取值。

(4) 运用公式计算每一种结果的概率 $P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ 。

3. 模拟演练

13 天津市某中学为全面贯彻“五育并举，立德树人”的教育方针，促进学生各科平衡发展，提升学生综合素养，该校教务处要求各班针对薄弱学科成立特色学科“兴趣学习小组”（每位学生只能参加一个小组），以便课间学生进行相互帮扶。已知该校某班语文、数学、英语三个兴趣小组学生人数分别为10人、10人、15人。经过一段时间的学习，上学期期中考试中，他们的成绩有了明显进步。现采用分层抽样的方法从该班的语文，数学，英语三个兴趣小组中抽取7人，对期中考试这三科成绩及格情况进行调查。

- (1) 应从语文，数学，英语三个兴趣小组中分别抽取多少人？
- (2) 若抽取的7人中恰好有5人三科成绩全部及格，其余2人三科成绩不全及格。现从这7人中随机抽取4人做进一步的调查。
 - ① 记 X 表示随机抽取4人中，语文，数学，英语三科成绩全及格的人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望。
 - ② 设 M 为事件“抽取的4人中，有人成绩不全及格”，求事件 M 发生的概率。

答案

(1) 2人，2人，3人。

(2) ①

X	2	3	4
P	$\frac{10}{35}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{5}{35}$

$$E(X) = \frac{20}{7}.$$

② $\frac{6}{7}.$

解析

(1) 依题意，知语文、数学、英语三个兴趣小组的人数之比为2:2:3，因此，采用分层抽样方法从中抽取7人，应从语文、数学、英语三个兴趣小组中分别抽取2人、2人、3人。

(2) ① 依题意，得随机变量 X 的所有可能取值为2, 3, 4。

$$\text{所以, } P(X=k) = \frac{C_5^k \cdot C_2^{4-k}}{C_7^4} (k=2, 3, 4).$$

因此，所求随机变量 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{10}{35}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{5}{35}$

故随机变量 X 的数学期望为

$$E(X) = 2 \times \frac{10}{35} + 3 \times \frac{20}{35} + 4 \times \frac{5}{35} = \frac{20}{7}.$$

- ② 依题意，设事件 B 为“抽取的4人中，三科成绩全及格的有2人，三科成绩不全及格的有2人”；事件 C 为“抽取的4人中，三科成绩全及格的有3人，三科成绩不全及格的有1人”。

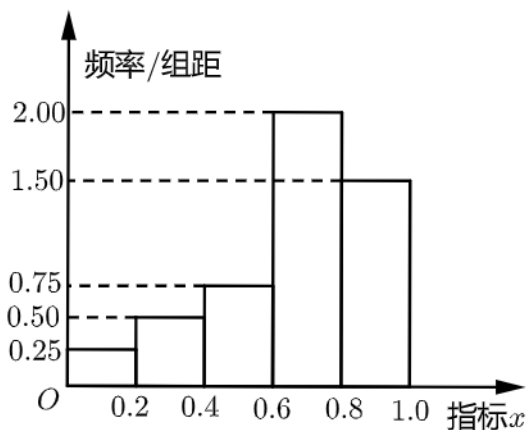
则有 $M = B \cup C$ ，且 B 与 C 互斥。

由①知， $P(B) = P(X = 2)$ ， $P(C) = P(X = 3)$ ，

$$\text{所以 } P(M) = P(B \cup C) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{6}{7}.$$

故事件 M 发生的概率为 $\frac{6}{7}$ 。

- 14 在贯彻中共中央、国务院关于精准扶贫政策的过程中，某单位在某市定点帮扶某村100户贫困户。为了做到精准帮扶，工作组对这100户村民的年收入情况、危旧房情况、患病情况等进行调查，并把调查结果转化为各户的贫困指标将指标 x 。按照 $[0, 0.2)$ ， $[0.2, 0.4)$ ， $[0.4, 0.6)$ ， $[0.6, 0.8)$ ， $[0.8, 1.0)$ 分成五组，得到如图所示的频率分布直方图。规定若 $0 \leq x < 0.6$ ，则认定该户为“绝对贫困户”，否则认定该户为“相对贫困户”；当 $0 \leq x < 0.4$ 时，认定该户为“亟待帮助户”。



- 为了更好的了解和帮助该村的这些贫困户，决定用分层抽样的方法从这100户中随机抽取20户进行更深入的调查，求应该抽取“绝对贫困户”的户数。
- 从这20户中任取3户，求“绝对贫困户”多于“相对贫困户”的概率。
-

现在从(1)中所抽取的“绝对贫困户”中任取3户，用 X 表示所选3户中“亟待帮助户”的户数，求 X 的分布列和数学期望 EX 。

答案

(1) 6户。

(2) $\frac{23}{114}$ 。

(3)

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$\frac{3}{2}$ 。

解析

(1) 由题意知：“绝对贫困户”的概率为： $(0.25 + 0.5 + 0.75) \times 0.2 = 0.3$ ，

故随机抽取20户进行更深入的调查，应该抽取“绝对贫困户”的户数是： $20 \times 0.3 = 6$ 。

(2) 由(1)可知：20户中有6户是“绝对贫困户”，有 $20 - 6 = 14$ 户是“相对贫困户”，任取三户，“绝对贫困户”多于“相对贫困户”的概率为： $\frac{C_6^3 + C_6^2 C_{14}^1}{C_{20}^3} = \frac{23}{114}$ 。

(3) 由题意可知，“亟待帮助户”的概率为： $(0.25 + 0.5) \times 0.2 = 0.15$ ，

故1中所抽取的“绝对贫困户”中有 $20 \times 0.15 = 3$ 户“亟待帮助户”，

$$P(x=0) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}, P(x=1) = \frac{C_3^1 C_3^2}{C_6^3} = \frac{9}{20}, P(x=2) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_6^3} = \frac{9}{20},$$

$$P(x=3) = \frac{C_3^3}{C_6^3} = \frac{1}{20}.$$

故列出 x 的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$\text{故数学期望 } EX = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{9}{20} + 2 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{1}{20} = \frac{3}{2}.$$

四、相互独立事件

1. 真题分析

- 15 从甲地到乙地要经过3个十字路口，设各路口信号灯工作相互独立，且在各路口遇到红灯的概率分别为 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ 。

- (1) 设 X 表示一辆车从甲地到乙地遇到红灯的个数，求随机变量 X 的分布列和数学期望．
- (2) 若有 2 辆车独立地从甲地到乙地，求这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率．

答案

- (1) 随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

$$E(X) = \frac{13}{12}.$$

- (2) $\frac{11}{48}$.

解析

- (1) 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3 .

$$P(X=0) = (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3}) \times (1 - \frac{1}{4}) + (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{4}) + (1 - \frac{1}{2}) \times (1 - \frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24}$$

$$P(X=2) = (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3}) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}.$$

所以，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$

$$\text{随机变量 } X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{11}{24} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{24} = \frac{13}{12}.$$

- (2) 设 Y 表示第一辆车遇到红灯的个数， Z 表示第二辆车遇到红灯的个数，则所求事件的概率为

$$\begin{aligned} P(Y+Z=1) &= P(Y=0, Z=1) + P(Y=1, Z=0) = P(Y=0)P(Z=1) \\ &+ P(Y=1)P(Z=0) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{11}{24} + \frac{11}{24} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{48}. \end{aligned}$$

所以，这 2 辆车共遇到 1 个红灯的概率为 $\frac{11}{48}$.

16 某城市为鼓励人们绿色出行，乘坐地铁，地铁公司决定按照乘客经过地铁站的数量实施分段优惠政策，不超过 30 站的地铁票价如下表：

现有甲、乙两位乘客同时从起点乘坐同一辆地铁，已知他们乘坐地铁都不超过 30 站．甲、乙乘坐

乘坐站数 x	$0 < x \leq 10$	$10 < x \leq 20$	$20 < x \leq 30$
票价(元)	3	6	9

不超过10站的概率分别为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$; 甲、乙乘坐超过20站的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

(1) 求甲、乙两人付费相同的概率.

(2) 设甲、乙两人所付费用之和为随机变量 X , 求 X 的分布列和数学期望.

答案

(1) $\frac{1}{3}$.

(2) 分布列为:

X	6	9	12	15	18
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

数学期望为: $E(X) = \frac{51}{4}$.

解析

(1) 要使甲乙两人所付费用相同, 则两人乘车所到站数在同一区间,

①当两人乘坐站数在0到10之间时, $P_1 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$,

②当两人乘坐站数在10到20之间时, $P_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$,

③当两人乘坐站数在20到30之间时, $P_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,

$\therefore$ 甲乙两人付费相同的概率 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{1}{3}$.

(2) 由题可知随机变量 X 的取值可能为6, 9, 12, 15, 18,

故 $P(X=6) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$,

$P(X=9) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{6}$,

$P(X=12) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$,

$P(X=15) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$,

$P(X=18) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,

$\therefore$ 其分布列为:

X	6	9	12	15	18
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

数学期望为: $E(X) = 6 \times \frac{1}{12} + 9 \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{3} + 15 \times \frac{1}{4} + 18 \times \frac{1}{6}$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 4 + \frac{15}{4} + 3$

$= \frac{51}{4}$.

2. 思路总结

(1) 将复杂事件拆分为简单事件，分别计算出每种简单事件的概率。

(2) 分析复杂事件的类型，判断利用概率相加还是相乘，(注意：遇到较复杂事件时，可求出其对立事件的概率)

例如：成产出一批零件，甲车间生产合格率为0.9，乙车间生产的合格率为0.85，从甲乙两车间产品中各抽取一件，则：①两件都是正品的概率？②恰有一件是正品的概率？③至少有一件是正品的概率？

3. 模拟演练

17 某企业有甲、乙两研发小组，他们研发新产品成功的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{5}$ 。现安排甲组研发新产品A，乙组研发新产品B，设甲、乙两组的研发相互独立。

(1) 求至少有一种新产品研发成功的概率；

(2) 若新产品A研发成功，预计企业可获利润120万元；若新产品B研发成功，预计企业可获利润100万元。求该企业可获利润的分布列和数学期望。

答案

(1) $\frac{13}{15}$

(2) ξ 的分布列列为：

ξ	0	120	100	220
$P(\xi)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

数学期望 $E\xi = 140$ 。

解析

(1) 设至少有一组研发成功的事件为事件A且事件B为事件A的对立事件，则事件B为一种新产品都没有成功，因为甲、乙成功的概率分别为 $\frac{2}{3}$ ， $\frac{3}{5}$ ，则

$P(B) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$ ，再根据对立事件概率之间的公式可得

$P(A) = 1 - P(B) = \frac{13}{15}$ ，所以至少一种产品研发成功的概率为 $\frac{13}{15}$ 。

(2) 由题可得设该企业可获得利润为 ξ ，则 ξ 的取值有0，120+0，100+0，120+100，即

$\xi = 0, 120, 100, 220$ ，由独立试验的概率计算公式可得：

$P(\xi = 0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{15}$ ； $P(\xi = 120) = \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{15}$ ；

$P(\xi = 100) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$; $P(\xi = 220) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$; 所以 ξ 的分布列如下:

ξ	0	120	100	220
$P(\xi)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

则数学期望 $E\xi = 0 \times \frac{2}{15} + 120 \times \frac{4}{15} + 100 \times \frac{1}{5} + 220 \times \frac{2}{5} = 32 + 20 + 88 = 140$.

- 18 甲、乙、丙均两次参加英语高考，取两次成绩中较高的为最终成绩，三人第一次成绩不低于130分的概率依次为 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ 。甲若第一次成绩不低于130分，则第二次成绩不低于130分的概率为 $\frac{2}{3}$ ，若第一次成绩在130分以下，则第二次成绩不低于130分的概率为 $\frac{1}{3}$ ；乙若第一次成绩不低于130分，则第二次成绩不低于130的概率为 $\frac{1}{4}$ ，若第一次成绩在130分以下，则第二次成绩不低于130分的概率为 $\frac{1}{2}$ ；丙第二次成绩不受第一次成绩的影响，不低于130分的概率为 $\frac{2}{3}$ 。

(1) 设A为事件“甲的英语高考最终成绩不低于130分”，B为事件“乙的英语高考最终成绩不低于130分”，C为事件“丙的英语高考最终成绩不低于130分”，分别求出事件A、事件B、事件C发生的概率。

(2) 设甲、乙、丙中英语高考最终成绩不低于130分的人数为X，求X的分布列与数学期望。

答案

(1) $\frac{7}{12}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{5}{6}$ 。

(2)

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{10}{36}$

$E(X) = 2$ 。

解析

(1) $P(A) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ 。

$P(B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ 。

$P(C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$ 。

(2) X的可能取值为0、1、2、3。

$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ 。

$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{17}{36}$ 。

$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$ 。

$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{36}$ 。

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{10}{36}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{36} + 1 \times \frac{8}{36} + 2 \times \frac{17}{36} + 3 \times \frac{10}{36} = 2.$$

五、正态分布

1. 真题分析

19 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 且 $P(-2 \leq X \leq 0) = 0.4$, 则 $P(X > 2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 0.1

解析
$$\begin{cases} P(X > 2) = P(X < -2) \\ P(X < -2) + P(-2 \leq X \leq 0) = \frac{1}{2} \end{cases},$$

解得 $P(X > 2) = 0.1$.

20 某实验室针对某种新型病毒研发了一种疫苗, 并在 500 名志愿者身上进行了人体注射实验, 发现注射疫苗的志愿者均产生了稳定的免疫应答. 若这些志愿者的某免疫反应蛋白 M 的数值 X (单位: mg/L) 近似服从正态分布 $N(15, \sigma^2)$, 且 X 在区间 $(10, 20)$ 内的人数占总人数的 $\frac{19}{25}$, 则这些志愿者中免疫反应蛋白 M 的数值 X 不低于 20 的人数大约为 ().

A. 30

B. 60

C. 70

D. 140

答案 B

解析 因为 $X \sim N(15, \sigma^2)$,

$$\text{又 } P(X \leq 10) + P(X \geq 20) = 1 - P(10 < X < 20) = 1 - \frac{19}{25} = \frac{6}{25},$$

$$\text{所以 } P(X \leq 10) = P(X \geq 20) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{25} = \frac{3}{25},$$

$$\text{所以这些志愿者中免疫反应蛋白 } M \text{ 的数值 } X \text{ 不低于 } 20 \text{ 的人数大约为 } 500 \times \frac{3}{25} = 60.$$

故选 B.

2. 思路总结

正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma)$

明确正态分布曲线的特点：①曲线位于 x 轴上方，且与 x 轴不相交；②曲线是单峰的，关于 $x = \mu$ 对称；③曲线与 x 轴间的面积为 1；④几何意义： μ ：表示期望， σ ：表示方差；⑤ μ 一定时， σ 越小，曲线越“瘦高”， σ 越大，曲线越矮胖。

3. 模拟演练

21 随机变量 $X \sim N(3, \sigma^2)$ ，且 $P(0 < X < 3) = 0.35$ ， $P(X > 6) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

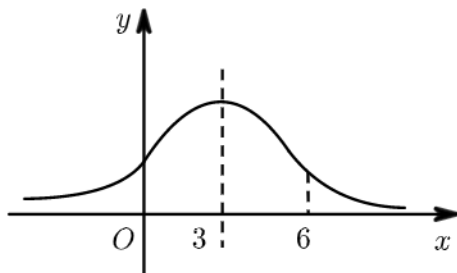
答案 0.15

解析 $\because X \sim N(3, \sigma^2)$ ，

$$\therefore \mu = 3,$$

$$\therefore P(0 < X < 3) = P(3 < x < 6) = 0.35,$$

$$\therefore P(X > 6) = P(X < 0) = \frac{1 - 0.35 \times 2}{2} = 0.15.$$



22 设随机变量 $X \sim N(1, 5^2)$ ，且 $P(X \leq 0) = P(X \geq a - 2)$ ，则实数 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答案 4

解析 $X \sim N(1, 5^2)$

$$\text{则 } \mu = 1, \sigma = 5;$$

$$P(X \leq 0) = P\left(\frac{X - 1}{5} \leq \frac{-1}{5}\right),$$

$$P(X \geq a-2) = P\left(\frac{X-1}{5} \geq \frac{a-3}{5}\right),$$

由对称性知 $-\frac{1}{5} + \frac{a-3}{5} = 0$ 则 $a = 4$.

故答案为：4.

- 23 对一个物理量做 n 次测量，并以测量结果的平均值作为该物理量的最后结果．已知最后结果的误差 $\varepsilon_n \sim N\left(0, \frac{2}{n}\right)$ ，为使误差 ε_n 在 $(-0.5, 0.5)$ 的概率不小于 0.9545，至少要测量 _____ 次（若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，则 $P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0.9545$ ）．

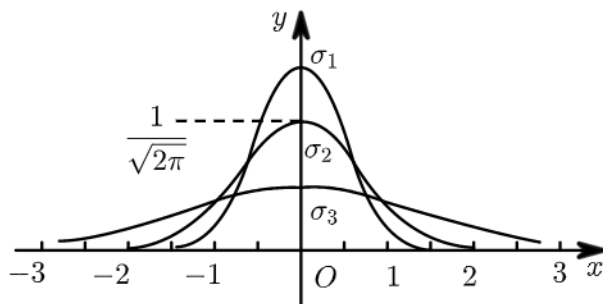
答案 32

解析 根据正态曲线的对称性知：要使误差 ε_n 在 $(-0.5, 0.5)$ 的概率不小于 0.9545，则

$$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) \subseteq (-0.5, 0.5), \text{ 且 } \mu = 0, \sigma = \sqrt{\frac{2}{n}},$$

$$\therefore 0.5 \geq 2\sqrt{\frac{2}{n}} \Rightarrow n \geq 32.$$

- 24 如图是当 σ 取三个不同值 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 时的三种正态曲线，那么 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的大小关系是（ ）．



- A. $\sigma_1 > \sigma_3 > \sigma_2 > 0$
- B. $0 < \sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_2$
- C. $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$
- D. $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$

答案 D

解析 由图可知，三种正态曲线的 μ 都等于 0，

由 μ 一定时， σ 越小，曲线越“高瘦”，表示总体的分布越集中， σ 越大，曲线越“矮胖”，

表示总体的分布越分散，则 $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

故选D .

六、综合创新

25 某工厂的某种产品成箱包装，每箱200件，每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验，如检验出不合格品，则更换为合格品. 检验时，先从这箱产品中任取20件作检验，再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验. 设每件产品为不合格品的概率都为 p ($0 < p < 1$)，且各件产品是否为不合格品相互独立.

- (1) 记20件产品中恰有2件不合格品的概率为 $f(p)$ ，求 $f(p)$ 的最大值点 p_0 .
- (2) 现对一箱产品检验了20件，结果恰有2件不合格品，以(1)中确定的 p_0 作为 p 的值. 已知每件产品的检验费用为2元，若有不合格品进入用户手中，则工厂要对每件不合格品支付25元的赔偿费用.
 - (i) 若不对该箱余下的产品作检验，这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X ，求 $E(X)$ ；
 - (ii) 以检验费用与赔偿费用之和的期望值为决策依据，是否该对这箱余下的所有产品作检验？

答案

- (1) 见解析
- (2) 见解析

解析

- (1) 解：记20件产品中恰有2件不合格品的概率为 $f(p)$ ，
 则 $f(p) = C_{20}^2 p^2 (1-p)^{18}$ ，
 $\therefore f'(p) = C_{20}^2 [2p(1-p)^{18} - 18p^2(1-p)^{17}] = 2C_{20}^2 p(1-p)^{17} (1-10p)$ ，
 令 $f'(p) = 0$ ，得 $p = 0.1$ ，
 当 $p \in (0, 0.1)$ 时， $f'(p) > 0$ ，
 当 $p \in (0.1, 1)$ 时， $f'(p) < 0$ ，
 $\therefore f(p)$ 的最大值点 $p_0 = 0.1$.
- (2) (i) 由(1)知 $p = 0.1$ ，

令 Y 表示余下的180件产品中的不合格品数, 依题意知 $Y \sim B(180, 0.1)$,

$$X = 20 \times 2 + 25Y, \text{ 即 } X = 40 + 25Y,$$

$$\therefore E(X) = E(40 + 25Y) = 40 + 25E(Y) = 40 + 25 \times 180 \times 0.1 = 490.$$

(ii) 如果对余下的产品作检验, 则这一箱产品所需要的检验费为400元,

$$\therefore E(X) = 490 > 400,$$

$\therefore$ 应该对余下的产品进行检验.

26 在平面直角坐标系 xOy 中, 设点集 $A_n = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$, $B_n = \{(0, 1), (n, 1)\}$,

$C_n = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), \dots, (n, 2)\}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 令 $M_n = A_n \cup B_n \cup C_n$, 从集合 M_n 中任取两个不同的点, 用随机变量 X 表示它们之间的距离.

(1) 当 $n = 1$ 时, 求 X 的概率分布.

(2) 对给定的正整数 $n(n \geq 3)$, 求概率 $P(X \leq n)$ (用 n 表示).

答案

$$\begin{aligned} (1) \quad & P(X = 1) = \frac{7}{15}; \\ & P(X = \sqrt{2}) = \frac{4}{15}; \\ & P(X = 2) = \frac{2}{15}; \\ & P(X = \sqrt{5}) = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

$$(2) \quad 1 - \frac{6}{C_{2n+4}^2}.$$

解析

(1) 当 $n = 1$ 时, X 的所有可能取值是 $1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}$.

$$X \text{ 的概率分布为 } P(X = 1) = \frac{7}{C_6^2} = \frac{7}{15},$$

$$P(X = \sqrt{2}) = \frac{4}{C_6^2} = \frac{4}{15},$$

$$P(X = 2) = \frac{2}{C_6^2} = \frac{2}{15},$$

$$P(X = \sqrt{5}) = \frac{2}{C_6^2} = \frac{2}{15}.$$

(2) 设 $A(a, b)$ 和 $B(c, d)$ 是从 M_n 中取出的两个点,

因为 $P(X \leq n) = 1 - P(X > n)$, 所以仅需考虑 $X > n$ 的情况,

① 若 $b = d$, 则 $AB \leq n$, 不存在 $X > n$ 的取法;

$$\text{② 若 } b = 0, d = 1, \text{ 则 } AB = \sqrt{(a-c)^2 + 1} \leq \sqrt{n^2 + 1},$$

所以 $X > n$ 当且仅当 $AB = \sqrt{n^2 + 1}$,

此时 $a = 0, c = n$ 或 $a = n, c = 0$, 有 2 种取法;

③若 $b = 0, d = 2$, 则 $AB = \sqrt{(a-c)^2 + 4} \leq \sqrt{n^2 + 4}$,

因为当 $n \geq 3$ 时, $\sqrt{(n-1)^2 + 4} \leq n$,

所以 $X > n$ 当且仅当 $AB = \sqrt{n^2 + 4}$,

此时 $a = 0, c = n$ 或 $a = n, c = 0$, 有 2 种取法;

④若 $b = 1, d = 2$, 则 $AB = \sqrt{(a-c)^2 + 1} \leq \sqrt{n^2 + 1}$,

所以 $X > n$ 当且仅当 $AB = \sqrt{n^2 + 1}$,

此时 $a = 0, c = n$ 或 $a = n, c = 0$, 有两种取法.

综上, 当 $X > n$ 时, X 的所有可能取值是 $\sqrt{n^2 + 1}$ 和 $\sqrt{n^2 + 4}$,

$$P(X = \sqrt{n^2 + 1}) = \frac{4}{C_{2n+4}^2},$$

$$P(X = \sqrt{n^2 + 4}) = \frac{2}{C_{2n+4}^2},$$

因此, $P(X \leq n) = 1 - P(X = \sqrt{n^2 + 1}) - P(X = \sqrt{n^2 + 4})$

$$= 1 - \frac{6}{C_{2n+4}^2}.$$