错位相减与分组并项

1. 知识梳理

一、错位相减

1. 真题分析

1 设$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，公比大于0，已知$a_1=b_1=3$，$b_2=a_3$，$b_3=4a_2+3$．

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设数列$\{c_n\}$满足$c_n=\begin{cases}1, n为奇数\\ b_{\frac{n}{2}}, n为偶数\end{cases}$，求$a_1c_1+a_2c_2+\cdots a_{2n}c_{2n}\,(n\in\mathbf{N}^*)$．

答案 (1) $a_n=3n$，$b_n=3^n$．

(2) $\dfrac{(2n-1)\,3^{n+2}+6n^2+9}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$

解析 (1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列b_n的公比为q依题意，

得$\begin{cases}3q=3+2d\\ 3q^2=15+4d\end{cases}$，解得$\begin{cases}d=3\\ q=3\end{cases}$，

故$a_n=3+3(n-1)=3n$，$b_n=3\times3^{n-1}=3^n$，

所以，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3^n$．

(2)
$$a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_{2n}c_{2n}$$
$$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})+(a_2b_1+a_4b_2+a_6b_3+\cdots+a_{2n}b_n)$$
$$=\left[n\times3+\frac{n(n-1)}{2}\times6\right]+(6\times3^1+12\times3^2+18\times3^3+\cdots+6_n\times3^n)$$

$= 3n^2 + 6\left(1\times 3^1 + 2\times 3^2 + \cdots + n\times 3^n\right)$.

$T_n = 1\times 3^1 + 2\times 3^2 + \cdots + n\times 3^n$ ，①

$3T_n = 1\times 3^2 + 2\times 3^3 + \cdots + n\times 3^{3+1}$ ，②

②−①得，$2T_n = -3 - 3^2 - 3^3 - \cdots - 3^n + n\times 3^{n+1}$

$$= -\frac{3\left(1-3^n\right)}{1-3} + n\times 3^{n+1}$$

$$= \frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2} .$$

所以，$a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_{20}c_{2n}$

$= 3n^2 + 6T_n$

$$= 3n^2 + 3\times\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{2}$$

$$= \frac{(2n-1)3^{n+2}+6n^2+9}{2}(n\in\mathbf{N}^*) .$$

2 已知$\{a_n\}$为等差数列，前n项和为$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，$\{b_n\}$是首项为2的等比数列，且公比大于0，

$b_2 + b_3 = 12$，$b_3 = a_4 - 2a_1$ ，$S_{11} = 11b_4$.

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 求数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前n项和$(n\in\mathbf{N}^*)$.

答案 (1) $a_n = 3n-2$. $b_n = 2^n$.

(2) $\dfrac{3n-2}{3}\times 4^{n+1} + \dfrac{8}{3}$.

解析 (1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q，

由已知$b_2 + b_3 = 12$，得$b_1(q+q^2) = 12$，而$b_1 = 2$，所以$q + q^2 = 6$，

又$q > 0$，解得$q = 2$，所以$b_n = 2^n$.

由$b_3 = a_4 - 2a_1$可得$3d - a_1 = 8$，①

由$S_{11} = 11b_4$ ，可得$S_{11} = 11a_6 = 11b_4$ ，即$a_1 + 5d = 16$，②

联立①②解得$a_1 = 1$，$d = 3$，

所以$a_n = 3n-2$.

所以，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n = 3n-2$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n = 2^n$.

(2) 设数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前n项和为T_n ，

由$a_{2n} = 6n-2$，$b_{2n-1} = 2\times 4^{n-1}$ ，有$a_{2n}b_{2n-1} = (3n-1)\times 4^n$ ，

故$T_n=2\times4+5\times4^2+8\times4^3+\cdots+(3n-1)\times4^n$，

$4T_n=2\times4^2+5\times4^3+8\times4^4+\cdots+(3n-4)\times4^n+(3n-1)\times4^{n+1}$，

上述两式相减，得$-3T_n=2\times4+3\times4^2+3\times4^3+\cdots+3\times4^n-(3n-1)\times4^{n+1}$

$=\frac{12\times(1-4^n)}{1-4}-4-(3n-1)\times4^{n+1}$

$=-(3n-2)\times4^{n+1}-8.$

得$T_n=\dfrac{3n-2}{3}\times4^{n+1}+\dfrac{8}{3}$．

所以数列$\{a_{2n}b_{2n-1}\}$的前n项和为$\dfrac{3n-2}{3}\times4^{n+1}+\dfrac{8}{3}$．

3 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+2}=qa_n$（q为实数，且$q\neq1$），$n\in\mathbf{N}^*$，$a_1=1$，$a_2=2$，且a_2+a_3，a_3+a_4，a_4+a_5成等差数列.

(1) 求q的值和$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设$b_n=\dfrac{\log_2a_{2n}}{a_{2n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和.

答案

(1) $a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}},n=2k-1\\2^{\frac{n}{2}},n=2k\end{cases}$，$k\in\mathbf{N}^*$．

(2) $4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$．

解析

(1) 依题意$a_3=q$，$a_4=2q$，$a_5=q^2$．

因为a_2+a_3，a_3+a_4，a_4+a_5成等差数列，所以$a_3+a_4=a_2+a_5$，

所以$3q=q^2+2$，$q=2$或者$q=1$（舍）

当$n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时，$a_n=a_{2k-1}=2^{k-1}=2^{\frac{n-1}{2}}$；

当$n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，$a_n=a_{2k}=2^k=2^{\frac{n}{2}}$．

所以，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}2^{\frac{n-1}{2}},n=2k-1\\2^{\frac{n}{2}},n=2k\end{cases}$，$k\in\mathbf{N}^*$．

(2) 由（Ⅰ）得$b_n=\dfrac{\log_2a_{2n}}{a_{2n-1}}=\dfrac{n}{2^{n-1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$．

设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n.

所以$T_n=\dfrac{1}{2^0}+\dfrac{2}{2^1}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$，

$\dfrac{1}{2}T_n=\dfrac{1}{2^1}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}+\dfrac{n}{2^n}$，

两式相减，得

$\dfrac{1}{2}T_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{2}{2^n}-\dfrac{n}{2^n}$，

整理得，$T_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$．

所以数列$\{b_n\}$的前n项和为$4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$．

4 已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$\{b_n\}$是等差数列，且$a_1=b_1=1$，$b_2+b_3=2a_3$，$a_5-3b_2=7$．

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=a_nb_n$，$n\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{c_n\}$的前n项和．

答案 (1) $a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，$b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) $S_n=(2n-3)\times 2^n+3(n\in\mathbf{N}^*)$．

解析 (1) 设数列$\{a_n\}$的公比为q，数列$\{b_n\}$的公差为d，由题意$q>0$，

由已知，有$\begin{cases}2q^2-3d=2\\ q^4-3d=10\end{cases}$，消去$d$，整理得$q^4-2q^2-8=0$，

又因为$q>0$，解得$q=2\therefore d=2$．

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) 由（1）可得$c_n=(2n-1)\cdot 2^{n-1}$，

设$\{c_n\}$的前n项和为S_n，

则$S_n=1\times 2^0+3\times 2^1+5\times 2^2+\cdots+(2n-3)\times 2^{n-2}+(2n-1)\times 2^{n-1}$，

$2S_n=1\times 2^1+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+(2n-3)\times 2^{n-1}+(2n-1)\times 2^n$

上述两式相减，得$-S_n=1+2^2+2^3+\cdots+2^n-(2n-1)\times 2^n$

$=2^{n+1}-3-(2n-1)\times 2^n=-(2n-3)\times 2^n-3$，

所以$S_n=(2n-3)\times 2^n+3(n\in\mathbf{N}^*)$．

2. 思路总结

如果数列的通项是一个等差数列的通项与一个等比数列通项相乘或相除构成,常选用错位相减法（也就是等比数列前n项和公式的推导方法);

①如果是等差与等比相乘,可以求和公式左右同乘以等比数列的公比,再错位相减得结论;

②如果是等差除以等比数列类型 ,可以在求和等式左右同乘以公比的倒数,两式再错位相减得结论;

③在消项时一定注意错位相消,明白消去了哪些部分,留下的部分是什么数列,怎么利用等差数列与等比数列求和公式分组求和;

④求和时注意正负号不要丢了,也不要弄错.

3. 模拟演练

5 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，且$[3+(-1)^n]a_{n+2}-2a_n+2[(-1)^n-1]=0$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求a_3，a_4，a_5，a_6的值及数列$\{a_n\}$的通项公式 .

(2) 设$b_n=a_{2n-1}\cdot a_{2n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n .

答案 (1) $a_3=3$，$a_4=\frac{1}{4}$，$a_5=5$，$a_6=\frac{1}{8}$，$a_n=\begin{cases}n, & n=2k-1\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n=2k\end{cases}$.

(2) $S_n=3-(2n+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

解析 (1) 由题意得：

$a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，且$[3+(-1)^n]a_{n+2}-2a_n+2[(-1)^n-1]=0$，

令$n=1$，得：

$2a_3-2a_1-4=0$，$a_3=3$，

令$n=2$，得：

$4a_4-2a_2=0$，$a_4=\frac{1}{4}$，

令$n=3$，得：

$2a_5-2a_3-4=0$，$a_5=5$，

令$n=4$，得：

$4a_6-2a_4=0$，$a_6=\frac{1}{8}$，

当n为奇数，即$n=2k-1(k\in\mathbf{N}^*)$时，有：

$2a_{n+2}-2a_n=4$，

即$a_{n+2}-a_n=2$，即相邻两个奇数项差恒为2，

设奇数项为a_{2k-1}，又因为$a_1=1$，

$\therefore a_{2k-1}=a_1+(k-1)\times2=2k-1$，

即$a_n=n$.

当n为偶数，即$n=2k(k\in\mathbf{N}^*)$时，有：

$4a_{n+2}=2a_n$，即$a_{n+2}=\dfrac{1}{2}a_n$，

设偶数项为a_{2k}，且$a_2=\dfrac{1}{2}$，

$a_{2k}=a_2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}$，

即$a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$的通项公式为：$a_n=\begin{cases}n, & n=2k-1\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n=2k\end{cases}$.

(2) $b_n=a_{2n-1}\cdot a_{2n}$，即$b_n=(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$，

$S_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1}+3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+(2n-3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

$\dfrac{1}{2}S_n=1\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}+\cdots+(2n-5)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+(2n-3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

$+(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$，

两式相减得：

$\dfrac{1}{2}S_n=1\times\dfrac{1}{2}+2\cdot\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3}+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right]$

$-(2n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$，

$=\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{\dfrac{1}{4}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}-(2n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$，

$=\dfrac{3}{2}-(2n+3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，

$\therefore S_n=3-(2n+3)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$.

6 数列$\{a_n\}$是等差数列，S_n为其前n项和，且$a_5=3a_2$，$S_7=14a_2+7$，数列$\{b_n\}$前n项和为T_n，且满足$3b_n=2T_n+3$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1) 求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

(2) 设数列$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$的前$n$项和为$R_n$，求$R_n$.

答案 (1) $a_n=2n-1$；$b_n=3^n$.

(2) $\dfrac{3^{n+1}-3^n-2n-2}{3^{n+1}}$.

解析 (1) 数列$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，且$a_5=3a_2$，$S_7=14a_2+7$，

可得$a_1+4d=3(a_1+d)$，$7a_1+21d=14(a_1+d)+7$，

解得$a_1=1$，$d=2$，

则$a_n=2n-1$；

对于数列$\{b_n\}$，当$n=1$时，$T_1=b_1$，$3b_1=2b_1+3$，$b_1=3$．

当$n\geqslant 2$时，$3b_{n-1}=2T_{n-1}+3$①，又$3b_n=2T_n+3$②，

②-①得：$3b_n-3b_{n-1}=2(T_n-T_{n-1})=2b_n$，

$\therefore b_n=3b_{n-1}$，

故b_n是以3为首位，3为公比的等比数列，

$\therefore b_n=3\times 3^{n-1}=3^n$．

(2) 由题意可知：$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{2n-1}{3^n}$，

$\therefore R_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{3^2}+\dfrac{5}{3^3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{3^n}$，

$\therefore \dfrac{1}{3}R_n=\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{3^n}++\dfrac{2n-1}{3^{n+1}}$，

$$\begin{aligned}R_n-\frac{1}{3}R_n&=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{2}{3^n}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\\&=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)-\frac{1}{3}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\\&=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\times\frac{1}{3}\times 2-\frac{1}{3}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\\&=1-\frac{1}{3^n}-\frac{1}{3}-\frac{2n-1}{3^{n+1}}\\&=\frac{3^{n+1}-3^n-2n-2}{3^{n+1}}.\end{aligned}$$

7 已知等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公比$q>1$，且a_2+1为a_1，a_3的等差中项，$S_3=14$．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 记$b_n=a_n\cdot\log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

答案 (1) $a_n=2^n$．

(2) $T_n=(n-1)\,2^{n+1}+2$．

解析 (1) 由题意，得$2\,(a_2+1)=a_1+a_3$，又$S_3=a_1+a_2+a_3=14$，

$\therefore 2\,(a_2+1)=14-a_2$，

$\therefore a_2=4$，

$\because S_1=\dfrac{4}{q}+4+4q=14$，

$\therefore q=2$或$q=\dfrac{1}{2}$．

$\because q>1$，

$\therefore q=2$．

$\therefore a_n=a_2q^{n-2}=4\cdot 2^{n-2}=2^n$．

(2) 由（1），知$a_n=2^n$，

$\therefore b_n=a_n\cdot\log_2 a_n=2^n\cdot n$，

$\therefore T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^{n-1}+n\times 2^n$，

$\therefore 2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$．

$\therefore -T_n=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\times 2^{n+1}$

$=\dfrac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}-n\times 2^{n+1}=(1-n)\,2^{n+1}-2$．

$\therefore T_n=(n-1)\,2^{n+1}+2$．

8 已知S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和，$a_1=2$且$4S_n=a_n\cdot a_{n+1}$，$(n\in\mathbf{N}^*)$，数列$\{b_n\}$中，$b_1=\dfrac{1}{4}$，且$b_{n+1}=\dfrac{nb_n}{(n+1)-b_n}(n\in\mathbf{N}^*)$．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\dfrac{a_n+1}{3^{\frac{1}{3b_n}+\frac{2}{3}}}$．求$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$．

答案 (1) $a_n=2n\,(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) $T_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$．

解析 (1) 由题可知，当$n=1$时$a_2=4$，

当$n\geqslant 2$时，$4S_n=a_n\cdot a_{n+1}$，$4S_{n-1}=a_n\cdot a_{n-1}$，

两式相减得$4a_n=a_n\left(a_{n+1}-a_{n-1}\right)$，

又$\because a_n\neq 0$，

$\therefore a_{n+1}-a_{n-1}=4$．

$\therefore$数列$\{a_n\}$的奇数项和偶数项分别构成以4为公差的等差数列，

当$n=2k-1$，$n\in\mathbf{N}^*$时，

$a_n=a_{2k-1}=4k-2=2n$；

当$n=2k$，$n\in\mathbf{N}^*$时，$a_n=a_{2k}=4k=2n$；

$\therefore a_n=2n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$．

(2) $\because b_{n+1}=\dfrac{nb_n}{(n+1)-b_n}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

$\therefore\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{n+1}{nb_n}-\dfrac{1}{n}$，

整理得：$\dfrac{1}{(n+1)\,b_{n+1}}=\dfrac{1}{nb_n}-\dfrac{1}{n\,(n+1)}$，

$\therefore\dfrac{1}{nb_n}-\dfrac{1}{(n-1)\,b_{n-1}}=-\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)$，

$\dfrac{1}{(n-1)\,b_{n-1}}-\dfrac{1}{(n-2)\,b_{n-2}}=-\left(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n-1}\right)$，

$\dfrac{1}{2b_2}-\dfrac{1}{b_1}=-\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{1}{nb_n}=\dfrac{3n+1}{n}$，

$\therefore b_n=\dfrac{1}{3n+1}(n\geqslant 2)$，

当$n=1$时也适合$b_n=\dfrac{1}{3n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$．

$\because c_n=\dfrac{n}{2^n}$，

错位相减得$T_n=2-\dfrac{n+2}{2^n}$．

9 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1$．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式．

(2) 设数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，且$T_n+\dfrac{a_n+1}{2^n}=\lambda$（$\lambda$为常数）．令$c_n=b_{2n}$（$n\in\mathbf{N}^*$）．求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$R_n$．

答案 (1) $a_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) $R_n=\dfrac{1}{9}\left(4-\dfrac{3n+1}{4^{n-1}}\right)$．

解析 (1) 设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d．由$S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1$得

$\begin{cases}4a_1+6d=8a_1+4d,\\ a_1+(2n-1)\,d=2a_1+2\,(n-1)\,d+1.\end{cases}$，解得$a_1=1$，$d=2$．因此

$a_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$．

(2) 由题意知$T_n=\lambda-\dfrac{n}{2^{n-1}}$，所以$n\geqslant 2$时，$b_n=T_n-T_{n-1}=-\dfrac{n}{2^{n-1}}+\dfrac{n-1}{2^{n-2}}=\dfrac{n-2}{2^{n-1}}$．

故$c_n=b_{2n}=\dfrac{2n-2}{2^{2n-1}}=(n-1)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以

$R_n=0\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^0+1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^1+2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+3\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，则

$\frac{1}{4}R_n=0\times\left(\frac{1}{4}\right)^1+1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots+(n-2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+(n-1)$
$\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$

，两式相减得

$\frac{3}{4}R_n=(\frac{1}{4})^1+(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^3+\cdots+(\frac{1}{4})^{n-1}-(n-1)\times(\frac{1}{4})^n=\frac{\frac{1}{4}-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}-(n-1)$
$\times(\frac{1}{4})^n=\frac{1}{3}-\frac{1+3n}{3}(\frac{1}{4})^n$

，整理得$R_n=\frac{1}{9}\left(4-\frac{3n+1}{4^{n-1}}\right)$．所以数列$\{c_n\}$的前$n$项和$R_n=\frac{1}{9}\left(4-\frac{3n+1}{4^{n-1}}\right)$．

二、分组求和

1. 真题分析

10 已知$\{a_n\}$是等比数列，前n项和为$S_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，且$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}=\frac{2}{a_3}$，$S_6=63$．

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，b_n是$\log_2 a_n$和$\log_2 a_{n+1}$的等差中项，求数列$\{(-1)^n {b_n}^2\}$的前$2n$项和．

答案 (1) $a_n=2^{n-1}$

(2) $2n^2$

解析 (1) 设数列$\{a_n\}$的公比为q，由已知有$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1q}=\frac{2}{a_1q^2}$，

解得，$q=2$，$q=-1$，

又由$S_6=\frac{a_1\left(1-q^6\right)}{1-q}=63$，可知$q=-1$（舍去），

所以$q=2$，即$\frac{a_1\left(1-2^6\right)}{1-2}=63$，解得$a_1=1$，

所以$a_n=2^{n-1}$．

(2) 题意得$b_n=\frac{1}{2}(\log_2 a_n+\log_2 a_{n+1})=\frac{1}{2}(\log_2 2^{n-1}+\log_2 2^n)=n-\frac{1}{2}$，

即数列$\{b_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公差为1的等差数列．

设数列$\{(-1)^n b_n^2\}$的前n项和为T_n，

则

$$T_{2n}=(-b_1^2+b_2^2)+(-b_3^2+b_4^2)+\cdots+(-b_{2n-1}^2+b_{2n}^2)=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}$$
$$=\frac{2n(b_1+b_{2n})}{2}=2n^2$$

.

2. 思路总结

一类数列,既不是等差数列,也不是等比数列,若将这类数列适当拆开,可分为几个等差、等比或常见的数列,然后分别求和,再将其合并即可;若一个数列的通项公式是由若干个等差数列或等比数列或可求和的数列组成,则求和时可用分组转化法,分别求和而后相加减.

常见类型与方法：

①$a_n=kn+b$,利用等差数列前n项和公式直接求解;

②$a_n=a\cdot q^n-n$,利用等比数列前n项和公式与等差数列前n项和公式直接求解;

③$a_n=b_n+c_n$,数列$\{b_n\}$,$\{c_n\}$是等比数列或等差数列;

在做题时要注意观察通项公式,若无通项公式要先求出通项公式,然后再进行分组求和.

3. 模拟练习

11 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$2S_n=3(a_n-2)$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，数列$\{b_n\}$是公差不为0的等差数列，且满足$b_1=\frac{1}{6}a_1$，b_5是b_2和b_{14}的等比中项．

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 求$\sum\limits_{i=1}^{10}\frac{1}{b_ib_{i+1}}$；

(3) 设数列$\{c_n\}$的通项公式$c_n=\begin{cases}1, n\neq 2^k\\ a_k, n=2^k\end{cases}$ （$k\in\mathbf{N}^*$），求$\sum\limits_{i=1}^{2^n}(c_i-1)^2$ （$n\in\mathbf{N}^*$）．

答案

(1) $a_n=2\times 3^n(n\in\mathbf{N}^*)$；$b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) $\frac{10}{21}$．

(3) $\sum\limits_{i=1}^{2^n}(c_i-1)^2=\frac{1}{2}\times 9^{n+1}-2\times 3^{n+1}+n+\frac{3}{2}$．

解析

(1) 因为$2S_n=3(a_n-2)(n\in\mathbf{N}^*)$①，

当$n=1$时，$2S_1=2a_1=3(a_1-2)$，

即$2a_1=3a_1-6$，

即$-a_1=-6$，

解得$a_1=6$；

当$n\geqslant 2$时，$2S_{n-1}=3(a_{n-1}-2)$②，

由①−②可得$2S_n-2S_{n-1}=3(a_n-2)-3(a_{n-1}-2)$，

即$2a_n=3a_n-3a_{n-1}$，

即 $a_n=3a_{n-1}$，

因为$a_1=6\neq 0$，

所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=3$，

所以数列$\{a_n\}$是以6为首项,3为公比的等比数列，

所以$a_n=a_1\cdot q^{n-1}=6\times 3^{n-1}=2\times 3^n(n\in\mathbf{N}^*)$，

因为数列$\{b_n\}$是公差不为0的等差数列，

设公差为d，

则$d\neq 0$，

又因为$b_1=\frac{1}{6}a_1=\frac{1}{6}\times 6=1$，

即$b_1=1$，

又因为b_5是b_2和b_{14}的等比中项，

所以$b_5^2=b_2\cdot b_{14}$，

即$(b_1+4d)^2=(b_1+d)(b_1+13d)$，

即$(1+4d)^2=(1+d)(1+13d)$，

即$1+16d^2+8d=1+14d+13d^2$，

即$3d^2-6d=0$，

即$d(d-2)=0$，

解得$d=0$或$d=2$，

又因为公差d不为0，

所以$d=2$，

所以$b_n=b_1+(n-1)d=1+2(n-1)=1+2n-2=2n-1$．

综上所述：数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2\times 3^n(n\in\mathbf{N}^*)$，

数列$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$．

(2) 因为$b_n=2n-1$，

所以$\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

所以$\sum\limits_{i=1}^{10}\dfrac{1}{b_ib_{i+1}}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{19}-\dfrac{1}{21}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{21}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{20}{21}$

$=\dfrac{10}{21}$，

所以$\sum\limits_{i=1}^{10}\dfrac{1}{b_ib_{i+1}}=\dfrac{10}{21}$．

(3) 因为$a_n=2\times3^n$，

又因为$c_n=\begin{cases}1, & n\neq2^k\\ a_k, & n=2^k\end{cases}(k\in\mathbf{N}^*)$，

所以$\sum\limits_{i=1}^{2^n}(c_i-1)^2$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-1)^2$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}(2\times3^i-1)^2$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}(4\times9^i-4\times3^i+1)$

$=4\sum\limits_{i=1}^{n}9^i-4\sum\limits_{i=1}^{n}3^i+n$

$=4\times\dfrac{9(1-9^n)}{1-9}-4\times\dfrac{3(1-3^n)}{1-3}+n$

$=4\times\dfrac{9-9^{n+1}}{-8}-4\times\dfrac{3-3^{n+1}}{-2}+n$

$=\dfrac{1}{2}\times9^{n+1}-\dfrac{9}{2}-2\times3^{n+1}+6+n$

$=\dfrac{1}{2}\times9^{n+1}-2\times3^{n+1}+n+\dfrac{3}{2}$

所以$\sum\limits_{i=1}^{2^n}(c_i-1)^2=\dfrac{1}{2}\times9^{n+1}-2\times3^{n+1}+n+\dfrac{3}{2}$．

12 设$\{a_n\}$是等比数列的公比大于0，其前n项和为S_n，$\{b_n\}$是等差数列，已知$a_1=1$，$a_3=a_2+2$，$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$．

(1) 求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\dfrac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_n$．

(3) 设$d_n=\begin{cases}b_n, n\neq2^k\\ b_n(\log_2b_n+1), n=2^k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$，求$\sum\limits_{i=1}^{2^n}d_i$．

答案 (1) $a_n=2^{n-1}$，$b_n=n$．

(2) $T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}$.

(3) $\sum_{i=1}^{2^n} d_i=2^{2n-1}+(4n-3)\cdot 2^{n-1}+2$.

解析 (1) 设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$q>0$，设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，

$\because a_1=1$，由$a_3=a_2+2$，得$q^2=q+2$，

$\because q>0$，解得$q=2$，则$a_n=a_1q^{n-1}=2^{n-1}$.

由$a_4=b_3+b_5$，$a_5=b_4+2b_6$得$\begin{cases}2b_1+6d=8\\3b_1+13d=16\end{cases}$，

解得$b_1=d=1$，则$b_n=b_1+(n-1)d=n$.

(2) $c_n=\frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}$
$=\frac{(2^n+1)-(2^{n-1}+1)}{(2^{n-1}+1)(2^n+1)}=\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}$，
$\therefore T_n=\left(\frac{1}{2^0+1}-\frac{1}{2^1+1}\right)+\left(\frac{1}{2^1+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\cdots$
$+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}\right)$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n+1}$.

(3) 由$d_n=\begin{cases}b_n, n\neq 2^k\\b_n(\log_2 b_n+1), n=2^k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$，

可得$d_n=\begin{cases}n, n\neq 2^k\\n(\log_2 n+1), n=2^k\end{cases}$，$k\in\mathbf{N}^*$，

$\sum_{i=1}^{2^n} d_i=\sum_{i=1}^{2^n} i-\sum_{i=1}^{n} 2^i+\sum_{i=1}^{n}(i+1)\cdot 2^i$，

$\sum_{i=1}^{2^n} i=\frac{2^n(1+2^n)}{2}=2^{n-1}+2^{2n-1}$，

$\sum_{i=1}^{n} 2^i=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，

设$M_n=2\cdot 2^1+3\cdot 2^2+4\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^{n-1}+(n+1)\cdot 2^n$，

$2M_n=2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+4\cdot 2^4+\cdots+n\cdot 2^n+(n+1)\cdot 2^{n+1}$，

两式相减可得$-M_n=4+2^2+2^3+\cdots+2^n-(n+1)\cdot 2^{n+1}$

$=2+\frac{2(1-2^n)}{1-2}-(n+1)\cdot 2^{n+1}$，

化为$M_n=n\cdot 2^{n+1}$，

所以$\sum_{i=1}^{n}(i+1)\cdot 2^i=n\cdot 2^{n+1}$，

则$\sum_{i=1}^{2^n} d_i=2^{2n-1}+(4n-3)\cdot 2^{n-1}+2$.

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=2$，$S_5=30$，数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，且$T_n=2^n-1$

.

(1) 求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设$c_n=\dfrac{b_n}{(b_n+1)(b_{n+1}+1)}$，数列$\{c_n\}$的前$n$项和为$M_n$，求$M_n$．

(3) 设$d_n=(-1)^n(a_nb_n+\ln S_n)$，求数列$\{d_n\}$的前$n$项和．

答案

(1) $a_n=2n$，$b_n=2^{n-1}$．

(2) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n+1}$．

(3) $(-1)^n\ln(n+1)-\dfrac{2}{9}-\dfrac{3n+1}{9}\cdot(-2)^{n+1}$．

解析

(1) $S_5=5a_1+\dfrac{5\times4}{2}d=10+10d=30$，

$\therefore d=2$，

$\therefore a_n=2n$，

对数列$\{b_n\}$：当$n=1$时，$b_1=T_1=2^1-1=1$，

当$n\geqslant2$时，$b_n=T_n-T_{n-1}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，

当$n=1$时也满足上式，

$\therefore b_n=2^{n-1}$．

(2) $c_n=\dfrac{b_n}{(b_n+1)(b_{n+1}+1)}=\dfrac{2^{n-1}}{\left(2^{n-1}+1\right)(2^n+1)}=$
$\dfrac{(2^n+1)-\left(2^{n-1}+1\right)}{\left(2^{n-1}+1\right)(2^n+1)}=\dfrac{1}{2^{n-1}+1}-\dfrac{1}{2^n+1}$，

$\therefore M_n=\left(\dfrac{1}{2^0+1}-\dfrac{1}{2^1+1}\right)+\left(\dfrac{1}{2^1+1}-\dfrac{1}{2^2+1}\right)+\cdots$
$+\left(\dfrac{1}{2^{n-1}+1}-\dfrac{1}{2^n+1}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^n+1}$．

(3) $d_n=(-1)^n(a_nb_n+\ln S_n)=(-1)^na_nb_n+(-1)^n\ln S_n$，

$\because S_n=\dfrac{(2+2n)n}{2}=n(n+1)$，

$\therefore \ln S_n=\ln n(n+1)=\ln n+\ln(n+1)$，

而$(-1)^na_nb_n=(-1)^n\cdot2n\cdot2^{n-1}=n\cdot(-2)^n$，

设数列$\{(-1)^na_nb_n\}$的前n项和为A_n，数列$\{(-1)^n\ln S_n\}$的前n项和为B_n，

$A_n=1\cdot(-2)^1+2\cdot(-2)^2+3\cdot(-2)^3+\cdots+n\cdot(-2)^n$ (1)，

$-2A_n=1\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^4+\cdots+n\cdot(-2)^{n+1}$ (2)，(1) − (2)得：

$3A_n=1\cdot(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\cdots+(-2)^n-n\cdot(-2)^{n+1}$

$= \dfrac{(-2)\left(1-(-2)^{n}\right)}{1-(-2)} - n\cdot(-2)^{n+1} = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{3n+1}{3}\cdot(-2)^{n+1}$，

$\therefore A_n = -\dfrac{2}{9} - \dfrac{3n+1}{9}\cdot(-2)^{n+1}$，

当n为偶数时，

$B_n = -(\ln 1+\ln 2)+(\ln 2+\ln 3)-(\ln 3+\ln 4)+\cdots+[\ln n+\ln(n+1)] = \ln(n+1)$，

当n为奇数时，

$B_n = -(\ln 1+\ln 2)+(\ln 2+\ln 3)-(\ln 3+\ln 4)+\cdots-[\ln n+\ln(n+1)] = -\ln(n+1)$

，

由以上可知$B_n = (-1)^n\ln(n+1)$，

所以，数列$\{c_n\}$的前n项和$A_n+B_n = (-1)^n\ln(n+1) - \dfrac{2}{9} - \dfrac{3n+1}{9}\cdot(-2)^{n+1}$.

14 设$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，已知$a_1=4$，$b_1=6$，$b_2=2a_2-2$，$b_3=2a_3+4$.

(1) 求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式 .

(2) 设数列$\{c_n\}$满足$c_1=1$，$c_n=\begin{cases}1, 2^k<n<2^{k+1}\\ b_k, n=2^k\end{cases}$，其中$k\in\mathbf{N}^*$.

① 求数列$\{a_{2^n}(c_{2^n}-1)\}$的通项公式 .

② 求$\sum\limits_{i-1}^{2^n}a_ic_i\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

答案 (1) $\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n+1$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3\cdot 2^n$.

(2) ① $a_{2^n}(c_{2^n}-1)=9\times 4^n-1$.

② $\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_ic_i = 27\times 2^{2n-1}+5\times 2^{n-1}-n-12\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

解析 (1) 依题意得$\begin{cases}6q=6+2d\\ 6q^2=12+4d\end{cases}$，

解得$\begin{cases}d=3\\ q=2\end{cases}$，

故$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n+1$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3\cdot 2^n$.

(2) ① $a_{2^n}(c_{2^n}-1)=a_{2^n}(b_n-1)=(3\times 2^n+1)(3\times 2^n-1)=9\times 4^n-1$，

所以，数列$\{a_{2^n}(c_{2^n}-1)\}$的通项公式为$a_{2^n}(c_{2^n}-1)=9\times 4^n-1$.

② $\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_ic_i = \sum\limits_{i-1}^{2^n}[a_i+a_i(c_i-1)]$，

$= \sum\limits_{i=1}^{2^n}a_i + \sum\limits_{i-1}^{n}a_{2^i}(c_{2^i}-1)$，

$$=\left(2^n\times4+\frac{2^n(2^n-1)}{2}\times3\right)+\sum_{i-1}^{n}(9\times4^i-1),$$
$$=(3\times2^{2n-1}+5\times2^{n-2})+9\times\frac{4(1-4^n)}{1-4}-n,$$
$$=27\times2^{2n-1}+5\times2^{n-1}-n-12\,(n\in\mathbf{N}^*).$$

故$\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_ic_i=27\times2^{2n-1}+5\times2^{n-1}-n-12\,(n\in\mathbf{N}^*)$．

15 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，且点$P(a_n,a_{n+1})$（$n\in\mathbf{N}^*$）在直线$y=x+2$上，数列$\{b_n\}$满足：$b_1=3$，$b_{n+1}=3b_n$．

(1) 数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式．

(2) 设数列$\{a_n\cdot(b_n-(-1)^n)\}$的前n项和为T_n，求T_n．

答案 (1) $a_n=2n$；$b_n=3^n$．

(2) $T_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2}+(n-\dfrac{1}{2})\cdot3^{n+1}+n(n\text{为偶数})\\\dfrac{3}{2}+(n-\dfrac{1}{2})\cdot3^{n+1}-n-1(n\text{为奇数})\end{cases}$．

解析 (1) $\because a_{n+1}=a_n+2$，

$\therefore\{a_n\}$是以$a_1=2$为首项，

2为公差的等差数列，

$\therefore a_n=a_1+(n-1)2=2n$，

$\because b_1=3$，$b_{n+1}=3b_n$，

$\therefore\{b_n\}$是以$b_1=3$为首项，3为公比的等比数列，

$\therefore b_n=3^n$．

(2) 由(1)知，

$\therefore a_n\cdot(b_n-(-1)^n)=2n\cdot(3^n-(-1)^n)=2n\cdot3^n-(-1)^n\cdot2n$，

设$\{2n\cdot3^n\}$的前n项和为T_n'，

$T_n'=2\cdot3^1+4\cdot3^2+6\cdot3^3+\cdots+2(n-1)\cdot3^{n-1}+2n\cdot3^n$，①

$3T_n'=2\cdot3^2+4\cdot3^3+6\cdot3^4+\cdots+2(n-1)\cdot3^n+2n\cdot3^{n+1}$，②

①-②得，$-2T_n'=2\cdot3^1+2\cdot3^2+2\cdot3^3+\cdots+2\cdot3^n-2n\cdot3^{n+1}$，

$-2T_n'=\dfrac{6(1-3^n)}{1-3}-2n\cdot3^{n+1}=-3+(1-2n)\cdot3^{n+1}$，

$T_n'=\dfrac{3}{2}+(n-\dfrac{1}{2})\cdot3^{n+1}$，

设$\{(-1)^n\cdot 2n\}$的前n项和为T_n''，当n为偶数时，

$T_n''=-2+4-6+8-\cdots-2(n-1)+2n=2\cdot\frac{n}{2}=n$，

当n为奇数时，$n+1$为偶数，

$T_n''=T_{n+1}''-2(n+1)=n+1-2n-2=-n-1$，

$\therefore T_n=\begin{cases}\frac{3}{2}+(n-\frac{1}{2})\cdot 3^{n+1}+n(n\text{为偶数})\\ \frac{3}{2}+(n-\frac{1}{2})\cdot 3^{n+1}-n-1(n\text{为奇数})\end{cases}$.