

数列通项求法练习题

一、数列小题

1 设 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则“ $q > 1$ ”是“ $\{a_n\}$ ”为递增数列的（ ）。

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

答案 D

解析 对于等比数列 $\{a_n\}$ ，

若 $q > 1$ ，则当 $a_1 < 0$ 时有 $\{a_n\}$ 为递减数列。

故“ $q > 1$ ”不能推出“ $\{a_n\}$ 为递增数列”。

若 $\{a_n\}$ 为递增数列，

则 $\{a_n\}$ 有可能满足 $a_1 < 0$ 且 $0 < q < 1$ ，

推不出 $q > 1$ 。

综上，“ $q > 1$ ”为“ $\{a_n\}$ 为递增数列”的既不充分也不必要条件，

即选D。

2 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若 $S_3 = 9$ ， $S_{10} = 100$ ，则 $a_7 =$ （ ）。

- A. 11 B. 13 C. 15 D. 17

答案 B

解析 设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，

$$\text{由题意得} \begin{cases} 3a_1 + 3d = 9 \\ 10a_1 + 45d = 100 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\therefore a_7 = a_1 + 6d = 13.$$

故选B.

3 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = n^2 \sin(\frac{2n+1}{2}\pi)$, 则 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12} = ()$.

A. 0

B. 55

C. 66

D. 78

答案 D

解析

$$a_1 = 1^2 \sin \frac{3\pi}{2} = -1^2,$$

$$a_2 = 2^2 \cdot \sin \frac{5\pi}{2} = 2^2,$$

$$a_3 = 3^2 \sin \frac{7\pi}{2} = -3^2,$$

$$a_4 = 4^2 \sin \frac{9\pi}{2} = 4^2,$$

$$a_5 = -5^2,$$

$$a_6 = 6^2,$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{12} = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 + 10^2 - 11^2 + 12^2$$

$$= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + (6^2 - 5^2) \cdots + (10^2 - 9^2) + (12^2 - 11^2)$$

$$= 78.$$

故选D.

4 已知首项与公比相等的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $m, n \in \mathbf{N}^*$, 满足 $a_m a_n^2 = a_4^2$, 则 $\frac{2}{m} + \frac{1}{n}$ 的最小值为 _____.

答案 1

解析

由题意可得: $a_1 = q$,

$$\therefore a_m \cdot a_n^2 = a_4^2,$$

$$\therefore a_1 \cdot q^{m-1} \cdot (a_1 \cdot q^{n-1})^2 = (a_1 \cdot q^3)^2,$$

$$\text{即 } m + 2n = 8,$$

$$\therefore \frac{2}{m} + \frac{1}{n} = (m + 2n) \cdot \left(\frac{2}{m} + \frac{1}{n} \right) \times \frac{1}{8}$$

$$= \left(2 + \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} + 2 \right) \times \frac{1}{8} \geq (4 + 2\sqrt{4}) \times \frac{1}{8} = 1.$$

二、等差等比求通项

5 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是首项为2的等比数列，且公比大于0，

$$b_2 + b_3 = 12, b_3 = a_4 - 2a_1, S_{11} = 11b_4.$$

求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案 $a_n = 3n - 2, b_n = 2^n.$

解析 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，

$$\text{由已知 } b_2 + b_3 = 12, \text{ 得 } b_1(q + q^2) = 12, \text{ 而 } b_1 = 2, \text{ 所以 } q + q^2 = 6,$$

$$\text{又 } q > 0, \text{ 解得 } q = 2, \text{ 所以 } b_n = 2^n.$$

$$\text{由 } b_3 = a_4 - 2a_1 \text{ 可得 } 3d - a_1 = 8, \text{ ①}$$

$$\text{由 } S_{11} = 11b_4, \text{ 可得 } S_{11} = 11a_6 = 11b_4, \text{ 即 } a_1 + 5d = 16, \text{ ②}$$

$$\text{联立①②解得 } a_1 = 1, d = 3,$$

$$\text{所以 } a_n = 3n - 2.$$

$$\text{所以, } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 3n - 2, \{b_n\} \text{ 的通项公式为 } b_n = 2^n.$$

6 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_{n+1} = a_n + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $a_3 + a_4 = 12$. 数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，

$$\text{且 } b_1 = a_2, b_2 = S_3.$$

求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案 $a_n = 2n - 1, b_n = 3^n.$

解析 根据题意，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 2$ ，

则数列 $\{a_n\}$ 是公差为2的等差数列，

$$\text{又由 } a_3 + a_4 = 12, \text{ 则 } a_3 + a_3 + d = 12, \text{ 解可得 } a_3 = 5,$$

$$\text{则 } a_n = a_3 + (n - 3)d = 2n - 1,$$

$$\text{又由数列 } \{b_n\} \text{ 为等比数列, 且 } b_1 = 3, b_2 = 1 + 3 + 5 = 9,$$

则数列 $\{b_n\}$ 的公比为3, 则 $b_n = 3^n$.

7 设 $\{a_n\}$ 是等比数列的公比大于0, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1 = 1$, $a_3 = a_2 + 2$,

$$a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案 $a_n = 2^{n-1}$, $b_n = n$.

解析 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $q > 0$, 设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because a_1 = 1, \text{ 由 } a_3 = a_2 + 2, \text{ 得 } q^2 = q + 2,$$

$$\because q > 0, \text{ 解得 } q = 2, \text{ 则 } a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$\text{由 } a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6 \text{ 得 } \begin{cases} 2b_1 + 6d = 8 \\ 3b_1 + 13d = 16 \end{cases},$$

$$\text{解得 } b_1 = d = 1, \text{ 则 } b_n = b_1 + (n-1)d = n.$$

8 各项均为正整的等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2 = 3$, $a_4 - 2a_3 = 9$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

答案 $a_n = 3^{n-1}$.

解析 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , $q > 0$, 由 $a_2 = 3$, $a_4 - 2a_3 = 9$ 得 $3(q^2 - 2q) = 9$, 解得 $q = 3$ 或

$$q = -1.$$

因为数列 $\{a_n\}$ 为正项数列, 所以 $q = 3$,

$$\text{所以, 首项 } a_1 = \frac{a_2}{q} = 1,$$

$$\text{故其通项公式为 } a_n = 3^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*.$$

9 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $\{b_n\}$ 是等比数列, 且 $a_1 = b_1 = 2$, $a_4 + b_4 = 27$,

$$S_4 - b_4 = 10.$$

求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式;

答案 $a_n = 3n - 1, b_n = 2^n, n \in \mathbf{N}^*$

解析 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q 。

由 $a_1 = b_1 = 2$ 得 $a_4 = 2 + 3d, b_4 = 2q^3, S_4 = 8 + 6d$ ，由条件，

$$\text{得方程组} \begin{cases} 2 + 3d + 2q^3 = 27 \\ 8 + 6d - 2q^3 = 10 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} d = 3 \\ q = 2 \end{cases},$$

所以 $a_n = 3n - 1, b_n = 2^n, n \in \mathbf{N}^*$

10 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_4 = 4S_2, a_{2n} = 2a_n + 1$ 。

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

解析 设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ，公差为 d ，由 $S_4 = 4S_2, a_{2n} = 2a_n + 1$ ，得

$$\begin{cases} 4a_1 + 6d = 8a_1 + 4d \\ a_1 + (2n - 1)d = 2a_1 + 2(n - 1)d + 1 \end{cases}, \text{解得}, a_1 = 1, d = 2, \text{因此} a_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$$

11 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ，且点 $P(a_n, a_{n+1}) (n \in \mathbf{N}^*)$ 在直线 $y = x + 2$ 上，数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_1 = 3$ ，

$$b_{n+1} = 3b_n.$$

求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = 2n; b_n = 3^n$ 。

解析 $\because a_{n+1} = a_n + 2,$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 $a_1 = 2$ 为首项，

2为公差的等差数列，

$$\therefore a_n = a_1 + (n - 1)2 = 2n,$$

$$\because b_1 = 3, b_{n+1} = 3b_n,$$

$\therefore \{b_n\}$ 是以 $b_1 = 3$ 为首项，3为公比的等比数列，

$$\therefore b_n = 3^n.$$

- 12 已知公比为正数的等比数列 $\{a_n\}$ ，首项 $a_1 = 3$ ，前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)，且 $S_3 + a_3$ ， $S_5 + a_5$ ， $S_4 + a_4$ 成等差数列。
求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = \frac{6}{2^n}$ 。

解析 由题意知，设 $a_n = 3q^{n-1}$ ，
 $\because S_3 + a_3$ ， $S_5 + a_5$ ， $S_4 + a_4$ 成等差数列，
 $\therefore 2(S_5 + a_5) = (S_3 + a_3) + (S_4 + a_4)$ ，
 即 $2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2a_5)$
 $= (a_1 + a_2 + 2a_3) + (a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4)$ ，
 化简得 $4a_5 = a_3$ ，
 $\therefore 4q^2 = 1$ 。
 得 $q = \pm \frac{1}{2}$ ，
 $\because \{a_n\}$ 的公比为正数，
 $\therefore q = \frac{1}{2}$ 。
 $\therefore a_n = \frac{6}{2^n}$ 。

- 13 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，前 n 项和 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，
 $\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4$ ， $a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}$ ， $a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}$ 。
 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n ， b_n 。

答案 $a_n = \frac{1}{2^n}$ ， $b_n = n - 1$ 。

解析 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$ ， $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{a_1 q^2} = \frac{1}{a_1 q} + 4 \end{cases}$ ， $\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q} - 2 = 0$ ，解得 $q = \frac{1}{2}$ ，
 $\therefore a_n = \frac{1}{2^n}$ ，
 设等差数列 $a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6} = \frac{1}{8}$ ， $a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7} = \frac{1}{16}$ ，
 $\therefore 2b_1 + 8d = 8$ ， $3b_1 + 16d = 16$ ，
 解得 $b_1 = 0$ ， $d = 1$ ，

$$\therefore b_n = n - 1.$$

14 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)， $\{b_n\}$ 是等差数列。已知 $a_1 = 1$ ，

$$a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = 2^{n-1}, b_n = n.$

解析 令 $\{a_n\}$ 公比为 q ($q > 0$)， $\{b_n\}$ 公差为 d ，

$$\text{则有 } \begin{cases} a_1 q^2 = a_1 q + 2 \\ a_1 q^3 = 2b_1 + 6d \\ a_1 q^4 = 3b_1 + 13d \end{cases}, \text{解得 } \begin{cases} q = 2 \\ b_1 = d = 1 \end{cases},$$

$$\text{即 } \begin{cases} a_n = 2^{n-1} \\ b_n = n \end{cases}.$$

15 已知首项为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列，其前 n 项和为 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$)，且 $s_3 + a_3, s_5 + a_5, s_4 + a_4$ 成等差数列。

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

答案 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{3}{2^n}.$

解析 设等比数列的公比为 q 。

$$\therefore S_3 + a_3, S_5 + a_5, S_4 + a_4 \text{ 成等差数列}.$$

$$\therefore S_5 + a_5 - (S_3 + a_3) = S_4 + a_4 - (S_5 + a_5).$$

$$\text{即 } 4a_5 = a_3.$$

$$\text{故 } q^2 = \frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{4}.$$

又 $\because$ 数列 $\{a_n\}$ 不是递减数列，且等比数列的首项为 $\frac{3}{2}$ 。

$$\therefore q = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{数列}\{a_n\}\text{的通项公式 } a_n = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{3}{2^n}.$$

已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列， $\{b_n\}$ 是等差数列，且 $a_1 = b_1 = 1$ ， $b_2 + b_3 = 2a_3$ ， $a_5 - 3b_2 = 7$ 。

求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $b_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

解析 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ，由题意 $q > 0$ ，
由已知，有 $\begin{cases} 2q^2 - 3d = 2 \\ q^4 - 3d = 10 \end{cases}$ ，消去 d ，整理得 $q^4 - 2q^2 - 8 = 0$ ，
又因为 $q > 0$ ，解得 $q = 2 \therefore d = 2$ 。
所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，
数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

17 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为等比数列， $a_1 = b_1 = 1$ ， $a_5 = 5(a_4 - a_3)$ ， $b_5 = 4(b_4 - b_3)$ 。
求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = n$ ， $b_n = 2^{n-1}$ 。

解析 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，
由 $a_1 = 1$ ， $a_5 = 5(a_4 - a_3)$ ，可得 $d = 1$ ，
从而 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n$ ，
由 $b_1 = 1$ ， $b_5 = 4(b_4 - b_3)$ ，
又 $q \neq 0$ ，可得 $q^2 - 4q + 4 = 0$ ，解得 $q = 2$ ，
从而 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^{n-1}$ 。
故答案为： $a_n = n$ ， $b_n = 2^{n-1}$ 。

18 已知数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，且 $a_1 + a_4 = 9$ ， $a_2 a_3 = 8$ 。
求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

答案 $a_n = 2^{n-1}$

解析 方法一： $\because \{a_n\}$ 是递增的等比数列，且 $a_1 + a_4 = 9$ ， $a_2 a_3 = 8$

$$\therefore \begin{cases} a_1 + a_4 = 9 \\ a_1 < a_4 \\ a_1 a_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_4 = 8 \end{cases} \Rightarrow q^3 = \frac{a_4}{a_1} = 8 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}.$$

方法二：由题设知 $a_1 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_3 = 8$ ，

又 $a_1 + a_4 = 9$ ，可解得 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_4 = 8 \end{cases}$ ，或 $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_4 = 1 \end{cases}$ （舍去）。

由 $a_4 = a_1 q^3$ 得公比为 $q = 2$ ，故 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$ 。

19 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知公差 $d = 2$ ， a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项。

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = 2n$ 。

解析 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = 2$ ， a_2 是 a_1 与 a_4 的等比中项，

可得： $a_2^2 = a_1 a_4$ ，即 $(a_1 + 2)^2 = a_1 (a_1 + 6)$ ，

解得： $a_1 = 2$ ，

则 $a_n = a_1 + (n - 1)d = 2 + 2(n - 1) = 2n$ 。

20 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，公比 $q > 1$ ，且 $a_2 + 1$ 为 a_1 ， a_3 的等差中项， $S_3 = 14$ 。

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

答案 $a_n = 2^n$ 。

解析 由题意，得 $2(a_2 + 1) = a_1 + a_3$ ，又 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 14$ ，

$$\therefore 2(a_2 + 1) = 14 - a_2,$$

$$\therefore a_2 = 4,$$

$$\therefore S_1 = \frac{4}{q} + 4 + 4q = 14,$$

$$\therefore q = 2 \text{ 或 } q = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore q > 1,$$

$$\therefore q = 2.$$

$$\therefore a_n = a_2 q^{n-2} = 4 \cdot 2^{n-2} = 2^n .$$

三、项与和的关系

21 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \dots + (2n-1)a_n = 2n$.

求 $\{a_n\}$ 的通项公式 ;

答案 $a_n = \frac{2}{2n-1} ;$

解析 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 3a_2 + \dots + (2n-1)a_n = 2n$.

$$n \geq 2 \text{ 时 , } a_1 + 3a_2 + \dots + (2n-3)a_{n-1} = 2(n-1) .$$

$$\therefore (2n-1)a_n = 2 ,$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{2n-1} .$$

当 $n=1$ 时 , $a_1 = 2$, 上式也成立 ,

$$\therefore a_n = \frac{2}{2n-1} .$$

22 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 2$, $S_5 = 30$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $T_n = 2^n - 1$.

求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式 .

答案 $a_n = 2n , b_n = 2^{n-1} .$

解析 $S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = 10 + 10d = 30 ,$

$$\therefore d = 2 ,$$

$$\therefore a_n = 2n ,$$

对数列 $\{b_n\}$: 当 $n=1$ 时 , $b_1 = T_1 = 2^1 - 1 = 1 ,$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时 , } b_n = T_n - T_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1} ,$$

当 $n=1$ 时也满足上式 ,

$$\therefore b_n = 2^{n-1} .$$

23 等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, $2a_5, a_4, 4a_6$ 成等差数列, 且满足 $a_4 = 4a_3^2$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{(n+1)b_n}{2}, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 = 1.$$

求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (n \in \mathbf{N}^*), b_n = n (n \in \mathbf{N}^*).$

解析 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

依题意, 有 $2a_4 = 2a_5 + 4a_6$,

$$\text{所以 } a_4 = a_4 q + 2a_4 q^2,$$

因为 $a_n > 0$,

所以 $q > 0$,

$$\text{且 } 2q^2 + q - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } q = \frac{1}{2} \text{ 或 } q = -1 \text{ (舍)},$$

$$\text{因为 } a_4 = 4a_3^2 = 4a_2 a_4,$$

$$\text{所以 } a_2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{所以 } a_1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+1)b_n}{2} - \frac{nb_{n-1}}{2},$$

$$\text{整理得 } (n-1)b_n = nb_{n-1}, \text{ 即 } \frac{b_n}{n} = \frac{b_{n-1}}{n-1} (n \geq 2),$$

所以数列 $\left\{\frac{b_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{b_1}{1} = 1$ 的常数列.

$$\text{所以 } \frac{b_n}{n} = 1, \text{ 即 } b_n = n (n \in \mathbf{N}^*),$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = n (n \in \mathbf{N}^*)$.

24 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $a_1 = 1$ 且 $S_n \cdot S_{n-1} + \frac{1}{2}a_n = 0$.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

答案 $a_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ -2 \\ (2n-1)(2n-3), & n \geq 2 \end{cases}.$

解析

$$\because a_1 = 1, S_n \cdot S_{n-1} + \frac{1}{2}a_n = 0,$$

$$\text{即 } S_n \cdot S_{n-1} + \frac{1}{2}(S_n - S_{n-1}) = 0 (n \geq 2),$$

$$2S_n \cdot S_{n-1} = S_{n-1} - S_n, \text{ 同除 } S_n \cdot S_{n-1},$$

$$2 = \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n-1}},$$

$\therefore$ 数列 $\left\{ \frac{1}{S_n} \right\}$ 是以 1 为首项, 以 2 为公差的等差数列,

$$\therefore \frac{1}{S_n} = 1 + 2(n-1) = 2n-1,$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2n-1},$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = 1,$$

当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(n-1)-1} \\ &= \frac{-2}{(2n-1)(2n-3)}, \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \frac{-2}{(2n-1)(2n-3)}, & n \geq 2 \end{cases}.$$

25 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案

$$a_n = 6n + 5, b_n = 3n + 1.$$

解析

$$n=1 \text{ 时, } a_1 = S_1 = 11,$$

$$n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = 6n + 5,$$

a_1 也满足,

$$\therefore a_n = 6n + 5,$$

$$\begin{cases} a_1 = b_1 + b_2 \\ a_2 = b_2 + b_3 \end{cases}, \begin{cases} 11 = 2b_1 + d \\ 17 = 2b_1 + 3d \end{cases},$$

$$b_1 = 4, d = 3,$$

$$\therefore b_n = 3n + 1.$$

26 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 1$, $S_{n+1} + S_n = (a_{n+1})^2$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n \cdot b_{n+1} = 2^{a_n}$, 且 $b_1 = 2$.

求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式.

答案

$$a_n = n, b_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n-2}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

解析

$$\because S_{n+1} + S_n = a_{n+1}^2,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n + S_{n-1} = a_n^2,$$

$$\text{两式相减得, } a_{n+1} + a_n = a_{n+1}^2 - a_n^2,$$

$$\therefore (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 1) = 0,$$

$$\because a_n > 0,$$

$$\therefore a_{n+1} + a_n > 0,$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 1,$$

$$\text{又当 } n = 1 \text{ 时, } S_2 + S_1 = a_2^2,$$

$$\text{即 } a_1 + a_2 + a_1 = a_2^2,$$

$$\therefore a_2^2 - a_2 - 2 = 0,$$

$$\because a_n > 0,$$

$$\therefore a_2 = 2,$$

$$\therefore a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为1, 公差为1等差数列,

$$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n, \text{ 即 } a_n = n,$$

$$\therefore b_n \cdot b_{n+1} = 2^n \text{ ①},$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_{n-1} \cdot b_n = 2^{n-1} \text{ ②},$$

$$\text{①} \div \text{②} \text{ 得: } \frac{b_{n+1}}{b_{n-1}} = 2,$$

$$\text{又当 } n = 1 \text{ 时, } b_1 \cdot b_2 = 2,$$

$$\therefore b_1 = 2,$$

$$\therefore b_2 = 1,$$

所以当 n 为奇数时, 数列 $\{b_n\}$ 是首项为2, 公比为2的等比数列,

$$\therefore b_n = 2^{\frac{n+1}{2}},$$

当 n 为偶数时, 数列 $\{b_n\}$ 是首项为1, 公比为2的等比数列,

$$\therefore b_n = 2^{\frac{n-2}{2}}.$$

综上，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为奇数} \\ 2^{\frac{n-2}{2}}, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 。