

裂项相消练习题

1 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列, 已知 $a_1 = 4$, $b_1 = 6$, $b_2 = 2a_2 - 2$, $b_3 = 2a_3 + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1 = 1$, $c_n = \begin{cases} 1, & 2^k < n < 2^{k+1} \\ b_k, & n = 2^k \end{cases}$, 其中 $k \in \mathbf{N}^*$.

① 求数列 $\{a_{2^n}(c_{2^n} - 1)\}$ 的通项公式.

② 求 $\sum_{i=1}^{2^n} a_i c_i$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

2 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比大于0，其前 n 项和为 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$ ， $\{b_n\}$ 是等差数列，已知 $a_1 = 1$ ，

$$a_3 = a_2 + 2, a_4 = b_3 + b_5, a_5 = b_4 + 2b_6.$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

① 求 T_n .

② 证明 $\sum_{k=1}^n \frac{(T_k + b_{k+2})b_k}{(k+1)(k+2)} = \frac{2^{n+2}}{n+2} - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$.

3 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 证明： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} < \frac{4}{3}$ 。

4 设 $\{a_n\}$ 是各项都为整数的等差数列，其前 n 项和为 S_n ， $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1 = b_1 = 1$ ，

$$a_3 + b_2 = 7, S_5 b_2 = 50, n \in \mathbf{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \log_2 b_3 + \cdots + \log_2 b_n$ ， $T_n = a_{c_n+1} + a_{c_n+2} + a_{c_n+3} + \cdots + a_{c_n+n}$.

① 求 T_n .

② 求证： $\sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{T_i} - i} < 2$.

5 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 2^n a_n$ 。

(1) 求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = \frac{n(n+1)}{2^n(n-a_n)(n+1-a_{n+1})}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求满足 $T_n < \frac{124}{63} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的 n 的最大值。