

分奇偶、最值与不等式练习题

一、分奇偶

1 已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $b_1 = a_1 = 1$ ， $b_3 = a_3 + 1$ ，

$$b_5 = a_5 - 7.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 求数列 $\{a_n b_n\}$ 的前 n 项和 A_n .

(3) 设 S_n 为数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和，若对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，有 $S_n + \frac{1}{3} = t \cdot 2^{b_n}$ ，求实数 t 的值.

2 已知数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项为1的等差数列，偶数项是首项为2的等比数列．数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_3 = a_4$ ， $a_3 + a_5 = 2 + a_4$ ．

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式．
- (2) 在数列 $\{a_n\}$ 中，是否存在连续的三项 a_m ， a_{m+1} ， a_{m+2} ，按原来的顺序成等差数列？若存在，求出所有满足条件的正整数 m 的值；若不存在，说明理由．

二、最值

3 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且点 (n, S_n) ($n \in \mathbf{N}^*$) 在函数 $y = 2^{x+1} - 2$ 的图象上。

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。
- (2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足： $b_1 = 0$ ， $b_{n+1} + b_n = a_n$ ，求 $\{b_n\}$ 的通项公式。
- (3) 在第(2)问的条件下，若对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，不等式 $b_n < \lambda b_{n+1}$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围。

4 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $2a_2 = a_4 - a_3$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 1 + 2\log_2 a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 .

(2) 令 $c_n = a_n \cdot b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

(3) 若 $\lambda > 0$, 且对所有的正整数 n 都有 $2\lambda^2 - k\lambda + 2 > \frac{b_n}{a_n}$ 成立 , 求 k 的取值范围 .

5 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = -a_n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 2^n a_n$ 。

(1) 求证：数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = \frac{n(n+1)}{2^n(n-a_n)(n+1-a_{n+1})}$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，求满足 $T_n < \frac{124}{63} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的 n 的最大值。

6 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = a_{n+1} + 2n - 8$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ， $a_1 = 8$ ，设 $b_n = a_n - 2$ 。

(1) 证明： $\{b_n\}$ 是等比数列。

(2) 设 $c_n = (-1)^n \frac{a_n}{(2^n + 1)(2^{n+1} + 1)}$ ，求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ，若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $\lambda \geq T_n$ 恒成立，求 λ 的取值范围。

三、不等式证明

7 设数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$ ， $3a_2 - a_1 = 1$ ，且 $\frac{2}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_{n-1}a_{n+1}} (n \geq 2)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 设数列 $b_1 = \frac{1}{2}$ ， $4b_n = a_{n-1}a_n$ ，设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 。证明： $T_n < 1$ 。

8 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, 且 $a_{n+2} = (-1)^n(a_n - 1) + 2a_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 .

(2) 设 $b_n = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 , 求证 : $S_n \geq \frac{2^n - n}{2^n + 1}$.

9 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 证明： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} < \frac{4}{3}$ 。

10 设 $\{a_n\}$ 是各项都为整数的等差数列，其前 n 项和为 S_n ， $\{b_n\}$ 是等比数列，且 $a_1 = b_1 = 1$ ，

$$a_3 + b_2 = 7, S_5 b_2 = 50, n \in \mathbf{N}^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ ， $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \log_2 b_1 + \log_2 b_2 + \log_2 b_3 + \cdots + \log_2 b_n$ ， $T_n = a_{c_n+1} + a_{c_n+2} + a_{c_n+3} + \cdots + a_{c_n+n}$.

① 求 T_n .

② 求证： $\sum_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{T_i} - i} < 2$.

