

弦长、面积与垂直平分

1. 知识梳理



一、弦长面积问题

1. 真题分析

1 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A ，上顶点为 B ，已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ， $|AB| = \sqrt{13}$ 。

- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 设直线 $l: y = kx (k < 0)$ 与椭圆交于 P, Q 两点， l 与直线 AB 交于点 M ，且点 P, M 均在第四象限，若 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍，求 k 的值。

答案

- (1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。
- (2) $-\frac{1}{2}$ 。

解析

- (1) $\frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9}$ ，且 $a^2 = b^2 + c^2$ ，可得 $2a = 3b$ ，
而且 $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$ ，从而 $a = 3, b = 2$ ，
即椭圆方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 。
- (2) 设点 P 的坐标为 (x_1, y_1) ，点 M 的坐标为 (x_2, y_2) ，

由题意, $x_2 > x_1 > 0$, 点 Q 的坐标为 $(-x_1, -y_1)$,

由 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的2倍可得 $|PM| = 2|PQ|$,

从而 $x_2 - x_1 = 2[x_1 - (-x_1)]$, 即 $x_2 = 5x_1$.

直线 AB 的方程为 $2x + 3y = 6$,

由方程组 $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = kx \end{cases}$ 消去 y , 可得 $x_2 = \frac{6}{3k+2}$,

由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx \end{cases}$ 消去 y 可得 $x_1 = \frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$.

而且 $x_2 = 5x_1$, 带入两边平方, 整理可得 $18k^2 + 25k + 8 = 0$,

解得 $k = -\frac{8}{9}$ 或 $k = -\frac{1}{2}$.

当 $k = -\frac{8}{9}$ 时, $x_2 = -9 < 0$ 不合题意,

当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, $x_2 = 12, x_1 = \frac{12}{5}$ 满足, 所以 $k = -\frac{1}{2}$.

2. 思路总结



弦长面积

直线与圆锥曲线的位置关系可分为: 相交、相切、相离.

一般圆锥曲线大题都要进行下面步骤:

①设直线 $l: Ax + By + C = 0$, 椭圆方程 $C: f(x, y) = 0$, 由 $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$, 消去 y (或消去 x) 得:

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

②由韦达定理: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \Delta = b^2 - 4ac > 0$, 得出相应关系式;

③求弦长的一种求法是将直线方程与圆锥曲线的方程联立, 求出两交点的坐标, 然后运用两点间的距离公式来求;

另外一种求法如果是直线的斜率为 k , 被圆锥曲线截得弦 AB 两端点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{则弦长公式为 } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2} |y_1 - y_2|;$$

两根差公式:

如果 x_1, x_2 满足一元二次方程: $ax^2 + bx + c = 0$,

$$\text{则 } |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad (\Delta > 0);$$

④利用题上所给限制条件, 得出相关方程式, 结合②化简得结论.

圆锥曲线有关三角形面积:

①椭圆、双曲线焦点三角形面积：抓住定义解题，常结合余弦定理；

②若不是焦点三角形，常用 $S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d$ (弦长公式求 $|AB|$, d 为点到直线的距离)；

③若是四边形可以利用共同的底边，拆分成两个三角形的面积和（差）；

常化为 $S = \frac{1}{2} \times \text{公共底边长} \times |x_1 - x_2|$ 或 $S = \frac{1}{2} \times \text{公共底边长} \times |y_1 - y_2|$ ；

④若四边形对角线互相垂直，可以利用 $S = \frac{1}{2} \times \text{两条对角线乘积}$ 。



面积最值

首选均值不等式，其实用二次函数，最后选导数，

均值不等式： $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ($a, b \in R$)，

变式： $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a, b \in R^+$)； $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ ($a, b \in R^+$)，

作用：当两个正数的积为定值时求出这两个正数的和的最小值；

当两个正数的和为定值时求出这两个正数的积的最大值，

注意：应用均值不等式求解最值时，应注意“一正二定三相等”。

圆锥曲线经常用到的均值不等式形式列举：

$$(1) S = \frac{2t}{t^2 + 64} = \frac{2}{t + \frac{64}{t}} \quad (\text{注意分 } t = 0, t > 0, t < 0 \text{ 三种情况讨论})；$$

$$(2) |AB|^2 = 3 + \frac{12k^2}{9t^4 + 6k^2 + 1} = 3 + \frac{12}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6} \leq 3 + \frac{12}{2 \times 3 + 6} \text{ 当且仅当 } 9k^2 = \frac{1}{k^2} \text{ 时，等号}$$

成立；

$$(3) |PQ|^2 = 34 + 25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} + 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2} \geq 34 + 2\sqrt{25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} \times 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2}} = 64；$$

当且仅当 $25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} = 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2}$ 时等号成立。

$$(4) S = \frac{1}{2} \sqrt{12 - \frac{3}{2}m^2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}m^2(-m^2 + 8)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{m^2 - m^2 + 8}{2} = \sqrt{2}，$$

当且仅当 $m^2 = -m^2 + 8$ 时，等号成立；

(5)

$$S = 2\sqrt{2}\sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{2k^2 - m_1^2 + 1}}{1+2k^2} \cdot \frac{|2m_1|}{\sqrt{1+k^2}} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{(2k^2 - m_1^2 + 1)m_1^2}}{1+2k^2} \leq 4\sqrt{2} \frac{\frac{2k^2 - m_1^2 + 1 + m_1^2}{2}}{1+2k^2} = 2\sqrt{2}$$

当且仅当 $2k^2 + 1 = 2m_1^2$ 时等号成立。

3. 模拟演练

2 在平面 xOy 中, 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 1)$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 直线 l 方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$, 直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

答案 (1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$.

(2) 2.

解析 (1) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 1)$, 且离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\text{可得: } \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } a = 2\sqrt{2}, c = \sqrt{6}, \text{ 则 } b = \sqrt{2},$$

$$\text{椭圆方程为: } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 设直线方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 整理得: } x^2 + 2mx + 2m^2 - 4 = 0, x_1 + x_2 = -2m,$$

$$x_1 x_2 = 2m^2 - 4,$$

$$\text{利用弦长公式得: } |AB| = \sqrt{5(4 - m^2)},$$

$$\text{由点线距离公式得到 } P \text{ 到 } l \text{ 的距离 } d = \frac{2|m|}{\sqrt{5}}.$$

$$S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d$$

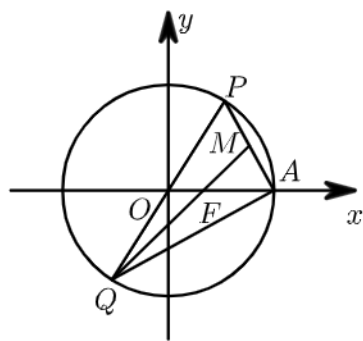
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5(4 - m^2)} \cdot \frac{2|m|}{\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{m^2(4 - m^2)} \leq \frac{m^2 + (4 - m^2)}{2} = 2,$$

当且仅当 $m^2 = 2$, 即 $m = \pm\sqrt{2}$ 时取到最大值, 最大值为: 2.

3 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点、右顶点分别为 F, A ,

过原点的直线与椭圆 C 交于点 P, Q (点 P 在第一象限内), 连接 AP, FQ , 若 $AF = 2$, $\triangle OAP$ 的面积是 $\triangle OFQ$ 的面积的3倍.



- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
- (2) 已知 M 为线段 PA 的中点, 连结 QA, QM .
 - ① 求证: Q, F, M 三点共线.
 - ② 记直线 QP, QM, QA 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 若 $k_1 + k_3 = \frac{5}{2}k_2$, 求 $\triangle PQM$ 的面积.

答案

(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

(2) ① 证明见解析.

② 4.

解析

- (1) 设椭圆 C 的焦距为 $2c$.

因为 $AF = 2$, 所以 $a - c = 2$.

设 $P(x_0, y_0)$, 则 $\triangle OAP$ 的面积为 $\frac{1}{2}ay_0$,

过原点的直线与椭圆 C 交于点 P, Q ,

所以 $Q(-x_0, -y_0)$,

故 $\triangle OFQ$ 的面积为 $\frac{1}{2}cy_0$,

因为 $\triangle OAP$ 的面积是 $\triangle OFQ$ 面积的 3 倍,

所以 $a = 3c$.

解得 $a = 3, c = 1, b = 2\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

- (2) ① 因为 $P(x_0, y_0)$,

$$\text{所以 } M\left(\frac{x_0 + 3}{2}, \frac{y_0}{2}\right),$$

因为 $Q(-x_0, -y_0)$,

$$\text{所以 } k_{QF} = \frac{0 - (-y_0)}{1 - (-x_0)} = \frac{y_0}{x_0 + 1}, \quad k_{FM} = \frac{\frac{y_0}{2}}{\frac{x_0 + 3}{2} - 1} = \frac{y_0}{x_0 + 1},$$

故 Q 、 F 、 M 三点共线.

② 因为 $k_1 = \frac{y_0}{x_0}$, $k_2 = \frac{y_0}{x_0 + 1}$, $k_3 = \frac{y_0}{x_0 + 3}$, 且 $k_1 + k_2 = \frac{5}{2}k_3$,

所以 $\frac{y_0}{x_0} + \frac{y_0}{x_0 + 3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{y_0}{x_0 + 1}$,

化简得 $x_0^2 + 5x_0 - 6 = 0$,

解得 $x_0 = 1$ 或 $x_0 = -6$ (舍去),

代入 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 中, 得 $y_0^2 = \frac{64}{9}$,

因为点 P 在第一象限内,

所以 $y_0 = \frac{8}{3}$, 故 $P\left(1, \frac{8}{3}\right)$,

因为 M 为线段 PA 的中点,

所以 $S_{\triangle PQM} = \frac{1}{2}S_{\triangle PQA}$,

因为 O 为线段 PQ 的中点

所以 $S_{\triangle POA} = \frac{1}{2}S_{\triangle PQA}$,

故 $S_{\triangle PQM} = S_{\triangle POA} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{8}{3} = 4$.

- 4 平面直角坐标系 xOy 中, 过椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 右焦点的直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$ 交 M 于 A, B 两点, P 为 AB 的中点, 且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$.

(1) 求 M 的方程.

(2) C, D 为 M 上两点, 若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$, 求四边形 $ACBD$ 面积的最大值.

答案

(1) M 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 四边形 $ABCD$ 面积最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

解析

(1) 方法一: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(x_0, y_0)$,

则 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$.

由此可得 $\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1$.

因为 $x_1 + x_2 = 2x_0, y_1 + y_2 = 2y_0, \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{2}$.

所以 $a^2 = 2b^2$.

由题意知, M 的右焦点为 $(\sqrt{3}, 0)$,

故 $a^2 - b^2 = 3$.

因此 $a^2 = 6, b^2 = 3$.

所以 M 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

方法二：把右焦点 $(c, 0)$ 代入直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$,

得 $c + 0 - \sqrt{3} = 0$, 解得 $c = \sqrt{3}$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 线段 AB 的中点 $P(x_0, y_0)$,

则 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, 相减得 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$,

$\therefore \frac{x_1 + x_2}{a^2} + \frac{y_1 + y_2}{b^2} \times \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 0$,

$\therefore \frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0}{b^2} \times (-1) = 0$,

又 $k_{OP} = \frac{1}{2} = \frac{y_0}{x_0}$,

$\therefore \frac{1}{a^2} - \frac{1}{2b^2} = 0$, 即 $a^2 = 2b^2$.

联立得 $\begin{cases} a^2 = 2b^2 \\ a^2 = b^2 + c^2 \\ c = \sqrt{3} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} b^2 = 3 \\ a^2 = 6 \end{cases}$,

$\therefore M$ 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) 方法一：由 $\begin{cases} x + y - \sqrt{3} = 0 \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$,

因此 $|AB| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$.

由题意可设直线 CD 的方程为 $y = x + n$ ($-\frac{5\sqrt{3}}{3} < n < \sqrt{3}$) 设 $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$.

由 $\begin{cases} y = x + n \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$ 得 $3x^2 + 4nx + 2n^2 - 6 = 0$.

于是 $x_{34} = \frac{-2n \pm \sqrt{2(9-n^2)}}{3}$.

因为直线 CD 的斜率为 1.

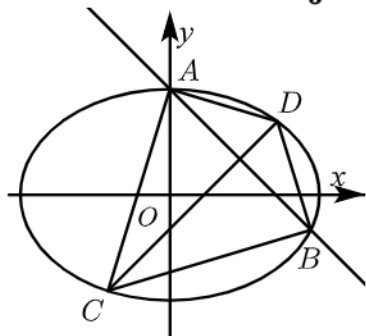
所以 $|CD| = \sqrt{2}|x_4 - x_3| = \frac{4}{3}\sqrt{9-n^2}$.

由已知, 四边形 $ABCD$ 的面积 $S = \frac{1}{2}|CD| \cdot |AB| = \frac{8\sqrt{6}}{9}\sqrt{9-n^2}$,

当 $n = 0$ 时, S 取最大值, 最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

所以四边形 $ABCD$ 面积最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

方法二：



$\therefore CD \perp AB$,

$\therefore$ 可设直线 CD 的方程为 $y = x + t$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = x + t \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得到 } 3x^2 + 4tx + 2t^2 - 6 = 0,$$

$\therefore$ 直线 CD 与椭圆有两个不同的交点,

$$\therefore \Delta = 16t^2 - 12(2t^2 - 6) = 72 - 8t^2 > 0, \text{ 解 } -3 < t < 3 (*).$$

设 $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$,

$$\therefore x_3 + x_4 = -\frac{4t}{3}, x_3 x_4 = \frac{2t^2 - 6}{3}.$$

$$\begin{aligned} \therefore |CD| &= \sqrt{(1+1^2) \left[(x_3 + x_4)^2 - 4x_3 x_4 \right]} = \sqrt{2 \left[\left(-\frac{4t}{3} \right)^2 - 4 \times \frac{2t^2 - 6}{3} \right]} \\ &= \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{18 - 2t^2}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{联立} \begin{cases} x + y - \sqrt{3} = 0 \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得到 } 3x^2 - 4\sqrt{3}x = 0, \text{ 解得 } x = 0 \text{ 或 } \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$\therefore$ 交点为 $A(0, \sqrt{3}), B\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,

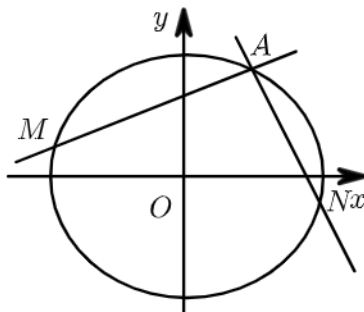
$$\therefore |AB| = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ACBD} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{18 - 2t^2}}{3} = \frac{8\sqrt{3} \cdot \sqrt{18 - 2t^2}}{9},$$

$\therefore$ 当且仅当 $t = 0$ 时, 四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$, 满足 $(*)$.

$\therefore$ 四边形 $ACBD$ 面积的最大值为 $\frac{8\sqrt{6}}{3}$.

- 5 已知 A 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的一个动点, 过点 A 作两条直线 l_1, l_2 , 它们与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 都只有一个公共点, 其分别交圆于点 M, N .



(1) 若 $A(-2, 0)$, 求直线 l_1, l_2 的方程.

(2) 解答下列各题

① 求证: 对于圆上的任意点 A , 都有 $l_1 \perp l_2$.

② 求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围.

答案

(1) $l_1: y = -x - 2, l_2: y = x + 2$.

(2) ① 证明见解析.

② $S \in [2\sqrt{3}, 4]$.

解析

(1) 设直线的方程为 $y = k(x + 2)$,

代入椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$,

消去 y 可得 $(1 + 3k^2)x^2 + 12k^2x + 12k^2 - 3 = 0$,

由 $\Delta = 0$, 可得 $k^2 - 1 = 0$,

设 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 ,

$\therefore k_1 = -1, k_2 = 1$,

$\therefore$ 直线 l_1, l_2 的方程分别为 $y = -x - 2, y = x + 2$.

(2) ① 当直线 l_1, l_2 的斜率有一条不存在时, 不妨设 l_1 无斜率,

$\therefore l_1$ 与椭圆只有一个公共点,

所以其方程为 $x = \pm\sqrt{3}$,

当 l_1 的方程为 $x = \sqrt{3}$ 时,

此时 l_1 与圆的交点坐标为 $(\sqrt{3}, \pm 1)$,

$\therefore l_2$ 的方程为 $y = 1$ (或 $y = -1$),

$l_1 \perp l_2$ 成立,

同理可证, 当 l_1 的方程为 $x = -\sqrt{3}$ 时,

结论成立;

当直线 l_1, l_2 的斜率都存在时,

设 $A(m, n)$, 且 $m^2 + n^2 = 4$,

设方程 $y = k(x - m) + n$, 代入椭圆方程, 可得:

$(1 + 3k^2)x^2 + 6k(n - km)x + 3(n - km)^2 - 3 = 0$,

由 $\Delta = 0$, 化简整理得,

$(3 - m^2)k^2 + 2mnk + 1 - n^2 = 0$,

$\therefore m^2 + n^2 = 4$,

$\therefore (3 - m^2)k^2 + 2mnk + m^2 - 3 = 0$,

设 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 ,

$$\therefore k_1 \cdot k_2 = -1,$$

$$\therefore l_1 \perp l_2 \text{ 成立.}$$

综上, 对于圆上的任意点 A 都有 $l_1 \perp l_2$ 成立.

② 记原点到直线 l_1, l_2 的距离分别为 d_1, d_2 ,

$$\therefore d_1^2 + d_2^2 = 4,$$

$$\therefore \triangle AMN \text{ 面积 } S^2 = 4d_1^2 d_2^2 = 4d_1^2 (4 - d_1^2)$$

$$= -4(d_1^2 - 2)^2 + 16,$$

$$\therefore d_1^2 \in [1, 3].$$

$$\therefore S^2 \in [12, 16],$$

$$\therefore S \in [2\sqrt{3}, 4].$$

二、垂直平分问题

1. 真题分析

6 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0, -3)$, 右焦点为 F , 且 $|OA| = |OF|$, 其中 O 为原点.

(1) 求椭圆的方程.

(2) 已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$, 点 B 在椭圆上 (B 异于椭圆的顶点), 直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P , 且 P 为线段 AB 的中点. 求直线 AB 的方程.

答案

(1) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$

(2) $y = \frac{1}{2}x - 3$ 或 $y = x - 3.$

解析

(1) 由已知可得 $b = 3$, 记半焦距为 c , 由 $|OF| = |OA|$,

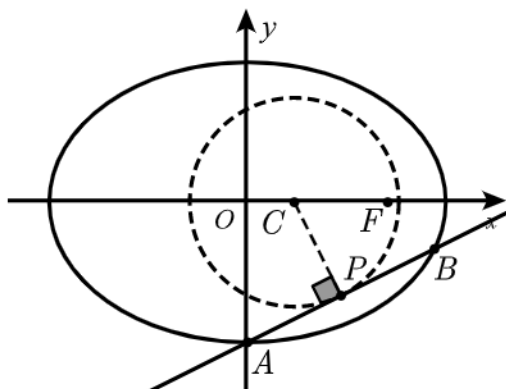
$$\text{可得 } c = b = 3,$$

$$\text{又由 } a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\text{可得 } a^2 = 18,$$

$$\text{所以, 椭圆的方程为 } \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

(2)



因为直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P ,

所以 $AB \perp CP$, 依题意,

直线 AB 和直线 CP 的斜率均存在.

设直线 AB 的方程为 $y = kx - 3$,

由方程组
$$\begin{cases} y = kx - 3 \\ \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases},$$

消去 y ,

可得
$$(2k^2 + 1)x^2 - 12kx = 0,$$

解得 $x = 0$, 或 $x = \frac{12k}{2k^2 + 1},$

依题意, 可得点 B 的坐标 $\left(\frac{12k}{2k^2 + 1}, \frac{6k^2 - 3}{2k^2 + 1} \right),$

因为 P 为线段 AB 的中点, 点 A 的坐标为 $(0, -3)$,

所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{6k}{2k^2 + 1}, \frac{-3}{2k^2 + 1} \right),$

由 $\overrightarrow{3OC} = \overrightarrow{OF},$

得点 C 的坐标为 $(1, 0)$,

故直线 CP 的斜率为
$$\frac{\frac{-3}{2k^2 + 1} - 0}{\frac{6k}{2k^2 + 1} - 1},$$

即
$$\frac{3}{2k^2 - 6k + 1},$$

又因为 $AB \perp CP$,

所以 $k \cdot \frac{3}{2k^2 - 6k + 1} = -1,$

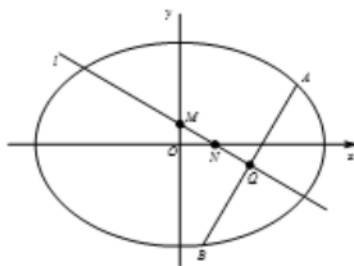
整理得 $2k^2 - 3k + 1 = 0,$

解得 $k = \frac{1}{2}$, 或 $k = 1,$

所以, 直线 AB 的方程为 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 或 $y = x - 3.$

2. 思路总结

弦 AB 的垂直平分线交 x, y 轴分别为点 N, M , 则中点 Q 的坐标为 $(-\frac{\frac{km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, \frac{\frac{m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})$, 垂直平分线方程为 $y - \frac{\frac{m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} = -\frac{1}{k}(x + \frac{\frac{km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})$, 令 $x = 0$, 得到 M 点坐标为 $(0, \frac{m(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2})}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})$, 令 $y = 0$, 得到 N 点坐标为 $(\frac{km(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2})}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, 0)$.



3. 模拟演练

7 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 椭圆 C 过点 $M(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 且 $MF_2 \perp F_1F_2$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 经过点 $P(2, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 若存在点 $Q(m, 0)$, 使得 $|QA| = |QB|$.

① 求实数 m 的取值范围.

② 若线段 F_1A 的垂直平分线过点 Q , 求实数 m 的值.

答案

(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) ① $m \in [0, \frac{1}{2})$.

② $\frac{1}{5}$.

解析

(1) $\because M(1, \frac{\sqrt{2}}{2}), MF_2 \perp F_1F_2$,
 $\therefore \begin{cases} c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2b^2} = 1 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a^2 = 2 \\ b^2 = 1 \end{cases}$,

∴椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) ① 设直线的方程为 $y = k(x - 2)$,

代入椭圆C的方程, 消去 y , 得 $(1 + 2k^2)x^2 - 8k^2x + 8k^2 - 2 = 0$.

∵直线l交椭圆C于两点,

∴ $\Delta = (-8k^2)^2 - 4(1 + 2k^2)(8k^2 - 2) > 0$, 解得 $2k^2 < 1$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则有 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1 + 2k^2}$, $x_1x_2 = \frac{8k^2 - 2}{1 + 2k^2}$.

设AB中点为 $M(x_0, y_0)$,

则有 $x_0 = \frac{4k^2}{1 + 2k^2}$, $y_0 = k(x_0 - 2) = -\frac{2k}{1 + 2k^2}$.

当 $k \neq 0$ 时, $\because |QA| = |QB|$, $\therefore QM \perp l$,

$\therefore k_{QM} \cdot k = \frac{-\frac{2k}{1+2k^2} - 0}{\frac{4k^2}{1+2k^2} - m} \cdot k = -1$, 解得 $m = \frac{2k^2}{1 + 2k^2}$.

$\therefore m = \frac{2k^2}{1 + 2k^2} = 1 - \frac{1}{1 + 2k^2} \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

当 $k = 0$ 时, 可得 $m = 0$,

综上, $m \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$.

② 依题意有 $|QF_1| = |QA| = |QB|$, 且 $F_1(-1, 0)$,

∴由 $\begin{cases} (x - m)^2 + y^2 = (m + 1)^2 \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases}$, 消去 y , 得 $x^2 - 4mx^2 - 4m = 0$,

∴ x_1, x_2 也是此方程的两个根.

$\therefore x_1 + x_2 = 4m = \frac{8k^2}{1 + 2k^2}$, $x_1x_2 = -4m = \frac{8k^2 - 2}{1 + 2k^2}$.

$\therefore \frac{8k^2}{1 + 2k^2} = \frac{2 - 8k^2}{1 + 2k^2}$, 解得 $k^2 = \frac{1}{8}$,

$\therefore m = \frac{2k^2}{1 + 2k^2} = \frac{1}{5}$.

8 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个顶点与抛物线 $C_2: x^2 = 4y$ 的焦点重合, F_1, F_2 分别是椭圆 C_1 的左、右焦点, 离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 过椭圆 C_1 右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C_1 交于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C_1 的方程.

(2) 是否存在直线 l , 使得 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -1$, 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

(3) 设点 $M(t, 0)$ 是一个动点, 若直线 l 的斜率存在, 且 N 为 AB 中点, $MN \perp AB$, 求实数 t 的取值范围.

答案

- (1) 椭圆方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.
 (2) 存在, 直线 l 的方程为: $y = \pm \frac{1}{2}(x - \sqrt{2})$.
 (3) 实数 t 的取值范围为: $t \in \left[0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

解析

- (1) 由题意得, 抛物线焦点为 $(a, 1)$,

$$\therefore b = 1 ,$$

$$\therefore e = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{c}{a} , \text{ 且 } a^2 = b^2 + c^2 ,$$

$$\text{得 } a = \sqrt{3} , c = \sqrt{2} ,$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 .$$

- (2) ①当直线斜率不存在的时候,

$$A\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), B\left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{5}{3} \neq -1, \text{ 不合题意, 舍去.}$$

- ②当直线斜率存在时, 设直线 l 为 $y = k(x - \sqrt{2})$,

$$\begin{cases} y = k(x - \sqrt{2}) \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 3k^2)x^2 - 6\sqrt{2}k^2x + 6k^2 - 3 = 0 ,$$

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) ,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{6\sqrt{2}k^2}{1 + 3k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{6k^2 - 3}{1 + 3k^2} ,$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$$= x_1 \cdot x_2 + [k(x_1 - \sqrt{2}) \cdot k(x_2 - \sqrt{2})]$$

$$= (k^2 + 1)x_1x_2 - \sqrt{2}k^2(x_1 + x_2) + 2k^2$$

$$= \frac{5k^2 - 3}{1 + 3k^2}$$

$$= -1 .$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore y = \pm \frac{1}{2}(x - \sqrt{2}) .$$

- (3) 设 AB 的中点为 $N(x_0, y_0)$,

当 $k = 0$ 时, 因为 $MN \perp AB$, 则 $t = 0$,

当 $t \neq 0$ 时 ,

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3\sqrt{2}k^2}{1 + 3k^2}, y_0 = \frac{-\sqrt{2}k}{1 + 3k^2} ,$$

$$\text{则 } N\left(\frac{3\sqrt{2}k^2}{1 + 3k^2}, \frac{-\sqrt{2}k}{1 + 3k^2}\right) ,$$

由 $MN \perp AB$, 知 $k_{MN} \cdot k_{AB} = -1$,

$$\begin{aligned} & \text{即 } \frac{\frac{-\sqrt{2}k}{1+3k^2}}{\frac{3\sqrt{2}k^2}{1+3k^2} - t} \cdot k = -1, \\ & \text{得 } t = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{k^2} + 3}}{\frac{1}{k^2} + 3} \in \left[0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \\ & \text{综上可知, } t \in \left[0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right). \end{aligned}$$

三、中点弦问题

1. 例题讲解

9 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- (1) 求椭圆的方程.
- (2) 设点 P 、 Q 为椭圆上位于第一象限的两个动点, 满足 $PF \perp QF$, C 为 PQ 的中点, 线段 PQ 的垂直平分线分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点.
 - ① 求证: A 为 BC 的中点.
 - ② 若 $\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{3}{5}$ (S 为三角形的面积), 求直线 PQ 的方程.

答案

- (1) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$.
- (2) ① 证明见解析.
- ② $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$.

解析

- (1) $\begin{cases} c = 1 \\ e = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases},$
 $\therefore$ 椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$.
- (2) ① 令直线 PQ 斜率为 k (显然 k 存在且不为 0).
 与椭圆联立得: $\begin{cases} l: y = kx + m \\ x^2 + 2y^2 - 2 = 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow (2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 2 = 0 (\Delta > 0)$.
 令 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

$$\begin{aligned} \text{则有 } x_1 + x_2 &= -\frac{4km}{2k^2 + 1}, \\ y_1 + y_2 &= k(x_1 + x_2) + 2m = \frac{2m}{2k^2 + 1}, \\ x_1 x_2 &= \frac{2m^2 - 2}{2k^2 + 1}, \\ y_1 y_2 &= (kx_1 + m)(kx_2 + m) = \frac{m^2 - 2k^2}{2k^2 + 1}, \end{aligned}$$

由于 $PF \perp QF$,

$$\text{则有 } \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0,$$

$$\text{即 } (x_1 - 1)(x_2 - 1) + y_1 y_2 = 0,$$

$$\text{得 } 3m^2 + 4km = 1 (*).$$

$$\begin{aligned} \text{又有 } \left(1 - \frac{2km}{2k^2 + 1}, \frac{m}{2k^2 + 1}\right), \\ \therefore l_{AC}: y - \frac{m}{2k^2 + 1} = -\frac{1}{k} \left(x + \frac{2km}{2k^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

分别令 x, y 等于 0,

$$\text{得: } A\left(\frac{-mk}{2k^2 + 1}, 0\right), B\left(0, -\frac{m}{2k^2 + 1}\right),$$

显然有 A 为 BC 中点.

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle BCF}} &= \frac{3}{5}, \\ S_{\triangle ABO} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|m^2 k|}{(2k^2 + 1)^2}, \\ S_{\triangle BCF} &= \frac{1}{2} \cdot \left|1 + \frac{mk}{2k^2 + 1}\right| \cdot \left|\frac{2m}{2k^2 + 1}\right|, \\ \text{得 } \left|\frac{m^2 k}{2m(2k^2 + mk + 1)}\right| &= \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

结合 (*) 式,

$$\text{得 } m = \sqrt{3}, k = -\frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore l_{PQ}: y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}.$$

2. 思路总结

(1) $|PB| = |PA| \Leftrightarrow PQ \perp AB \Leftrightarrow k_{PQ} = -\frac{1}{k_{AB}}$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 注意一般只有弦与椭圆

相交的两点才设为 x_1, x_2 的, 其它点不要随便设为

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Q 为弦 AB 的中点.

设直线方程为 $y = kx + m$, 不要设为 $y = kx + b$, 因为 b 在椭圆标准方程中会出现.

联立直线与椭圆方程

$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{消去 } y, \text{得 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx+m)^2}{b^2} = 1, \text{即 } (\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})x^2 + \frac{2km}{b^2}x + \frac{m^2}{b^2} - 1 = 0, \text{设}$$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{则} \begin{cases} \Delta = (\frac{2km}{b^2})^2 - 4(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})(\frac{m^2}{b^2} - 1) = -4(\frac{m^2}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}) > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} \\ x_1 x_2 = \frac{\frac{m^2}{b^2} - 1}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} \end{cases}$$

Δ 中的高次项是可消去的.

$$x_Q = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{\frac{km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, y_Q = kx_Q + m = -\frac{\frac{k^2m}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} + m = \frac{-\frac{k^2m}{b^2} + m + \frac{k^2m}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} = \frac{\frac{m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}},$$

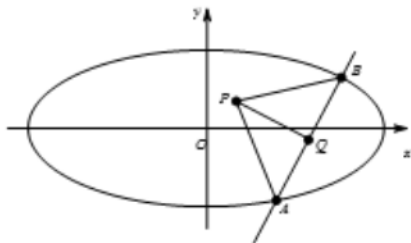
(由 x_Q 求 y_Q 分子是可消去的)

$$\text{故中点 } Q \text{ 的坐标为 } (-\frac{\frac{km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, \frac{\frac{m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}),$$

定点 P 设为 (s, t) ,

$$\text{则 } k_{PQ} = \frac{y_Q - t}{x_Q - s} = \frac{\frac{\frac{m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} - t}{-\frac{\frac{km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} - s} = \frac{\frac{m}{a^2} - t(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})}{-\frac{km}{b^2} - s(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})}, \text{故 } \frac{\frac{m}{a^2} - t(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})}{-\frac{km}{b^2} - s(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})} = -\frac{1}{k},$$

$$\frac{km}{a^2} - kt(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}) = \frac{km}{b^2} + s(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}), km(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}) = (kt + s)(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}),$$



(2) 以 OA, OB 为邻边的平行四边形的顶点 P 在椭圆上, $x_Q = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_Q = \frac{y_1 + y_2}{2}$,

$$\text{易知 } P \text{ 点坐标 } x_P = 2x_Q = x_1 + x_2 = -\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}},$$

$$\begin{aligned} y_P &= 2y_Q = y_1 + y_2 = kx_1 + m + kx_2 + m = k(x_1 + x_2) + 2m = -\frac{\frac{2k^2m}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} + 2m \\ &= \frac{-\frac{2k^2m}{b^2} + \frac{2m}{a^2} + \frac{2k^2m}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} = \frac{\frac{2m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, \end{aligned}$$

【注意】

1. 不能把 x_P 代入 $y = kx + m$ 方程中求 y_P , 因为点 P 不在直线上.

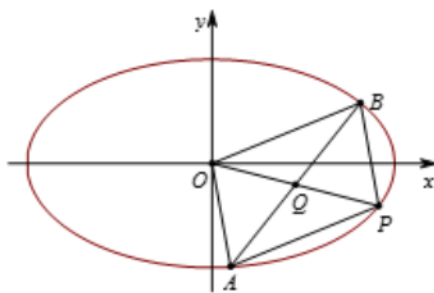
2. 由 x_P 求 y_P 分子是可消去的.

故 $P(-\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, \frac{\frac{2m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})$ 在椭圆上.

$$\text{则 } \frac{(-\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})^2}{a^2} + \frac{(\frac{\frac{2m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{两边同时乘以 } (\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})^2 \text{ 得 } \frac{4k^2m^2}{a^2b^2} + \frac{4m^2}{a^2b^2} = (\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})^2, \frac{4m^2}{a^2b^2}(k^2 + 1) = (\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})^2,$$

注意：分母不要通分和化简，均采用整体法进行处理.



3. 模拟演练

10 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 $x + y - \sqrt{6} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 相切.

- (1) 求椭圆的方程.
- (2) 过点 $N(4, 0)$ 的直线 l 与椭圆交于不同两点, 线段 A, B 的中垂线为 l' , 若 l' 在 y 轴上的截距为 $\frac{4}{13}$, 求直线 l 的方程.

答案

(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

(2) $x - 4y - 4 = 0.$

解析

(1) 由题意得 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{4}$, 即 $a^2 = \frac{4}{3}b^2$,

由 $x + y - \sqrt{6} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 相切得 $b = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$,

$\therefore a = 2$,

因此, 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

(2) 由题意知, 直线 l 的斜率 k 存在且不为零,

设直线 l 的方程为 $y = k(x - 4)$, $k \neq 0$,

设点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$,

设线段 AB 的中点为 $Q(x_0, y_0)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x-4) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (4k^2+3)x^2 - 32k^2x + 64k^2 - 12 = 0,$$

$$\text{由韦达定理得 } x_1 + x_2 = \frac{32k^2}{4k^2+3},$$

$$\text{又 } \Delta = (-32k^2)^2 - 4(4k^2+3)(64k^2-12) > 0,$$

$$\text{解得 } -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}, \text{ 且 } k \neq 0,$$

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{16k^2}{4k^2+3}, y_0 = k(x_0 - 4) = -\frac{12k}{4k^2+3},$$

$$\text{得 } Q\left(\frac{16k^2}{4k^2+3}, -\frac{12k}{4k^2+3}\right),$$

$$\text{由直线 } l' \text{ 的方程 } y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0),$$

$$\text{即 } y + \frac{12k}{4k^2+3} = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{16k^2}{4k^2+3}\right),$$

$$\text{化简得 } y = -\frac{1}{k}x + \frac{4k}{4k^2+3},$$

$$\text{令 } x=0 \text{ 得 } \frac{4k}{4k^2+3} = \frac{4}{13}, \text{ 解得 } k = \frac{1}{4} \text{ 或 } k=3,$$

$$\text{由于 } -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}, \text{ 且 } k \neq 0,$$

$$\text{所以, } k = \frac{1}{4},$$

$$\text{因此, 直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{1}{4}(x-4), \text{ 即 } x-4y-4=0.$$

11 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若过原点的直线 l_1 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 且在直线 $l_2: x-y+2\sqrt{6}=0$ 上存在点 M , 使得 $\triangle MPQ$ 为等边三角形, 求直线 l_1 的方程.

答案

(1) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$

(2) $y=0$ 或 $y=\frac{2}{3}x.$

解析

(1) $\because$ 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 1)$, 且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ 又 } a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\text{解得 } a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{2},$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 显然, 直线 l 的斜率 k 存在, 设 $P(x_0, y_0)$, 则 $Q(-x_0, -y_0)$,

当 $k=0$, 直线 PQ 的垂直平分线为 y 轴, y 轴与 m 的交点为 $M(0, 2\sqrt{6})$,

由 $|PO| = 2\sqrt{2}$, $|MO| = 2\sqrt{6}$,

$\therefore \angle MPO = 60^\circ$, 则 $\triangle MPQ$ 为等边三角形,

此时直线 l_1 的方程为 $y=0$,

当 $k \neq 0$ 时, 设直线 l_1 的方程为 $y=kx$,

$$\text{则} \begin{cases} y=kx \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{整理得: } (1+4k^2)x^2 = 8,$$

$$\text{解得: } |x_0| = \sqrt{\frac{8}{1+4k^2}},$$

$$\text{则} |PO| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\frac{8}{1+4k^2}},$$

$$\text{则} PQ \text{的垂直平分线为 } y = -\frac{1}{k}x,$$

$$\text{则} \begin{cases} x-y+2=0 \\ y=-\frac{1}{k}x \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{6}k}{k+1} \\ y = \frac{2\sqrt{6}}{k+1} \end{cases},$$

$$\text{则} M\left(-\frac{2\sqrt{6}k}{k+1}, \frac{2\sqrt{6}}{k+1}\right),$$

$$\therefore |MO| = \sqrt{\frac{24(k^2+1)}{(k+1)^2}},$$

$\therefore \triangle MPQ$ 为等边三角形, 则 $|MO| = \sqrt{3}|PO|$,

$$\therefore \sqrt{\frac{24(k^2+1)}{(k+1)^2}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\frac{8}{1+4k^2}},$$

$$\text{解得: } k=0 \text{ (舍去)}, k = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{直线} l_1 \text{的方程为 } y = \frac{2}{3}x,$$

综上可知: 直线 l_1 的方程为 $y=0$ 或 $y = \frac{2}{3}x$.