

综合问题

1. 知识梳理



一、点坐标可求问题

1. 真题分析

- 1 设椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 下顶点为 A , 椭圆 C 的离心率是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\triangle AF_1F_2$ 的面积是 $\sqrt{3}$.
- (1) 求椭圆 C 的标准方程.
 - (2) 直线 l 与椭圆 C 交于 B, D 两点 (异于 A 点), 若直线 AB 与直线 AD 的斜率之和为 1, 证明: 直线 l 恒过定点, 并求出该定点的坐标.

2. 思路总结

- ① 设直线 $y = kx + m$ ，设点坐标 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ；
- ② 将直线与圆锥曲线联立，得到 $x_1 + x_2$ 与 $x_1 \cdot x_2$ ， $(y_1 + y_2)$ 与 $y_1 \cdot y_2$ ；
- ③ 将题目条件代数化，即可得到一个关于 x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 的方程；
- ④ 利用直线方程，将 y 用 x 替换。（将 x 用 y 替换）；
- ⑤ 化简合并，将根与系数代入，即可得到一个 k 和 m 的方程，即 k 、 m 的关系；
- ⑥ 将 k 、 m 的关系代入直线方程，求出定点。

3. 模拟演练

2 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离的最大值为 $\sqrt{2} + 1$ 。

- (1) 求椭圆 C 的标准方程。
- (2) 已知直线 $l: y = kx + t (k \neq 0)$ 与椭圆 C 交于 M 、 N 两点，在 y 轴上是否存在点 $P(0, m)$ ，使得 $|MP| = |NP|$ 且 $|MN| = 2$ 。若存在，求出实数 m 的取值范围；若不存在，说明理由。

3 已知点 F 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点，过点 F 的直线 l 交椭圆于 M, N 两点，当直线 l 过 C 的下顶点时， l 的斜率为 $\sqrt{3}$ 。当直线 l 垂直于 C 的长轴时， $\triangle OMN$ 的面积为 $\frac{3}{2}$ ，

- (1) 求椭圆 C 的标准方程。
- (2) 当 $|MF| = 2|FN|$ 时，求直线 l 的方程。
- (3) 若直线 l 上存在点 P 满足 $|PM|, |PF|, |PN|$ 成等比数列，且点 P 在椭圆外，证明：点 P 在定直线上。

二、角度转化问题

1. 真题分析

4 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点为 B ，左焦点为 F ，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，

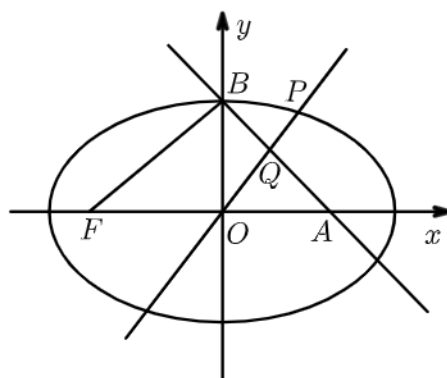
(1) 求直线 BF 的斜率；

(2) (Ⅱ) 设直线 BF 与椭圆交于点 P (P 异于点 B)，过点 B 且垂直于 BF 的直线与椭圆交于点

Q (Q 异于点 B) 直线 PQ 与 y 轴交于点 M ， $|PM| = \lambda |MQ|$ 。(i) 求 λ 的值；

(ii) 若 $|PM| \sin \angle BQP = \frac{7\sqrt{5}}{9}$ ，求椭圆的方程。

- 5 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 B ，已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，点 A 的坐标为 $(b, 0)$ ，且 $|FB| \cdot |AB| = 6\sqrt{2}$ 。



- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 设直线 $l: y = kx (k > 0)$ 与椭圆在第一象限的交点为 P ，且 l 与直线 AB 交于点 Q ，若 $\frac{|AQ|}{|PQ|} = \frac{5\sqrt{2}}{4} \sin \angle AOQ$ (O 为原点)，求 k 的值。

2. 思路总结

常见角度转化多转化为向量或者斜率问题进行求解，例如：

原点 O 在以 AB 为直径的圆内 $\Leftrightarrow \angle AOB$ 为锐角 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 < 0$ ，

易得 $\frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} < 0$ ；

原点 O 在以 AB 为直径的圆外 $\Leftrightarrow \angle AOB$ 为钝角 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 > 0$ ，

易得 $\frac{m^2}{b^2} - 1 - k^2 + \frac{m^2}{a^2} > 0$ 。

3. 模拟演练

6 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，两焦点与短轴的一个端点的连线构成的三角形面积为 $\sqrt{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 设与圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$ 相切的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (O 为坐标原点)，求

$|OA| \cos \angle OAB + \frac{\sqrt{3}}{2 \tan \angle OBA}$ 的最大值。

7 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) , F_1, F_2 是其左右焦点, A_1, A_2 为其左右顶点, B_1, B_2 为其上下顶点, 若 $\angle B_1 F_2 O = \frac{\pi}{6}$, $|F_1 A_1| = 2 - \sqrt{3}$.

(1) 求椭圆 C 的方程 .

(2) 过 A_1, A_2 分别作 x 轴的垂线 l_1, l_2 , 椭圆 C 的一条切线 $l: y = kx + m$ ($k \neq 0$) , l 与 l_1, l_2 交于 M, N 二点, 求证: $\angle M F_1 N = \angle M F_2 N$.

8 已知过点 $(0, -2\sqrt{3})$ ，斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的焦点，椭圆 C 的中心关于直线 l 的对称点在直线 $x = \frac{a^2}{2}$ 上。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 过点 $E(-2, 0)$ 的直线 m 交椭圆 C 于点 M 、 N ，且满足 $\tan \angle MON = \frac{4\sqrt{6}}{3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}}$ (O 为坐标原点)，求直线 m 的方程。

三、斜率问题

1. 真题分析

9 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F ，上顶点为 B 。已知椭圆的短轴长为 4，离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 。

- (1) 求椭圆的方程。
- (2) 设点 P 在椭圆上，且异于椭圆的上、下顶点，点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点，点 N 在 y 轴的负半轴上。若 $|ON| = |OF|$ (O 为原点)，且 $OP \perp MN$ ，求直线 PB 的斜率。

10 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 $F(-c, 0)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，点 M 在椭圆上且位于第一象限，直线 FM 被圆 $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}$ 截得的线段的长为 c ， $|FM| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 。

(1) 求直线 FM 的斜率。

(2) 求椭圆的方程。

(3) 设动点 P 在椭圆上，若直线 FP 的斜率大于 $\sqrt{2}$ ，求直线 OP (O 为原点) 的斜率的取值范围。

11 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > \sqrt{3})$ 的右焦点为 F ，右顶点为 A 。已知 $\frac{1}{|OF|} + \frac{1}{|OA|} = \frac{3e}{|FA|}$ ，其中 O 为原点， e 为椭圆的离心率。

(1) 求椭圆的方程；

(2) 设过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 B (B 不在 x 轴上)，垂直于 l 的直线与 l 交于点 M ，与 y 轴交于点 H 。若 $BF \perp HF$ ，且 $\angle MOA \leq \angle MAO$ ，求直线 l 的斜率的取值范围。

2. 思路总结

这类题可由联立方程+韦达定理+ $\Delta > 0$ 限制条件这种步骤来解.

①联立方程可得一关于参数的一元二次方程;

②利用韦达定理可得韦达定理: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \Delta = b^2 - 4ac > 0$, 得出相应关系式;

③利用 $\Delta > 0$ 得出关于参数的取值范围;

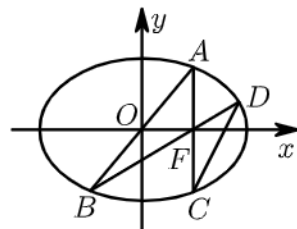
④列出目标参数的关系式, 利用相关参数取值范围, 将多个参数换算成一个有取值范围的参数, 求其值域或取值范围;

⑤角度问题: 若与直线倾斜角有关, 则可以考虑转化为斜率 k ;

若需要判断角是锐角、直角或钝角, 则可将此角作为向量的夹角, 从而利用向量数量积的符号判定.

3. 模拟演练

- 12 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 且过点 $(1, \frac{3}{2})$. F 为椭圆的右焦点, A, B 为椭圆关于原点对称的两点, 连接 AF, BF 分别交椭圆于 C, D 两点.



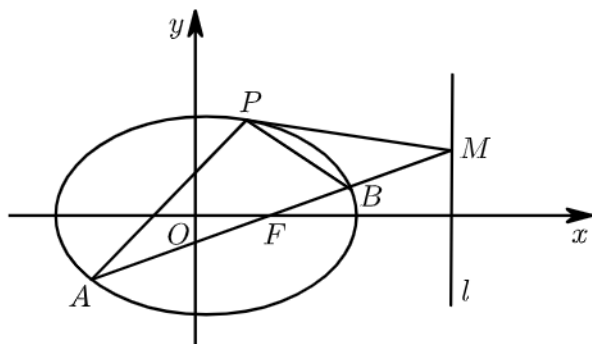
- (1) 求椭圆的标准方程;
- (2) 若 $AF = FC$, 求 $\frac{BF}{FD}$ 的值;
- (3) 设直线 AB, CD 的斜率分别为 k_1, k_2 , 是否存在实数 m , 使得 $k_2 = mk_1$, 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 请说明理由.

13 设椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ，左顶点为 A ，左焦点到左顶点的距离为 1，离心率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求椭圆 M 的方程。

(2) 过点 A 作斜率为 k 的直线与椭圆 M 交于另一点 B ，连接 BF_2 并延长交椭圆 M 于点 C ，若 $F_1C \perp AB$ ，求 k 的值。

14 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.



- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$. 若存在求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.