

弦长、面积与垂直平分

1. 知识梳理



一、弦长面积问题

1. 真题分析

1 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A ，上顶点为 B ，已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ， $|AB| = \sqrt{13}$ 。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 设直线 $l: y = kx (k < 0)$ 与椭圆交于 P, Q 两点， l 与直线 AB 交于点 M ，且点 P, M 均在第四象限，若 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍，求 k 的值。

2. 思路总结

弦长面积

直线与圆锥曲线的位置关系可分为：相交、相切、相离。

一般圆锥曲线大题都要进行下面步骤：

①设直线 $l: Ax + By + C = 0$, 椭圆方程 $C: f(x, y) = 0$, 由 $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ f(x, y) = 0 \end{cases}$, 消去 y (或消去 x) 得:

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

②由韦达定理: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, \Delta = b^2 - 4ac > 0$, 得出相应关系式;

③求弦长的一种求法是将直线方程与圆锥曲线的方程联立, 求出两交点的坐标, 然后运用两点间的距离公式来求;

另外一种求法如果是直线的斜率为 k , 被圆锥曲线截得弦 AB 两端点坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\text{则弦长公式为 } |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2} |y_1 - y_2|;$$

两根差公式:

如果 x_1, x_2 满足一元二次方程: $ax^2 + bx + c = 0$,

$$\text{则 } |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \quad (\Delta > 0);$$

④利用题上所给限制条件, 得出相关方程式, 结合②化简得结论。

圆锥曲线有关三角形面积:

①椭圆、双曲线焦点三角形面积: 抓住定义解题, 常结合余弦定理;

②若不是焦点三角形, 常用 $S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d$ (弦长公式求 $|AB|$, d 为点到直线的距离.);

③若是四边形可以利用共同的底边, 拆分成两个三角形的面积和 (差);

$$\text{常化为 } S = \frac{1}{2} \times \text{公共底边长} \times |x_1 - x_2| \text{ 或 } S = \frac{1}{2} \times \text{公共底边长} \times |y_1 - y_2|;$$

④若四边形对角线互相垂直, 可以利用 $S = \frac{1}{2} \times \text{两条对角线乘积}$.

面积最值

首选均值不等式, 其实用二次函数, 最后选导数,

$$\text{均值不等式: } a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (a, b \in \mathbb{R}),$$

$$\text{变式: } a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (a, b \in \mathbb{R}^+); \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (a, b \in \mathbb{R}^+),$$

作用: 当两个正数的积为定值时求出这两个正数的和的最小值;

当两个正数的和为定值时求出这两个正数的积的最大值，

注意：应用均值不等式求解最值时，应注意“一正二定三相等”。

圆锥曲线经常用到的均值不等式形式列举：

$$(1) S = \frac{2t}{t^2 + 64} = \frac{2}{t + \frac{64}{t}} \quad (\text{注意分 } t = 0, t > 0, t < 0 \text{ 三种情况讨论}) ;$$

$$(2) |AB|^2 = 3 + \frac{12k^2}{9t^4 + 6k^2 + 1} = 3 + \frac{12}{9k^2 + \frac{1}{k^2} + 6} \leq 3 + \frac{12}{2 \times 3 + 6} \text{ 当且仅当 } 9k^2 = \frac{1}{k^2} \text{ 时，等号}$$

成立；

$$(3) |PQ|^2 = 34 + 25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} + 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2} \geq 34 + 2\sqrt{25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} \times 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2}} = 64 ;$$

当且仅当 $25 \cdot \frac{25y_0^2}{9x_0^2} = 9 \cdot \frac{9x_0^2}{25y_0^2}$ 时等号成立。

$$(4) S = \frac{1}{2} \sqrt{12 - \frac{3}{2}m^2} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}m^2(-m^2 + 8)} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{m^2 - m^2 + 8}{2} = \sqrt{2} ,$$

当且仅当 $m^2 = -m^2 + 8$ 时，等号成立；

(5)

$$S = 2\sqrt{2}\sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{2k^2 - m_1^2 + 1}}{1+2k^2} \cdot \frac{|2m_1|}{\sqrt{1+k^2}} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{(2k^2 - m_1^2 + 1)m_1^2}}{1+2k^2} \leq 4\sqrt{2} \frac{\frac{2k^2 - m_1^2 + 1 + m_1^2}{2}}{1+2k^2} = 2\sqrt{2}$$

当且仅当 $2k^2 + 1 = 2m_1^2$ 时等号成立。

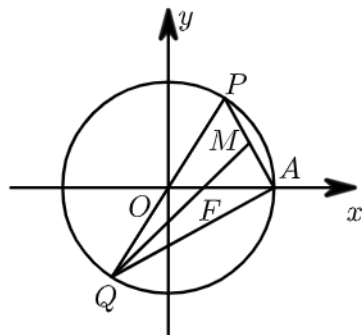
3. 模拟演练

2 在平面 xOy 中，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $P(2, 1)$ ，且离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 直线 l 方程为 $y = \frac{1}{2}x + m$ ，直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点，求 $\triangle PAB$ 面积的最大值。

- 3 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点、右顶点分别为 F, A ，过原点的直线与椭圆 C 交于点 P, Q （点 P 在第一象限内），连接 AP, FQ ，若 $AF = 2$ ， $\triangle OAP$ 的面积是 $\triangle OFQ$ 的面积 3 倍。



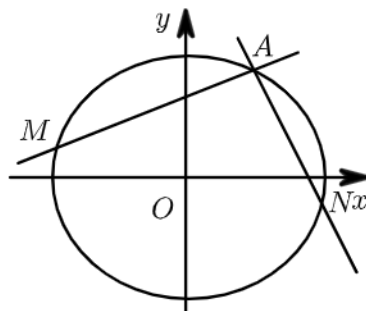
- (1) 求椭圆 C 的标准方程。
- (2) 已知 M 为线段 PA 的中点，连结 QA, QM 。
 - ① 求证： Q, F, M 三点共线。
 - ② 记直线 QP, QM, QA 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 ，若 $k_1 + k_3 = \frac{5}{2}k_2$ ，求 $\triangle PQM$ 的面积。

4 平面直角坐标系 xOy 中，过椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 右焦点的直线 $x + y - \sqrt{3} = 0$ 交 M 于 A, B 两点， P 为 AB 的中点，且 OP 的斜率为 $\frac{1}{2}$ 。

(1) 求 M 的方程。

(2) C, D 为 M 上两点，若四边形 $ACBD$ 的对角线 $CD \perp AB$ ，求四边形 $ACBD$ 面积的最大值。

- 5 已知 A 是圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的一个动点，过点 A 作两条直线 l_1, l_2 ，它们与椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 都只有一个公共点，其分别交圆于点 M, N 。



- (1) 若 $A(-2, 0)$ ，求直线 l_1, l_2 的方程。
- (2) 解答下列各题
 - ① 求证：对于圆上的任意点 A ，都有 $l_1 \perp l_2$ 。
 - ② 求 $\triangle AMN$ 面积的取值范围。

二、垂直平分问题

1. 真题分析

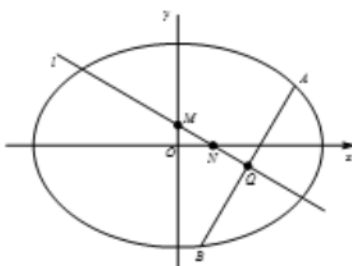
6 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0, -3)$ ，右焦点为 F ，且 $|OA| = |OF|$ ，其中 O 为原点。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 已知点 C 满足 $3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$ ，点 B 在椭圆上（ B 异于椭圆的顶点），直线 AB 与以 C 为圆心的圆相切于点 P ，且 P 为线段 AB 的中点。求直线 AB 的方程。

2. 思路总结

弦 AB 的垂直平分线交 x, y 轴分别为点 N, M , 则中点 Q 的坐标为 $(-\frac{\frac{km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, \frac{\frac{m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})$, 垂直平分线方程为 $y - \frac{\frac{m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} = -\frac{1}{k}(x + \frac{\frac{km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})$, 令 $x = 0$, 得到 M 点坐标为 $(0, \frac{m(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2})}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})$, 令 $y = 0$, 得到 N 点坐标为 $(\frac{km(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2})}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, 0)$.



3. 模拟演练

7 已知 F_1, F_2 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 椭圆 C 过点 $M(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$, 且 $MF_2 \perp F_1F_2$.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 经过点 $P(2, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 若存在点 $Q(m, 0)$, 使得 $|QA| = |QB|$.

① 求实数 m 的取值范围.

② 若线段 F_1A 的垂直平分线过点 Q , 求实数 m 的值.

8 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的一个顶点与抛物线 $C_2: x^2 = 4y$ 的焦点重合, F_1, F_2 分别是椭圆 C_1 的左、右焦点, 离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 过椭圆 C_1 右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C_1 交于 A, B 两点.

(1) 求椭圆 C_1 的方程.

(2) 是否存在直线 l , 使得 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -1$, 若存在, 求出直线 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

(3) 设点 $M(t, 0)$ 是一个动点, 若直线 l 的斜率存在, 且 N 为 AB 中点, $MN \perp AB$, 求实数 t 的取值范围.

三、中点弦问题

1. 例题讲解

9 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 F 的坐标为 $(1, 0)$ ，离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(1) 求椭圆的方程。

(2) 设点 P 、 Q 为椭圆上位于第一象限的两个动点，满足 $PF \perp QF$ ， C 为 PQ 的中点，线段 PQ 的垂直平分线分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 两点。

① 求证： A 为 BC 的中点。

② 若 $\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{3}{5}$ (S 为三角形的面积)，求直线 PQ 的方程。

2. 思路总结

(1) $|PB| = |PA| \Leftrightarrow PQ \perp AB \Leftrightarrow k_{PQ} = -\frac{1}{k_{AB}}$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 注意一般只有弦与椭圆

相交的两点才设为 x_1, x_2 的, 其它点不要随便设为

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Q 为弦 AB 的中点.

设直线方程为 $y = kx + m$, 不要设为 $y = kx + b$, 因为 b 在椭圆标准方程中会出现.

联立直线与椭圆方程

$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y, \text{ 得 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{(kx+m)^2}{b^2} = 1, \text{ 即 } (\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})x^2 + \frac{2km}{b^2}x + \frac{m^2}{b^2} - 1 = 0, \text{ 设}$$

$$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } \begin{cases} \Delta = (\frac{2km}{b^2})^2 - 4(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})(\frac{m^2}{b^2} - 1) = -4(\frac{m^2}{a^2b^2} - \frac{1}{a^2} - \frac{k^2}{b^2}) > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} \\ x_1 x_2 = \frac{\frac{m^2}{b^2} - 1}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} \end{cases}$$

Δ 中的高次项是可消去的.

$$x_Q = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{\frac{km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, y_Q = kx_Q + m = -\frac{\frac{k^2m}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} + m = \frac{-\frac{k^2m}{b^2} + \frac{m}{a^2} + \frac{k^2m}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} = \frac{\frac{m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}},$$

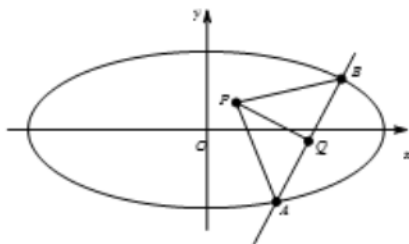
(由 x_Q 求 y_Q 分子是可消去的)

$$\text{故中点 } Q \text{ 的坐标为 } (-\frac{\frac{km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, \frac{\frac{m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}),$$

定点 P 设为 (s, t) ,

$$\text{则 } k_{PQ} = \frac{y_Q - t}{x_Q - s} = \frac{\frac{\frac{m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} - t}{-\frac{\frac{km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} - s} = \frac{\frac{m}{a^2} - t(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})}{-\frac{km}{b^2} - s(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})}, \text{ 故 } \frac{\frac{m}{a^2} - t(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})}{-\frac{km}{b^2} - s(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})} = -\frac{1}{k},$$

$$\frac{km}{a^2} - kt(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}) = \frac{km}{b^2} + s(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}), km(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}) = (kt + s)(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}),$$



(2) 以 OA, OB 为邻边的平行四边形的顶点 P 在椭圆上, $x_Q = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_Q = \frac{y_1 + y_2}{2}$,

易知 P 点坐标 $x_P = 2x_Q = x_1 + x_2 = -\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}$,

$$y_P = 2y_Q = y_1 + y_2 = kx_1 + m + kx_2 + m = k(x_1 + x_2) + 2m = -\frac{\frac{2k^2m}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} + 2m$$

$$= \frac{-\frac{2k^2m}{b^2} + \frac{2m}{a^2} + \frac{2k^2m}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} = \frac{\frac{2m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} ,$$

【注意】

1. 不能把 x_P 代入 $y = kx + m$ 方程中求 y_P , 因为点 P 不在直线上 .

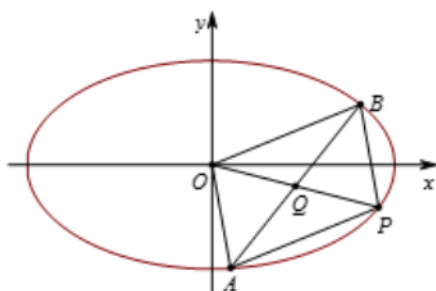
2. 由 x_P 求 y_P 分子是可消去的 .

故 $P(-\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}}, \frac{\frac{2m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})$ 在椭圆上 .

$$\text{则 } \frac{(-\frac{\frac{2km}{b^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})^2}{a^2} + \frac{(\frac{\frac{2m}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}})^2}{b^2} = 1 ,$$

两边同时乘以 $(\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})^2$ 得 $\frac{4k^2m^2}{a^2b^2} + \frac{4m^2}{a^2b^2} = (\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})^2$, $\frac{4m^2}{a^2b^2}(k^2 + 1) = (\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2})^2$,

注意：分母不要通分和化简，均采用整体法进行处理 .



3. 模拟演练

10 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 $x + y - \sqrt{6} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = b^2$ 相切 .

(1) 求椭圆的方程 .

(2) 过点 $N(4, 0)$ 的直线 l 与椭圆交于不同两点 , 线段 A, B 的中垂线为 l' , 若 l' 在 y 轴上的截距为

$\frac{4}{13}$, 求直线 l 的方程 .

11 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $M(2, 1)$ ，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程。

(2) 若过原点的直线 l_1 与椭圆 C 交于 P, Q 两点，且在直线 $l_2: x - y + 2\sqrt{6} = 0$ 上存在点 M ，使得 $\triangle MPQ$ 为等边三角形，求直线 l_1 的方程。