

解三角形综合-习题

一、选择题

1 一船以每小时15km的速度向东航行，船在A处看到一灯塔B在北偏东 60° 的方向上，行驶4h后，船到达C处，看到这个灯塔在北偏东 15° 的方向上，这时船与灯塔的距离为（ ）.

A. $30\sqrt{2}\text{km}$

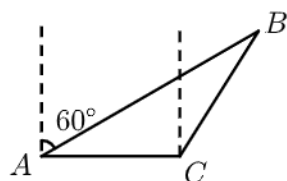
B. $30\sqrt{6}\text{km}$

C. $15\sqrt{2}\text{km}$

D. $15\sqrt{6}\text{km}$

答案 A

解析 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 60\text{km}$ ， $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$ ，



$$\angle ACB = \frac{7\pi}{12}, \angle ABC = \frac{\pi}{4},$$

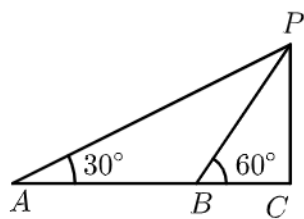
$$\text{由正弦定理得: } \frac{BC}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{AC}{\sin \frac{\pi}{4}},$$

$$\text{故 } BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 60 = 30\sqrt{2}\text{km},$$

故船与灯塔的距离为 $30\sqrt{2}\text{km}$.

故选A.

2 海春轩塔（又名广福寺塔），江苏第一古塔，为唐代建筑物，位于江苏省东台市古镇西溪．距今已有1300多年历史，为东台西溪旅游观光主要景点之一．在一次春游活动中，同学们为了估算塔高，某同学在该塔正西方向的A处测得该塔仰角为 30° ，对着塔向正东方向前进了24米到达B处后测得该塔仰角为 60° ，则该塔的高度估计为（ ）.



A. $8\sqrt{3}$ 米

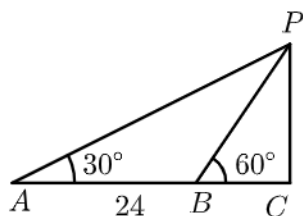
B. 12米

C. $12\sqrt{3}$ 米

D. $24\sqrt{3}$ 米

答案 C

解析 由 $\angle PBC = 60^\circ$ 得, $\angle ABP = 120^\circ$,
则 $\angle APB = 30^\circ$,



$\therefore \triangle PAB$ 是等腰三角形, $PB = AB = 24$,

在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中,

$$PC = PB \cdot \sin 60^\circ = 24 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$$

故选C.

3 已知在锐角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $B = 60^\circ$, 且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 b 的取值范围是().

A. $[2, \sqrt{6})$

B. $[\sqrt{2}, \sqrt{6})$

C. $[2, 6)$

D. $[4, 6)$

答案 A

解析 由题可知, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B = \frac{1}{2}ac \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$\therefore ac = 4$, 又 $\because \triangle ABC$ 是锐角,

$$\therefore \begin{cases} 0 < A < 90^\circ \\ 0 < 120^\circ - A < 90^\circ \end{cases} \text{ 即 } 30^\circ < A < 90^\circ,$$

$\therefore$ 根据正弦定理可得,

$$\begin{aligned} ac &= \frac{b}{\sin B} \cdot \sin A \cdot \frac{b}{\sin B} \cdot \sin C \\ &= \frac{b^2}{\sin^2 B} \cdot \sin A \cdot \sin C, \\ 4 &= \frac{b^2}{\frac{3}{4}} \cdot \sin A \cdot \sin(120^\circ - A), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } b^2 &= \frac{3}{\sin A \cdot \sin(120^\circ - A)} \\ &= \frac{3}{\sin A \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos A + \frac{1}{2} \sin A \right)} \\ &= \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2A + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2A} \\ &= \frac{3}{\frac{1}{2} \sin(2A - 30^\circ) + \frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

$$\because A \in (30^\circ, 90^\circ),$$

$$\therefore 2A - 30^\circ \in (30^\circ, 150^\circ),$$

$$\therefore \sin(2A - 30^\circ) \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right], \text{ 则 } b^2 \in [4, 6),$$

$$\text{即 } b \in [2, \sqrt{6}).$$

故选：A.

4 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ ， $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$ ，

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则 $b + c$ 的取值范围是（ ）.

A. $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

D. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

答案 B

解析 在 $\triangle ABC$ 中， $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ ，

$$\text{由余弦定理可得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2},$$

因为 A 是 $\triangle ABC$ 的内角，

$$\text{所以 } A = 60^\circ,$$

$$\text{因为 } a = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{c}{\sin(120^\circ - B)} = 1,$$

$$\text{所以 } b + c = \sin B + \sin(120^\circ - B) = \frac{3}{2} \sin B + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B = \sqrt{3} \sin(B + 30^\circ),$$

因为 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\pi - B) > 0$,

所以 $\cos B < 0$, B 为钝角,

所以 $90^\circ < B < 120^\circ$, $120^\circ < B + 30^\circ < 150^\circ$,

故 $\sin(B + 30^\circ) \in \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

所以 $b + c = \sqrt{3} \sin(B + 30^\circ) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

5 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = 1$, $2 \cos C + c = 2b$, 则 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围是 ().

A. $(\sqrt{3} - 1, \sqrt{3}]$

B. $[1, \sqrt{3}]$

C. $(\sqrt{3} + 1, 3]$

D. $(0, 3]$

答案 C

解析

由余弦定理以及 $2 \cos C + c = 2b$ 得 $2 \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c = 2b$,

因为 $a = 1$,

所以 $1 + bc = b^2 + c^2$,

由余弦定理 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc + 1 - 1^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,

所以 $A = \frac{\pi}{3}$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

所以 $b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin B$, $c = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin C$,

因此 $b + c = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\sin B + \sin C) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \times 2 \sin \frac{\pi - A}{2} \cos \frac{(\pi - A - C)}{2} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - C\right)$,

由于 $\triangle ABC$ 是锐角三角形且 $\angle A = \frac{\pi}{3}$,

所以 $C \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $b + c \in (\sqrt{3}, 2]$,

从而 $a + b + c \in (\sqrt{3} + 1, 3]$.

故选 C.

已知锐角三角形 $\triangle ABC$ ，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A, c = 2$ ，
则 $\triangle ABC$ 面积的取值范围为（ ）。

- A. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right)$ B. $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ C. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

答案 A

解析

$$\because a \sin \frac{A+C}{2} = b \sin A,$$

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi-B}{2}\right) = a \cos \frac{B}{2} = b \sin A,$$

$$\therefore \text{由正弦定理可得: } \sin A \cos \frac{B}{2} = \sin B \sin A,$$

$$\because \sin A > 0,$$

$$\therefore \text{可得: } \cos \frac{B}{2} = \sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2},$$

$$\therefore B \text{ 为锐角, } \frac{B}{2} \text{ 也为锐角,}$$

$$\therefore \text{可得} \sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}, \text{ 可得} \frac{B}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ 可得} B = \frac{\pi}{3},$$

$$\because c = 2,$$

$$\therefore \text{由题设知} \triangle ABC \text{ 的面积 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} a,$$

$$\text{由正弦定理得 } a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - C\right)}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{\tan C} + 1,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为锐角三角形,}$$

$$\therefore 0^\circ < A < 90^\circ, 0^\circ < C < 90^\circ,$$

$$\text{由 (1) 知 } A + C = 180^\circ - B = 120^\circ,$$

$$\therefore 30^\circ < C < 90^\circ,$$

$$\therefore \tan C \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right),$$

$$\therefore 1 < a < 4,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < S_{\triangle ABC} < 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 面积的取值范围是 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right),$$

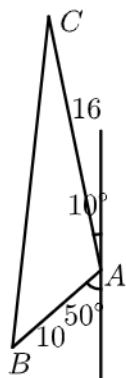
故选A.

二、填空题

- 7 甲船在岛A处南偏西 50° 的B处，且AB的距离为10海里，另有乙船正离开岛沿北偏西 10° 的方向以每小时8海里的速度航行，若甲船要用2小时追上乙船，则速度大小为 _____ 海里。

答案 $\sqrt{129}$

解析 由图知，



$$\angle BAC = 180^\circ - 10^\circ - 50^\circ = 120^\circ,$$

$$AC = 8 \times 2 = 16,$$

$$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos 120^\circ = 100 + 256 - 2 \times 10 \times 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 356 + 160 = 516$$

,

$$\therefore BC = 2\sqrt{129},$$

$$\therefore V = \frac{BC}{2} = \sqrt{129}.$$

三、解答题

- 8 在 $\triangle ABC$ 中，角A, B, C的对边分别是a, b, c, 已知 $(a - 3b) \cos C = C(3 \cos B - \cos A)$ 。

- (1) 求 $\frac{\sin B}{\sin A}$ 的值。
- (2) 若 $c = \sqrt{7}a$, 求角C的大小。

答案 (1) 3 .

(2) $C = 60^\circ$.

解析 (1) 由正弦定理得： $(\sin A - 3 \sin B) \cos C = \sin C(3 \cos B - \cos A)$,

$$\therefore \sin A \cos C + \cos A \sin C = \sin C \cos B + 3 \cos C \sin B ,$$

$$\text{即} \sin(A+C) = 3 \sin(C+B) , \text{即} \sin B = 3 \sin A ,$$

$$\therefore \frac{\sin B}{\sin A} = 3 .$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } b = 3a ,$$

$$\therefore C = \sqrt{7}a ,$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + 9a^2 - 7a^2}{2 \times a \times 3a} = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore C \in (0, \pi) ,$$

$$\therefore C = 60^\circ .$$

9 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c , 已知 $\frac{\cos A - 2 \cos C}{\cos B} = \frac{2c - a}{b}$.

(1) 求 $\frac{\sin C}{\sin A}$ 的值.

(2) 若 $\cos B = \frac{1}{4}$, $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

答案

(1) 2.

(2) $\frac{\sqrt{15}}{4}$.

解析

$$(1) \text{ 由正弦定理得: } \frac{\cos A - 2 \cos C}{\cos B} = \frac{2c - a}{b} = \frac{2 \sin C - \sin A}{\sin B} ,$$

$$\therefore \sin B \cos A - 2 \sin B \cos C = 2 \sin C \cos B - \sin A \cos B ,$$

$$\therefore \sin(A+B) = 2 \sin(B+C) ,$$

$$\therefore \sin C = 2 \sin A ,$$

$$\therefore \frac{\sin C}{\sin A} = 2 .$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知: } \frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = 2 , \text{ 即 } c = 2a ,$$

$$\text{由余弦定理得: } b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B ,$$

$$\text{即 } 2^2 = 4a^2 + a^2 - 2a \times 2a \times \frac{1}{4} ,$$

$$\text{解得 } a = 1 ,$$

$$\therefore c = 2 ,$$

$$\therefore \cos B = \frac{1}{4} ,$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{15}}{4} ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 面积 } S = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{4} .$$

10 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B + \sin A}$.

- (1) 求角 A 的大小.
 (2) 若 $a = \sqrt{7}, b = 2c$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

答案

- (1) $\frac{2\pi}{3}$
 (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析

(1) 由正弦定理, $\frac{a-b}{c} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin B + \sin A} = \frac{b+c}{b+a}$.

故 $(a-b)(b+a) = c(b+c)$, 即 $a^2 - b^2 = bc + c^2$,

即 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, 故由余弦定理

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2}, A = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 由 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ 代入 $a = \sqrt{7}, b = 2c$,

可以解得 $b = 2, c = 1$, 故 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

11 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 且满足 $a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{3}ac$.

- (1) 求角 B 的大小.
 (2) 若 $2b \cos A = \sqrt{3}(c \cos A + a \cos C)$, BC 边上的中线 AM 的长为 $\sqrt{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

答案

- (1) $\angle B = 30^\circ$.
 (2) $\sqrt{3}$.

解析

(1) $\because a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{3}ac$,

$$\therefore b^2 = a^2 + c^2 - \sqrt{3}ac,$$

$$\text{又} \because b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\therefore 2 \cos B = \sqrt{3},$$

$$\therefore \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle B = 30^\circ.$$

(2) $2b \cos A = \sqrt{3}(c \cos A + a \cos C)$,

$$\therefore 2 \sin B \cos A = \sqrt{3} (\sin C \cos A + \sin A \cos C),$$

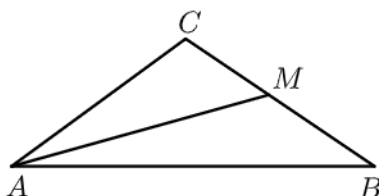
$$\therefore 2 \sin B \cos A = \sqrt{3} \sin(A + C),$$

$$\therefore 2 \sin B \cos A = \sqrt{3} \sin B,$$

$$\therefore \sin B \neq 0,$$

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$



$$\therefore \angle A = \angle B = 30^\circ$$

$$\text{设 } AC = x,$$

$$\therefore BC = x, AB = \sqrt{3}x,$$

由中线长公式知,

$$x^2 + x^2 + (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}x)^2 = x^2 + (2\sqrt{7})^2,$$

$$\therefore 7x^2 = 28,$$

$$x^2 = 4,$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore AC = BC = 2,$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \sin 120^\circ = \sqrt{3}.$$

12 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $c = \sqrt{3}a \sin C - c \cos A$.

(1) 求 A .

(2) 若 $a = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 b, c .

答案

(1) $A = \frac{\pi}{3}.$

(2) $b = c = 2.$

解析

(1) $c = \sqrt{3}a \sin C - c \cos A,$

有正弦定理有: $\sqrt{3} \sin A \sin C - \sin C \cos A - \sin C = 0,$

$$\text{即} \sin C \cdot (\sqrt{3} \sin A - \cos A - 1) = 0 ,$$

$$\text{又} \sin C \neq 0 ,$$

$$\text{所以} \sqrt{3} \sin A - \cos A - 1 = 0 ,$$

$$\text{即} 2 \sin \left(A - \frac{\pi}{6} \right) = 1 ,$$

$$\text{所以} A = \frac{\pi}{3} .$$

$$(2) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{3} ,$$

$$\text{所以} bc = 4 , a = 2 ,$$

$$\text{由余弦定理得: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A ,$$

$$\text{即} 4 = b^2 + c^2 - bc ,$$

$$\text{即有} \begin{cases} bc = 4 \\ b^2 + c^2 - bc = 4 \end{cases} .$$

$$\therefore b = c = 2 .$$

13 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 已知 $b \sin^2 \frac{A}{2} + a \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{c}{2}$.

(1) 若 $c = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

(2) 若 $C = \frac{\pi}{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, 求 c .

答案

(1) 周长为6.

(2) $c = 2\sqrt{2}$.

解析

$$(1) \because b \sin^2 \frac{A}{2} + a \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{c}{2}$$

$$\therefore \text{由正弦定理可得} \sin A \cdot \left(\frac{1 - \cos B}{2} \right) + \sin B \cdot \left(\frac{1 - \cos A}{2} \right) = \frac{1}{2} \sin C$$

$$\therefore \sin A - \sin A \cos B + \sin B - \sin B \cos A = \sin C ,$$

$$\therefore \sin A + \sin B - \sin(A + B) = \sin C , \text{ 可得: } \sin A + \sin B = 2 \sin C ,$$

$$\therefore a + b = 2c ,$$

$$\therefore c = 2 ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长 } a + b + c = 3c = 6 .$$

$$(2) \because C = \frac{\pi}{3} , \triangle ABC \text{ 的面积为 } 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} ab \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$\therefore ab = 8$$

$$\therefore \text{由余弦定理可得: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C ,$$

$$\therefore \cos C = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab,$$

由(1)可知 $a+b=2c$,

$$\therefore c^2 = 4c^2 - 24, \text{ 即 } c^2 = 8,$$

$$\therefore c = 2\sqrt{2}.$$

14 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b^2 + c^2 - a^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3}bc$.

(1) 求 $\sin A$ 的值.

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 且 $\sqrt{2}\sin B = 3\sin C$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

答案

(1) $\frac{1}{3}$.

(2) $2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$.

解析

(1) $\therefore b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A,$

$$\therefore 2bc \cos A = \frac{4\sqrt{2}}{3}bc,$$

$$\therefore \cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{1}{3}.$$

(2) $\therefore \triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{2}$, 即 $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{6}bc = \sqrt{2},$

$$\therefore bc = 6\sqrt{2},$$

$$\text{又 } \therefore \sqrt{2}\sin B = 3\sin C, \text{ 由正弦定理得 } \sqrt{2}b = 3c,$$

$$\therefore b = 3\sqrt{2}, c = 2,$$

$$\text{则 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 6,$$

$$\therefore a = \sqrt{6},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的周长为 } 2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}.$$

15 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $b+c=2a$, $3c \sin B = 4a \sin C$.

(1) 求 $\cos B$ 的值.

(2) 求 $\sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

答案

- (1) $-\frac{1}{4}$.
 (2) $-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}$.

解析

- (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\text{得 } b \sin C = c \sin B ,$$

$$\text{又由 } 3c \sin B = 4a \sin C ,$$

$$\text{得 } 3b \sin C = 4a \sin C , \text{ 即 } 3b = 4a ,$$

$$\text{又因为 } b + c = 2a ,$$

$$\text{得到 } b = \frac{4}{3}a , c = \frac{2}{3}a ,$$

由余弦定理可得

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{16}{9}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{2}{3}a} = -\frac{1}{4} .$$

- (2) 由(1)可得 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

$$\text{从而 } \sin 2B = 2 \sin B \cos B = -\frac{\sqrt{15}}{8} ,$$

$$\cos 2B = \cos^2 B - \sin^2 B = -\frac{7}{8} ,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \sin\left(2B + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin 2B \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2B \sin \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7}{8} \times \frac{1}{2} \\ &= -\frac{3\sqrt{5}+7}{16} . \end{aligned}$$

- 16 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{15}$, $b - c = 2$,

$$\cos A = -\frac{1}{4} .$$

- (1) 求 a 和 $\sin C$ 的值 .

- (2) 求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值 .

答案

- (1) $a = 8$, $\sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}$
 (2) $\frac{\sqrt{15} - 7\sqrt{3}}{16}$.

解析

- (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\cos A = -\frac{1}{4}$, 可得 $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$,

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = 3\sqrt{15} , \text{ 得 } bc = 24 ,$$

又由 $b - c = 24$, 解得 $b = 6$, $c = 4$,

由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 解得 $a = 8$,

再由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

$$\begin{aligned} (2) \quad & \cos(2A + \frac{\pi}{6}) \\ &= \cos 2A \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \sin 2A \cdot \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (2\cos^2 A - 1) - \frac{1}{2} \cdot 2\sin A \cos A \\ &= \frac{\sqrt{15} - 7\sqrt{3}}{16} . \end{aligned}$$

17 在 $\triangle ABC$ 中 , a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边 , 已知 $b^2 = ac$ 且 $a^2 - c^2 = ac - bc$.

(1) 求 $\angle A$ 的大小 .

(2) 设 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{A}{2}) + \sin(\omega x)$ ($\omega > 0$) 且 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 求 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的最大值 .

答案

(1) $\frac{\pi}{3}$.

(2) $\sqrt{3}$.

解析

(1) 因为 $b^2 = ac$ 且 $a^2 - c^2 = ac - bc$, 所以 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$,

$$\text{所以 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2cb} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2} ,$$

又 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{6}) + \sin(\omega x)$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega x + \frac{1}{2} \sin \omega x + \sin \omega x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega x + \frac{3}{2} \sin \omega x$$

$$= \sqrt{3} \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) ,$$

因为 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sqrt{3} \sin(2x + \frac{\pi}{6})$

因为 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in [\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}]$,

所以当 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ 即 $x = \frac{\pi}{6}$ 时 , $f(x)_{\max} = \sqrt{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中, 设边 a, b, c 所对的角为 A, B, C , 且 A, B, C 都不是直角,

$$(bc - 8) \cos A + ac \cos B = a^2 - b^2.$$

(1) 若 $b + c = 5$, 求 b, c 的值.

(2) 若 $a = \sqrt{5}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

答案

$$(1) \begin{cases} b = 1 \\ c = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b = 4 \\ c = 1 \end{cases}.$$

$$(2) \frac{\sqrt{55}}{4}.$$

解析

$$\begin{aligned} (1) \quad & \because (bc - 8) \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + ac \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = a^2 - b^2, \\ & \therefore \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} - 8 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = a^2 - b^2, \\ & \therefore b^2 + c^2 - a^2 - 8 \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0, \end{aligned}$$

$\because \triangle ABC$ 不是直角三角形,

$$\therefore bc = 4,$$

$$\text{又} \because b + c = 5,$$

$$\therefore \text{解得} \begin{cases} b = 1 \\ c = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} b = 4 \\ c = 1 \end{cases}.$$

$$(2) \quad \because a = \sqrt{5}, \text{ 由余弦定理可得 } 5 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \geqslant 2bc - 2bc \cos A = 8 - 8 \cos A,$$

$$\therefore \cos A \geqslant \frac{3}{8},$$

$$\therefore \sin A \leqslant \frac{\sqrt{55}}{8},$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A \leqslant \frac{\sqrt{55}}{4}.$$

$$\therefore \text{当 } \cos A = \frac{3}{8} \text{ 时 } \triangle ABC \text{ 面积取得最大值, } \triangle ABC \text{ 面积的最大值是 } \frac{\sqrt{55}}{4}.$$

19 在锐角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别为角 A, B, C 的对边, 且

$$4 \sin A \cos^2 A - \sqrt{3} \cos(B + C) = \sin 3A + \sqrt{3}.$$

(1) 求 A 的大小.

(2) 若 $b = 2$, 求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

答案

$$(1) A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) S_{\triangle ABC} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3} \right).$$

解析

$$(1) \because A + B + C = \pi,$$

$$\therefore \cos(B + C) = -\cos A \text{ ①},$$

$$\text{又} \because 3A = 2A + A,$$

$$\therefore \sin 3A = \sin(2A + A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A \text{ ②},$$

$$\text{又} \sin 2A = 2 \sin A \cos A \text{ ③}, \text{将①, ②, ③代入已知得},$$

$$2 \sin 2A \cos A + \sqrt{3} \cos A = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A + \sqrt{3},$$

$$\text{整理得} \sin A + \sqrt{3} \cos A = \sqrt{3},$$

$$\text{即} \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又} \because A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore A + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}, \text{即} A = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{由(1)得} B + C = \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore C = \frac{2\pi}{3} - B,$$

$$\because \triangle ABC \text{ 为锐角三角形},$$

$$\therefore \frac{2\pi}{3} - B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 且 } B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{解得} B \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{在} \triangle ABC \text{ 中, 由正弦定理得: } \frac{2}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore c = \frac{2 \sin C}{\sin B} = \frac{2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right)}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\tan B} + 1,$$

$$\text{又} B \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore \frac{1}{\tan B} \in (0, \sqrt{3}),$$

$$\therefore c \in (1, 4),$$

$$\text{又} \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} c,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3}\right).$$

20 $\triangle ABC$ 中角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c, a = c \cos B + \frac{1}{3}b$.

(1) 求 $\cos C$.

(2) 若 $c = 3$, 求 $a + b$ 的最大值.

答案

$$(1) \frac{1}{3}.$$

(2) $3\sqrt{3}$.

解析

(1) 由正弦定理及 $a = c \cos B + \frac{1}{3}b$ 得 $\sin A = \sin C \cos B + \frac{1}{3} \sin B$

因为 $\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$,

所以 $\sin B \cos C = \frac{1}{3} \sin B$,

因为 $B \in (0, \pi)$, $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos C = \frac{1}{3}$.

(2) 由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, 即 :

$$9 = a^2 + b^2 - \frac{2}{3}ab = (a+b)^2 - \frac{8}{3}ab \geq (a+b)^2 - \frac{8}{3} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{1}{3}(a+b)^2 \text{ 所以}$$

$$(a+b)^2 \leq 27, a+b \leq 3\sqrt{3}, \text{ 当 } a=b=\frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ 时取等号 .}$$

所以 $a+b$ 的最大值为 $3\sqrt{3}$.