



概率

一、相关概念

1. 知识讲解

随机试验

对随机现象的实现与观察，称为随机试验，常用E表示.

随机试验特点

- (1) 相同条件下可重复进行；
- (2) 所有可能结果都明确可知，且不唯一；
- (3) 每次试验都只有一种结果，且事先不确定.

样本点

随机试验的所有可能结果.

样本空间

全体样本点组成的集合，常用 Ω 表示.

事件的分类

事件类型	定义
必然事件	一定会发生的事件，称为必然事件，即样本空间 Ω 为必然事件
不可能事件	一定不会发生的事件，称为不可能事件，即 ϕ 不包含任何样本点，为不可能事件
确定事件	相必然事件与不可能事件统称为确定事件
随机事件	可能发生也可能不发生的事件，称为随机事件，即样本空间的 Ω 的子集为随机事件

事件及其表示

确定事件和随机事件统称为事件，一般用大写字母A、B、C...表示.

【温馨提示】

要判断一个事件是哪种事件，首先要看清条件，条件决定事件的种类，随着条件的改变，其结果可能也会示发生改变.例如：“常温常压下，水沸腾”是不可能事件，但“在 100°C 常压下，水沸腾”就成了必然事件.

2. 例题精讲

1 给出下列命题：

- ①“今天会下雨”是必然事件；
- ②“爱学习的人长生不老”是不可能事件；
- ③“爱打篮球的男人身高一定超过 180cm ”是必然事件；
- ④“你在下一个路口遇到你的数学老师”是随机事件；
- ⑤“买彩票不会中奖”是必然事件；

其中正确命题的个数是（ ）.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

答案 C

解析 略.

2 下列事件中，是必然事件的是（ ）.

- A. 任意买一张电影票，座位号是2的倍数
- B. 13个人中至少有两人生肖相同
- C. 车辆随机到达一个路口，遇到红灯
- D. 明天一定会下雨

答案 B

解析 A选项：“任意买一张电影票，座位号是2的倍数”是随机事件，故A选项事件；
B选项：“13个人至少有两人生肖相同”是必然事件，故B选项正确；
C选项：“车辆随机到达一个路口，遇到红灯”是随机事件，故C选项错误；

D选项：“明天一定会下雨”是随机事件，故D选项错误．

故选B．

3 在12本书中，有10本语文书，2本英语书，从中任意抽取3本的必然现象是（ ）．

A. 3本都是语文书

B. 至少有一本是英语书

C. 3本都是英语书

D. 至少有一本是语文书

答案 D

解析 ∵12本书中，有10本语文书，2本英语书，
∴从中任取3本的必然现象是至少有一本是语文书．
故选D．

3. 课堂巩固

4 下列事件：

①连续两次抛掷同一个骰子，两次都出现2点；

②明天下雨；

③某人买彩票中奖；

④从 $\{1, 2, 3\}$ 中任取两个元素，它们的和大于2；

⑤在标准大气压下，水加热到 90°C 时会沸腾．

其中是随机事件的个数有（ ）．

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

答案 C

解析 连续两次抛掷同一个骰子，两次都出现2点这一事件可能发生也可能不发生，
∴①是随机事件．
明天下雨这一事件可能发生也可能不发生，∴②是随机事件，

某人买彩票中奖这一事件可能发生也可能不发生， $\therefore$ ③是随机事件，
从集合 $\{1, 2, 3\}$ 中任取两个元素，它们的和必大于2， $\therefore$ ④是必然事件，
在标准大气压下，水加热到 100°C 时才会沸腾， $\therefore$ ⑤是不可能事件，
故随机事件的个数为3个。

故选：C。

5 以下现象是随机事件的是（ ）。

- A. 标准大气压下，水加热到 100°C ，必会沸腾
- B. 长和宽分别为 a ， b 的矩形，其面积为 $a \times b$
- C. 走到十字路口，遇到红灯
- D. 三角形内角和为 180°

答案 C

解析 A选项：标准大气压下，水加热到 100°C ，必会沸腾是必然事件，故A错误；
B选项：长和宽分别为 a ， b 的矩形，其面积为 $a \times b$ 是必然事件，故B错误；
C选项：走到十字路口，遇到红灯是随机事件，故C正确；
D选项：三角形内角和为 180° 是必然事件，故D错误；
故选C。

6 从12个同类产品（其中有10个正品，2个次品）中，任意抽取3个，下列事件是必然事件的是（ ）。

- A. 3个都是正品
- B. 至多有1个是次品
- C. 3个都是次品
- D. 至少有1个是正品

答案 D

解析 因为有10个正品，2个次品，所以任意抽取3个，有3中情况：
3个都是正品；2个正品，1个次品；1个正品，2个次品。只有D包含了这3种情况。

二、随机事件的概率

1. 知识讲解



频率与概率

(1) 频数与频率

在相同条件 S 下重复 n 次试验,观察某一事件 A 是否出现,称 n 次试验中事件 A 出现的次数 n_A 为事件 A 出现的频数,称事件 A 出现的比例 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ 为事件 A 出现的频率,且 $0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$.

(2) 概率对于给定的随机事件 A ,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会随着试验次数的增加逐渐稳定在某个常数附近,把这个常数记作 $P(A)$,称为事件 A 的概率,简称为 A 的概率.

- ① 概率从数量上反映一个事件发生的可能性的.
- ② 概率的定义实际上也是求一个事件概率的基本方法.



频率与概率的关系

(1) 频率与概率的区别

频率	本身是随机的,在试验之前是无法确定的,在相同条件下做同样次数的重复试验,得到的事件的频率值也可能会不同
概率	本身是一个在 $[0, 1]$ 内的确定值,不随试验结果的改变而改变

(2) 频率与概率的联系

随机事件的频率是指此事件在试验中发生的次数与试验总次数的比值,它具有一定的稳定性,总在某个常数附近摆动,且随着试验次数的不断增加,这种摆动幅度越来越小这个常数就是这个随机事件的概率.

概率可看作频率在理论上的期望值,它从数量上反映了随机事件发生的可能性大小,随机事件的频率在大量重复试验的前提下可近似地作为这个事件的概率.

2. 例题精讲

7

有下列说法：

- ①频率反映了事件发生的频繁程度，概率反映了事件发生的可能性大小；
- ②做 n 次随机试验，事件 A 发生 m 次，则事件 A 发生的频率就是事件 A 发生的概率；
- ③百分率是频率，但不是概率；
- ④频率是不能脱离具体的 n 次试验的试验值，而概率是具有确定性的、不依赖于试验次数的理论值；
- ⑤频率是概率的近似值，概率是频率的稳定值．其中正确的是 _____ ．（只填序号）

答案 ①④⑤

解析 频率是个不确定的数，会随着试验次数的变化而变化，在一定程度上频率可以反映事件发生可能性的大小，但无法从根本上刻画事件发生的可能性大小．通过大量重复试验可以发现，随着试验次数的增多，事件发生的频率就会稳定于某个固定的值，这个值就是概率．

- 8 在天气预报中，如果预报“明天的降水概率为85%”，这是指（ ）
- A. 明天该地区约有85%的地区降水，其它15%的地区不降水
 - B. 明天该地区约有85%的时间降水，其它时间不降水
 - C. 气象台的专家中，有85%的人认为会降水，另外15%的专家认为不会降水
 - D. 明天该地区降水的可能性为85%

答案 D

解析 概率是指某一事件发生的可能性，故选D.

- 9 某种彩票中奖的概率为 $\frac{1}{10000}$ ，这是指（ ）．
- A. 买10000张彩票一定能中奖
 - B. 买10000张彩票只能中奖1次
 - C. 若买9999张彩票未中奖，则第10000张必中奖

D. 买一张彩票中奖的可能性是 $\frac{1}{10000}$

答案 D

解析 AB选项：如果某种彩票的中奖概率为 $\frac{1}{10000}$ ，则买10000张这种彩票仍然是随机事件，即买10000张彩票，可能有多张中奖，也可能不能中奖，故AB错误；

C选项：若买9999张彩票未中奖，则第10000张也是随机事件，且发生概率仍然是 $\frac{1}{10000}$ ，故C错误；

D选项：这里的中奖的概率为 $\frac{1}{10000}$ ，是指买一张彩票中奖的可能性是 $\frac{1}{10000}$ ，故D正确。
故选D。

10 某班准备到郊外野营，为此向商店订了帐篷，若下雨与不下雨是等可能的，只要帐篷如期运到，他们就不会淋雨，则下列说法正确的是（ ）。

A. 一定不会淋雨

B. 淋雨的可能性为 $\frac{3}{4}$

C. 淋雨的可能性为 $\frac{1}{2}$

D. 淋雨的可能性为 $\frac{1}{4}$

答案 D

解析 基本事件有“下雨帐篷到”，“不下雨帐篷到”，

“下雨帐篷未到”，“不下雨帐篷未到”，4种情况，而只有“下雨帐篷未到”时会淋雨，

故淋雨的可能性为 $\frac{1}{4}$ 。

3. 课堂巩固

11 下列叙述随机事件的频率与概率的关系中，说法正确的是（ ）。

A. 频率就是概率

B. 频率是随机的，与试验次数无关

C. 概率是稳定的，与试验次数无关

D. 概率是随机的，与试验次数有关

答案 C

解析 频率是随机的，随实验而变化，但概率是唯一确定的一个值．

故选：C．

12 某气象局预报说“明天本地降水的概率为70%”，则下列说法正确的是（ ）．

- A. 明天本地有70%的区域下雨
- B. 明天本地有30%的区域不下雨
- C. 明天本地有70%的时间下雨
- D. 明天本地下雨可能性为70%

答案 D

解析 由题意可知，明天下雨的可能性为70%．

故选D．

13 在北京消费季活动中，某商场为促销举行购物抽奖活动，规定购物消费每满200元就可以参加一次抽奖活动，中奖的概率为 $\frac{1}{10}$ ，那么以下理解正确的是（ ）．

- A. 某顾客抽奖10次，一定能中奖1次
- B. 某顾客抽奖10次，可能1次也没中奖
- C. 某顾客消费210元，一定不能中奖
- D. 某顾客消费1000元，至少能中奖1次

答案 B

解析 中奖的概率为 $\frac{1}{10}$ ，

则抽奖一次可以中奖，抽奖10次也可能没有中奖．

故选B．

14 若某公司从五位大学毕业生甲、乙、丙、丁、戊中录用三人，这五人被录用的机会均等，则甲被录用的概率为（ ）．

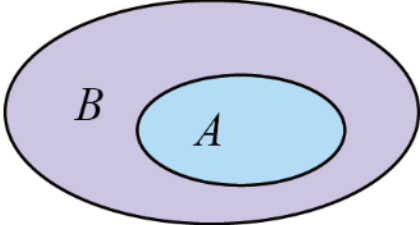
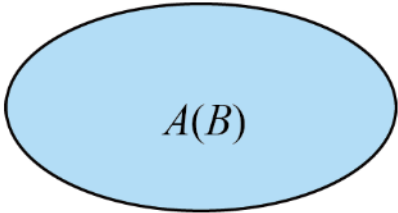
- A. $\frac{2}{3}$
- B. $\frac{2}{5}$
- C. $\frac{3}{5}$
- D. $\frac{9}{10}$

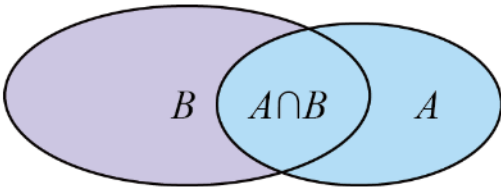
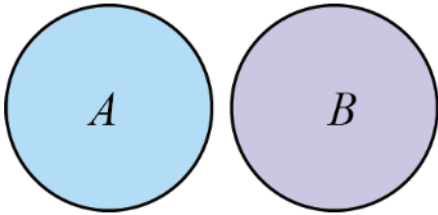
答案 C

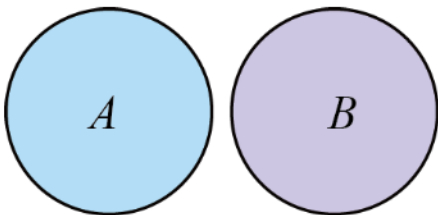
解析 每人录用等概率.

5人录用3人, 每人录用概率 $P = \frac{3}{5}$.

事件的关系与运算

事件的关系与运算	定义	与集合类比记忆
包含关系	当事件A发生时,事件B一定发生,这时称事件B包含事件A(或称事件A包含于事件B),记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$)	(1)与集合类比,B包含A,即 $A \subseteq B$; (2)不可能事件记为 $\emptyset$, $\emptyset \subseteq A$ 且 $\emptyset \subseteq B$; (3)事件A也包含于事件A,即 $A \subseteq A$ 
相等关系	如果事件A发生,那么事件B一定发生,反过来也对,这时称这两个事件相等,记作 $A=B$	若 $B \supseteq A$,且 $A \supseteq B$,则事件A与事件B相等 

事件的关系与运算	定义	与集合类比记忆
交(积)事件	当且仅当事件A发生且事件B发生时,事件C发生,则称事件C为事件A与事件B的交事件(或积事件),记作 $C = A \cap B$ (或 AB)	与集合类比,交事件相当于求交集 
互斥事件	两个集合的交集可能为空集,两个事件的交事件也可能为不可能事件,即 $A \cap B = \emptyset$,此时,称事件A与事件B互斥	事件A与事件B在任何一次试验中都不会同时发生 
对立事件	若 $A \cap B$ 为不可能事件, $A \cup B$ 为必然事件,则称事件A与事件B互为对立事件	事件A与事件B在任何一次试验中有且仅有一个发生 

事件的关系与运算	定义	与集合类比记忆
互斥事件	两个集合的交集可能为空集, 两个事件的交事件也可能为不可能事件, 即 $A \cap B = \emptyset$, 此时, 称事件A与事件B互斥	事件A与事件B在任何一次试验中都不会同时发生 
对立事件	若 $A \cap B$ 为不可能事件, $A \cup B$ 为必然事件, 则称事件A与事件B互为对立事件	事件A与事件B在任何一次试验中有且仅有一个发生 

【温馨提示】

互斥事件是不可能同时发生的事件, 但是可以同时不发生对立事件是特殊的互斥事件, 特殊在对立的示两个事件不可能都不发生, 即有且仅有一个发生.

事件“出现1点”与“出现3点”为互斥事件: 事件“出现奇数点”与“出现偶数点”互为对立事件



4. 例题精讲

15 判断下列每对事件是不是互斥事件.

- (1) 将一枚硬币抛两次, 记事件A: 两次都出现正面; 事件B: 没有一次出现正面;
- (2) 某人射击一次, 记事件A: 中靶; 事件B: 射中9环.
- (3) 某人射击一次, 记事件A: 射中环数大于5; 事件B: 射中环数小于5.

答案

- (1) 互斥事件 .
- (2) 不是互斥事件 .
- (3) 是互斥事件 .

解析

- (1) A 、 B 是互斥事件；解析：基本事件空间 $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$ ，而 $A = \{(\text{正}, \text{正})\}$ ， $B = \{(\text{反}, \text{反})\}$ 是互斥事件 .
- (2) A 、 B 不是互斥事件；解析：因为射中9环也是中靶，不是互斥事件 .
- (3) A 、 B 是互斥事件；解析：射中环数大于5与射中环数小于5不能同时发生，是互斥事件 .

16 某小组有3名男生和2名女生，从中任选2名学生参加演讲比赛，那么下列对立的两个事件是（ ） .

- A. “至少1名男生”与“至少1名女生”
- B. “至少1名男生”与“全是女生”
- C. “至少1名男生”与“全是男生”
- D. “恰好有1名男生”与“恰好有2名女生”

答案

B

解析

- A选项：若选出一男一女，则“至少1名男生”与“至少一名女生”可以同时发生， $\therefore$ 不对立，故A错误；
- B选项：对立，故B正确；
- C选项：若选出一男一女，则“至少1名男生”与“全是男生”可以同时发生， $\therefore$ 不对立，故C错误；
- D选项：若选出2男，则“恰好有1名男生”与“恰好有2名女生”都不发生，故D错误 .
- 故选B.

17 从一批产品中随机取出三件产品，设“三件产品都是正品为事件 A ” . “三件产品都是次品为事件 B ”，“三件产品中有次品为事件 C ”，则下列结论正确的是（ ） .

- A. 事件 A 与 C 为对立事件
- B. 事件 B 与 C 为互斥事件
- C. 事件 A, B, C 两两都是互斥事件
- D. 事件 A, B, C 两两都是对立事件

答案 A

解析

①事件 A ：{三件产品都是正品}.

②事件 B ：{三件产品都是次品}.

③事件 C ：{三件产品中有次品}，其中包括三个基本事件，分别为{一件次品，两件正品}，{两件次品，一件正品}，{三件次品}.

则 A 与 B 是互斥事件，但非对立事件.

A 与 C 是互斥事件，且是对立事件.

B 与 C 是包含关系，非互斥.

故选A.

18 某小组有3名男生和2名女生，从中任选2名同学去参加演讲比赛，事件“至少有一名女生”与事件“全是男生”（ ）.

- A. 是互斥事件，不是对立事件
- B. 是对立事件，不是互斥事件
- C. 既是互斥事件，也是对立事件
- D. 既不是互斥事件也不是对立事件

答案 C

解析

互斥事件是两个事件不包括共同的事件，对立事件首先是互斥的，两个事件之和是全集，本题两种都符合.

故选C.

19 从装有两个红球和三个黑球的口袋里任取两个球，那么互斥而不对立的两个事件是（ ）.

- A. “至少有一个黑球”与“都是黑球”
- B. “至少有一个黑球”与“至少有一个红球”

C. “恰好有一个黑球”与“恰好有两个黑球”

D. “至少有一个黑球”与“都是红球”

答案 C

解析 从装有两个红球和三个黑球的口袋里任取两个球，

在A中，“至少有一个黑球”与“都是黑球”能同时发生，不是互斥事件，故A错误；

在B中，“至少有一个黑球”与“至少有一个红球”能同时发生，不是互斥事件，故B错误；

在C中，“恰好有一个黑球”与“恰好有两个黑球”不能同时发生，

但能同时不发生，是互斥而不对立的两个事件，故C正确；

在D中，“至少有一个黑球”与“都是红球”是对立事件，故D错误．

故选C．

5. 课堂巩固

20 从装有2个红球和2个白球的口袋内任取2个球，是互斥事件的序号为 _____ ．

(1) 至少有1个白球；都是白球；(2) 至少有1个白球；至少有1个红球；(3) 恰有1个白球；恰有2个白球；(4) 至少有1个白球；都是红球．

答案 (3)、(4)

解析 (1) 如果都是白球，满足至少有一个白球，

∴(1) 不互斥；

(2) 当取的球一红一白，满足至少一个白球，也满足至少一个红球，

∴(2) 不互斥；

(3) ∵不可能取得的白球数既是1又是2，

∴(3) 互斥；

(4) ∵至少一个白球就不可能都是红球，

∴(4) 互斥．

故选(3)(4)．

21 同时掷三枚硬币，那么互为对立事件的是（ ）.

- A. 至少有一枚是正面和最多有一枚是正面 B. 最多有一枚是正面和恰有两枚是正面
C. 不多于一枚是正面和至少有两枚是正面 D. 至少有两枚是正面和恰好有一枚是正面

答案 C

解析 A中，两事件中有一枚是正面的情况可同时发生；

B中，两事件不能包含事件发生的所有情况；

D中，两事件不能包含事件发生的所有情况.

22 抛掷两枚硬币，设事件 A = “第一枚正面朝上”， B = “第二枚反面朝上”，则（ ）.

- A. 事件 A 和 B 互斥 B. 事件 A 和 B 互相对立
C. 事件 A 和 B 相互独立 D. 事件 A 和 B 相等

答案 C

解析 A选项：由于事件 A ， B 能同时发生，则事件 A ， B 不为互斥事件，故A错误；

B选项：由于事件 A ， B 能同时发生，则事件 A ， B 不为对立事件，故B错误；

C选项：第一枚正面朝上和第二枚反面朝上是相互独立事件，故C正确；

D选项：由于事件 A ， B 中有不同的样本点，则事件 A ， B 不相等，故D错误；

故选C.

23 把黑、红、白3张纸版分给甲、乙、丙三人，每人一张，则事件“甲分得黑牌”与“乙分得黑牌”是（ ）.

- A. 对立事件 B. 互斥但不对立事件 C. 不可能事件 D. 必然事件

答案 B

解析 把黑、红、白3张纸版分给甲、乙、丙三人，每人一张，

则事件“甲分得黑牌”与“乙分得黑牌”不能同时发生，能同时不发生，
故事件“甲分得黑牌”与“乙分得黑牌”是互斥但不对立事件。
故选B。

24 从装有2个红球和2个白球的口袋内任取2个球，那么互斥而不对立的两个事件是（ ）

- A. 至少有1个白球，都是白球 B. 至少有1个白球，至少有1个红球
C. 恰有1个白球，恰有2个白球 D. 至少有1个白球，都是红球

答案 C

解析 A选项：“至少有1个白球”包含“1个白球，1个红球”和“都是白球”，故A不对；
B选项：“至少有1个红球”包含“1个白球，1个红球”和“都是红球”，故B不对；
C选项：“恰有1个白球”发生时，“恰有2个白球”不会发生，且在一次实验中不可能必有一个发生，故C对；
D选项：“至少有1个白球”包含“1个白球，1个红球”和“都是白球”，与都是红球，是对立事件，故D不对。
故选C。

概率的基本性质

(1) 由于事件的频数总是小于或等于试验的次数，所以频率在0~1之间，从而任何事件的概率在0~1之间，即 $0 \leq P(A) \leq 1$ 。

(2) 在每次试验中，必然事件一定发生，因此它的频率为1，从而必然事件的概率为1。

(3) 在每次试验中，不可能事件一定不出现，因此它的频率为0，从而不可能事件的概率为0。

(4) 当事件A与事件B互斥时， $A \cup B$ 发生的频率等于A发生的频数与B发生的频数之和，从而 $A \cup B$ 的频率 $f_n(A \cup B) = f_n(A) + f_n(B)$ 。

由此得到概率的加法公式：

如果事件A与事件B互斥，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。

(5) 特别地，若事件B与事件A互为对立事件，则 $A \cup B$ 为必然事件， $P(A \cup B) = 1$ 。再由加法公式得 $P(A) = 1 - P(B)$ ， $P(B) = 1 - P(A)$ 。

(6) 如果事件 A 包含于事件 B , 即 $A \subseteq B$, 则有 $P(A) \leq P(B)$.

(7) 如果事件 A 、 B 为一个随机实验的两个事件, 则有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

【例题】如果从不包括大小王的52张扑克牌中随机抽取一张, 那么取到红心(事件 A)的概率是 $\frac{1}{4}$, 取到方片(事件 B)的概率是 $\frac{1}{4}$. 问:

取到红色牌(事件 C)的概率是多少?

取到黑色牌(事件 D)的概率是多少?

解: (1) 因为 $C = A \cup B$, 且 A 与 B 不会同时发生, 所以 A 与 B 是互斥事件.

根据概率的加法公式, 得 $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2}$.

(2) C 与 D 也是互斥事件, 又由于 $C \cup D$ 为必然事件, 所以 C 与 D 互为对立事件. 所以

$$P(D) = 1 - P(C) = \frac{1}{2}.$$

6. 例题精讲

25 设 A , B 是两个概率大于0的随机事件, 则下列论述正确().

- A. 事件 $A \subseteq B$, 则 $P(A) < P(B)$
- B. 若 A 和 B 互斥, 则 A 和 B 一定相互独立
- C. 若 A 和 B 相互独立, 则 A 和 B 一定不互斥
- D. $P(A) + P(B) \leq 1$

答案 C

解析

A. $A \subseteq B$, $\therefore P(A) \leq P(B)$,

$\therefore$ A错;

B. 若 A , B 互斥, $\therefore P(AB) = 0$,

又 $\because P(A) > 0, P(B) > 0$,

$\therefore P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$,

$\therefore A, B$ 一定不独立,

$\therefore$ B错;

C. 若 A 与 B 互相独立,

$\therefore P(AB) = P(A) \cdot P(B) > 0$,

$\therefore P(AB) \neq 0$,

$\therefore A, B$ 一定不互斥,

$\therefore C$ 对;

$D: P(A) + P(B)$ 也可能大于 1,

$\therefore D$ 错.

故选 C .

26 掷一枚骰子的试验中, 出现各点的概率均为 $\frac{1}{6}$, 事件 A 表示“出现小于 5 的偶数点”, 事件 B 表示“出现小于 5 的点数”, 则一次试验中, 事件 $A \cup \bar{B}$ ($\bar{B}$ 表示事件 B 的对立事件) 发生的概率为 _____.

答案 $\frac{2}{3}$

解析

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$P(\bar{B}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$P(A\bar{B})$ 指出现小于 5 点的偶数且不出现小于 5 的点数,

$\therefore P(A\bar{B}) = 0$,

$$P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 0$$

$$= \frac{2}{3}.$$

故答案为: $\frac{2}{3}$.

27 掷红、白两颗骰子, 事件 $A = \{\text{红骰子点数小于 } 3\}$, 事件 $B = \{\text{白骰子点数小于 } 3\}$, 则 $P(A \cap B) =$ _____, $P(A \cup B) =$ _____.

答案 1: $\frac{1}{9}$
2: $\frac{5}{9}$

解析

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

显然 A, B 独立.

$$\therefore P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{5}{9}.$$

28 甲、乙两人下棋，两人下成和棋的概率是 $\frac{1}{2}$ ，甲获胜的概率是 $\frac{1}{3}$ ，则甲不输的概率为（ ）.

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{2}{3}$

答案 B

解析 $\because$ 甲、乙两人比赛，两人平的概率是 $\frac{1}{2}$ ，甲获胜的概率是 $\frac{1}{3}$ ，

$$\therefore \text{甲不输的概率为 } P = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

故选 B.

29 某家庭中电话在家中有人时，打进的电话响第1声时被接起的概率为0.1，响第2声时被接起的概率为0.2，响第3声时被接起的概率为0.3，响第4声时被接起的概率为0.3，那么响第5声之前被接起的概率是多少.

答案 0.9.

解析 记“电话响第 i 声时被接起”为事件 A_i ($i = 1, 2, 3, 4$),

“电话响第5声之前被接起”为事件 A ,

由于 A_1, A_2, A_3, A_4 互斥,

$$\text{所以 } P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$$

$$= 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.3 = 0.9.$$

7. 课堂巩固

30 有下列四个命题：

- (1) 对立事件一定是互斥事件；
- (2) 若 A 、 B 为两个事件，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ；
- (3) 若 A 、 B 、 C 两两互斥，则 $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ ；
- (4) 事件 A 、 B 满足 $P(A) + P(B) = 1$ ，则 A 、 B 是对立事件。

其中错误的命题个数是 ()。

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

答案 D

解析 只有 (1) 正确，(2) 中 A 、 B 为互斥事件才能成立，

(3) 中 $P(A) + P(B) + P(C) \leq 1$ ，(4) 中 A 、 B 为互斥事件才能成立。

31 设 A 、 B 为两个互斥的事件，且 $P(A) > 0$ ， $P(B) > 0$ ，则下列各式错误的是 ()。

- A. $P(AB) = 0$ B. $P(AB) = P(A)P(B)$
C. $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$ D. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

答案 B

解析 AB ：∵ A 、 B 互斥，所以 $AB = \emptyset$ ，即 $P(AB) = 0$ ，故 A 正确，B 错误；

C： $\bar{A} \cup \bar{B}$ 是必然事件，故 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1$ ，故 C 正确；

D：∵ A 、 B 互斥，故 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ，故 D 正确。

故选 B。

32 抛掷一枚质地均匀的骰子，记事件 A 为“向上的点数是偶数”，事件 B 为“向上的点数不超过 3”，则概率 $P(A \cup B) = ()$ 。

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

答案 D

解析

$$\begin{aligned} \text{方法一: } P(A) &= \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{1}{6}, \\ \therefore P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

方法二：抛掷一枚质地均匀的骰子，记事件 A 为“向上的点数是偶数”，事件 B 为“向上的点数不超过3”，基本事件总数 $n=6$ ， $A \cup B$ 包含的基本事件个数1, 2, 3, 4, 6，则概率

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}, \text{ 故选: D.}$$

33 有6个零件，其中4个一等品，2个二等品，若从这6个零件中任取2个，其中至少有1个一等品的概率是 _____ .

答案

$$\frac{14}{15}$$

解析

先找出“至少有1个一等品”的对立事件为“2件都是二等品”，

$$\text{“2件都是二等品”的概率为 } \frac{2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{1}{15},$$

$$\therefore \text{“至少有1个一等品”的概率为 } 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}.$$

34 某产品分甲、乙、丙三级，其中乙、丙两级均属次品，若生产中出现乙级品的概率为0.04，出现丙级品的概率为0.01，则对成品抽查一件抽得正品的概率为 _____ .

答案

$$0.95$$

解析

记“生产中出现甲级品、乙级品、丙级品”分别为事件 A 、 B 、 C ，则 A 、 B 、 C 互斥，由题意得

$$P(B) = 0.04, P(C) = 0.01, \text{ 所以 } P(A) = 1 - P(B) - P(C) = 1 - 0.04 - 0.01 = 0.95.$$

三、古典概型

1. 知识讲解

基本事件

【例1】我们考察下面两个试验并分析其构成：

- (1) 掷一枚质地均匀的硬币的试验；
- (2) 掷一枚质地均匀的骰子的试验。

【分析与解】

在试验(1)中，所有可能的试验结果只有两个，即“正面朝上”或“反面朝上”，它们都是随机事件；

在试验(2)中，所有可能的试验结果只有六个，即出现“1点”、“2点”、“3点”、“4点”、“5点”以及“6点”，它们也都是随机事件。我们把这类随机事件称为**基本事件**。

基本事件的特点

- (1) 任何两个基本事件是互斥的；
- (2) 任何事件（除不可能事件）都可以表示成基本事件的和。

相对于基本事件，由两个以上基本事件组成的随机事件称为复杂事件。如对于试验(2)，掷得的点数为偶数就是复杂事件，它包含了三个基本事件。

【例2】从字母 a, b, c, d 中任意取出两个不同字母的试验中，有哪些基本事件？

【分析与解】

为了得到基本事件，我们可以按照某种顺序，把所有可能的结果都列出来。

所求的基本事件共有6个：

$$A = \{a, b\}, B = \{a, c\}, C = \{a, d\}, D = \{b, c\}, E = \{b, d\}, F = \{c, d\}.$$

古典概型的概念

通过分析我们发现：

【例1】和【例2】有如下两个共同特点：

- (1) 试验中所有可能出现的基本事件只有有限个；
- (2) 每个基本事件出现的可能性相等。

我们将具有上述两个特点的概率模型称为古典概率模型，简称**古典概型**。

古典概型的特点

(1) **有限性**：在一次试验中，可能出现的结果只有有限个，即只有有限个不同的基本事件。

(2) **等可能性**：每个基本事件发生的可能性是均等的。

借助于古典概型的上述两个基本特征，那么求一些指定事件的概率就无需通过大量的重复试验，而只需要通过对一次试验中可能出现的结果进行分析和计算即可。



古典概型的概率公式

如果一次试验中可能出现的结果有 n 个，而且所有结果出现的可能性都相等，那么每一个基本事件的概率都是 $\frac{1}{n}$ ；如果事件 A 包含的基本事件有 m 个，那么事件 A 发生的概率为：

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

【补充说明】

(1) 用古典概型计算概率时，一定要验证所构造的基本事件是否满足古典概型的第二个特征（等可能性），否则计算出的概率是错误的。

(2) 求取古典概型下的概率的关键是确定两个数字 m, n ，目前我们确定 m, n 的最常用手段是枚举法。后期我们还会学习更高效的方法。

2. 例题精讲

35 从自然数1, 2, 3, 4, 5中，任意取出两个数组成两位的自然数，则从两位自然数中取出的恰好能被3整除的概率为（ ）。

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{3}{10}$

D. $\frac{1}{2}$

答案 A

解析 从自然数1, 2, 3, 4, 5中，任意取出两个数组成两位的自然数，共有 $5 \times 4 = 20$ 种，两位自然数中取出的数恰好能被3整除有12, 21, 15, 51, 24, 42, 45, 54，则能被3整除的概率为 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ ，故选A。

36 盒子中装有编号为1, 2, 3, 4, 5, 6的6个球，从中任意取出2个，则这2个球的编号之和为偶数的概率是 _____。

答案 $\frac{2}{5}$

解析 从6个球中任意取出2个，共有 $C_6^2 = 15$ 种可能，若2个球的编号之和为偶数，则取出2个球的编号都是奇数或都是偶数，共有 $C_3^2 + C_3^2 = 6$ 种可能，故2个球编号之和为偶数的概率是 $P = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

37 袋中有2个白球，2个黑球，从中任意摸出2个（每个小球被摸到是等可能的），则至少摸出1个黑球的概率是（ ） .

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{3}$

答案 B

解析 由题意知本题是一个等可能事件的概率，
试验发生所包含的事件从口袋中装有大小相同的2个黑球2个白球的口袋中摸出两个球，共有 $C_4^2 = 6$ 种结果，
满足条件的事件是取出的球中至少有一个黑球包括有一白一黑和两个黑球两种情况，共有 $C_2^1 C_2^1 + C_2^2 = 5$,
故取出的两个球中至少有一个白球的概率 $P = \frac{5}{6}$.
故选B .

38 有3个兴趣小组，甲、乙两位同学各自参加其中一个小组，每位同学参加各个小组的可能性相同，则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为（ ） .

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

答案 A

解析 记3个兴趣小组分别为1, 2, 3，如甲参加1组记为“甲1”，则所有基本事件为{甲1, 乙1}, {甲1, 乙2}, {甲1, 乙3}, {甲2, 乙1}, {甲2, 乙2}, {甲2, 乙3}, {甲3, 乙1}, {甲3, 乙2}, {甲3, 乙3}，共9个 . 记事件A为“甲、乙两位同学参加同一个兴趣小组”，事件A包含{甲1, 乙1}, {甲2, 乙2}, {甲3, 乙3}，共3个 .

$\}$, $\{\text{甲}2, \text{乙}2\}$, $\{\text{甲}3, \text{乙}3\}$, 共3个基本事件. 因此 $P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

故A正确,

故选A.

39 甲、乙两校各有3名教师报名支教, 其中甲校2男1女, 乙校1男2女.

若从甲校和乙校报名的教师中各任选1名, 写出所有可能的结果, 并求选出的2名教师的性别相同的概率;

答案 $\frac{4}{9}$.

解析 甲校两名男教师分别用A、B表示, 女教师用C表示;

乙学校男教师用D表示, 两名女教师分别用E、F表示.

从甲校和乙校报名的教师中各任选1名的所有可能结果为

(A, D) , (A, E) , (A, F) , (B, D) , (B, E) , (B, F) , (C, D) , (C, E) , (C, F) , 共9种.

从中选出的2名教师性别相同的结果为 (A, D) , (B, D) , (C, E) , (C, F) , 共4种.

故选出的2名教师的性别相同的概率为 $\frac{4}{9}$.

40 有7位歌手(1至7号)参加一场歌唱比赛, 由550名大众评委现场投票决定歌手名次, 根据年龄将大众评委分为5组, 各组的人数如下:

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	200	150	50

(1) 为了调查大众评委对7位歌手的支持状况, 现用分层抽样方法从各组中抽取若干评委, 其中从B组中抽取了6人. 请将其余各组抽取的人数填入下表.

组别	A	B	C	D	E
人数	50	100	200	150	50
抽取人数		6			

(2) 在(1)中, 若A, E两组被抽到的评委中各有2人支持1号歌手, 现从这两组被抽到的评委中分别任选1人.

(

- ④ 写出这个试验的样本空间 Q .
- ② 设 M 为事件“这2人至少有一人支持1号歌手”，求事件 M 发生的概率，

答案

- (1) $A : 3, C : 12, D : 9, E : 3$.
- (2) ① $(A_1, E_1), (A_1, E_2), (A_1, E_3)$
 $(A_2, E_1), (A_2, E_2), (A_2, E_3)$
 $(A_3, E_1), (A_3, E_2), (A_3, E_3)$.
- ② $\frac{8}{9}$.

解析

- (1) $\frac{6}{100} = 0.06$,
 $A : 50 \times 0.06 = 3$,
 $C : 200 \times 0.06 = 12$,
 $D : 150 \times 0.06 = 9$,
 $E : 50 \times 0.06 = 3$.
- (2) ① 设 A 中3人为 A_1, A_2, A_3 , E 中3人为 E_1, E_2, E_3 .
 $(A_1, E_1), (A_1, E_2), (A_1, E_3)$
 $(A_2, E_1), (A_2, E_2), (A_2, E_3)$
 $(A_3, E_1), (A_3, E_2), (A_3, E_3)$.
- ② 均不支持1号的概率： $\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9}$,
 $\therefore$ 至少1人支持1号的概率为： $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

3. 课堂巩固

- 41 从1, 2, 3, 4中选取两个不同数字组成两位数，则这个两位数能被4整除的概率为 () .
- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{12}$

答案

B

解析

1, 2, 3, 4能组成的2位数有 $4 \times 3 = 12$ 种，其中被4整除的有12, 24, 32共3种，
 $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

故选B.

42 从1, 2, 3, 4, 5这5个数中, 随机抽取2个不同的数, 则这2个数的和为奇数的概率是().

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

答案 C

解析 从5个数中随机抽取2个不同的数, 共有10种不同的抽取方法, 而两数的和为奇数则必然一奇一偶, 共有6种不同的抽取方法, 所以两个数的和为奇数的概率 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

故选C.

43 一个袋子中装有大小和质地相同的3个红球和2个白球, 若从中任取2个球, 则这2个球中红球和白球各有1个的概率为().

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{3}{5}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

答案 B

解析 由题意可知, 从中抽取2个球, 这两个球中红球和白球各有1个的概率 $P = \frac{C_3^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

故选B.

44 为美化环境, 从红、黄、白、紫4种颜色的花中任选2种花种在一个花坛中, 余下的2种花种在另一个花坛中, 则红色和紫色的花不在同一花坛的概率是().

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{5}{6}$

答案 C

解析

方法一：选取的所有可能情况为（红，黄）、（红，白）、（红，紫）、（黄，白）、（黄，紫）、（白，紫），共6种，

红、紫在一个花坛的可能情况为（红，紫）、（黄，白）有2种，

所以，所求概率为 $1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$ ；

也可用直接法，红、紫不在一个花坛的可能情况为（红，黄）、（红，白）、（黄，紫）、（白，紫），有4种

所以，所求概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，

方法二：从红、黄、白、紫4种颜色的花中任选2种花种在一个花坛中，余下的2种花种在另一个花坛中，有 $C_4^2 = 6$ 种方法，红色和紫色的花在同一花坛，有2种方法，红色和紫色的花不在同一花坛，有4种方法，所以所求的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 。

45 甲、乙两校各有3名教师报名支教，其中甲校2男1女，乙校1男2女。

若从报名的6名教师中任选2名，写出所有可能的结果，并求选出的2名教师来自同一学校的概率。

答案 $\frac{2}{5}$ 。

解析 从甲校和乙校报名的6名教师中任选2名，所有可能的结果为
 $(A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F), (B, C), (B, D), (B, E),$
 $(B, F), (C, D), (C, E), (C, F), (D, E), (D, F), (E, F)$ ，共15种。

从中选出的2名教师来自同一学校的结果为

$(A, B), (A, C), (B, C), (D, E), (D, F), (E, F)$ ，共6种。

故选出2名教师来自同一学校的概率为 $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ 。

46 已知某区甲、乙、丙三所学校的教师志愿者人数分别为240，160，80。为助力疫情防控，现采用分层抽样的方法，从这三所学校的教师志愿者中抽取6名教师，参与“抗击疫情·你我同行”下卡口执勤值守专项行动。

(1) 求应从甲、乙、丙三所学校的教师志愿者中分别抽取的人数。

(2)

设抽出的6名教师志愿者分别记为 A, B, C, D, E, F ，现从中随机抽取2名教师志愿者承担测试体温工作。

- ① 试用所给字母列举出所有可能的抽取结果。
- ② 设 M 为事件“抽取的2名教师志愿者来自同一所学校”，求事件 M 发生的概率。

答案

- (1) 3人，2人，1人。
- (2) ① $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{D, E\}, \{D, F\}, \{E, F\}$ 。
② $\frac{4}{15}$ 。

解析

- (1) 由已知得甲、乙、丙三个学校的学生志愿者人数之比为 $3:2:1$ ，由于采用分层抽样的方法从中抽取6名同学， $\therefore$ 应从甲、乙、丙三个学校的学生志愿者中分别抽取3人，2人，1人。
- (2) ① (1)从抽取的6名同学中抽取2名同学的所有可能结果为
 $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{A, E\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{B, E\}, \{B, F\}, \{C, D\}, \{C, E\}, \{C, F\}, \{D, E\}, \{D, F\}, \{E, F\}$ ，共15个。
② 设抽取的6名学生中，来自甲学校的是 A, B, C ，来自乙学校的是 D, E ，来自丙学校的是 F ， M 为事件“抽取的2名同学来自同一学校”，则事件 M 包含的基本事件有 $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{D, E\}$ ，共4个基本事件，
 $\therefore$ 事件 M 发生的概率 $P(M) = \frac{4}{15}$ 。

四、相互独立事件

1. 知识讲解



相互独立事件

①相互独立事件的定义：如果事件 A (或 B)是否发生对事件 B (或 A)发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件。

②一般地，当事件 A 与 B 相互独立时，事件 A 与 $\bar{B}$ ， $\bar{A}$ 与 B ， $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也都是相互独立的.



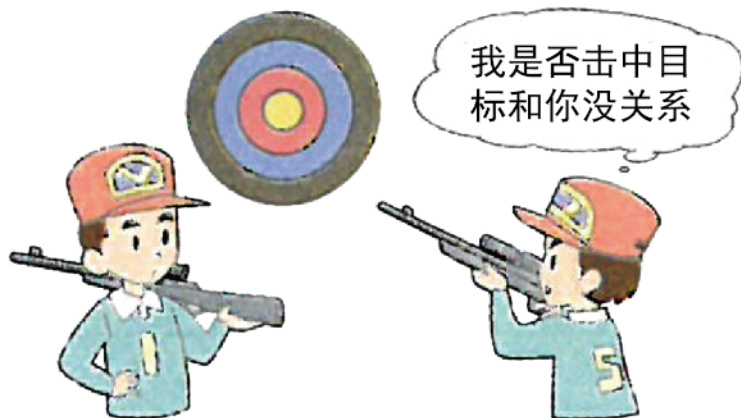
相互独立事件的概率

相互独立事件同时发生的概率：对于事件 A 和事件 B ，用 AB 表示事件 A 与 B 同时发生.

如果事件 A 与 B 相互独立，那么事件 AB 发生的概率等于每个事件发生的概率的积，即

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

推广：一般地，如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件同时发生的概率等于每个事件发生的概率的积，即 $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n)$.



2. 例题精讲

47 同一天内，甲地下雨的概率是0.15，乙地下雨的概率是0.12，假定在这天两地是否下雨相互之间没有影响，那么甲、乙两地都不下雨的概率是（ ）.

A. 0.102

B. 0.697

C. 0.748

D. 0.982

答案

C

解析

记甲地下雨为事件 A ，乙地下雨为事件 B ，易得 $P(A) = 0.15$ ， $P(B) = 0.12$ 且 A 、 B 相互独立，

$$\text{则 } P(\bar{A}) = 1 - 0.15 = 0.85, P(\bar{B}) = 1 - 0.12 = 0.88,$$

$$\text{则甲、乙两地都不下雨的概率 } P(\bar{A}\bar{B}) = 0.85 \times 0.88 = 0.748,$$

故选C.

答案 D

解析 三人都不达标的概率是：

$$(1 - 0.9) \times (1 - 0.8) \times (1 - 0.75) = 0.005 ,$$

所以三人中至少有一人达标的概率是：

$$1 - 0.005 = 0.995 .$$

故选D .

51 甲、乙两人独立地解决同一问题，甲解出此问题的概率是 $\frac{2}{3}$ ，乙解出此问题的概率是 $\frac{4}{5}$ ，求：

- (1) 甲、乙都解出此问题的概率 .
- (2) 甲、乙都未解出此问题的概率 .
- (3) 甲、乙恰有一人解出此问题的概率 .
- (4) 至少有一人解出此问题的概率 .

答案

- (1) $\frac{8}{15}$.
- (2) $\frac{1}{15}$.
- (3) $\frac{2}{5}$.
- (4) $\frac{14}{15}$.

解析

(1) 设事件A为甲解决此问题， $P(A) = \frac{2}{3}$ ，

事件B为乙解决此问题， $P(B) = \frac{4}{5}$ ，

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} .$$

(2) $P(\overline{AB}) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{15}$.

(3) $P = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B)$

$$= P(A) \cdot [1 - P(B)] + [1 - P(A)] \cdot P(B)$$

$$= \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{6}{15} = \frac{2}{5} .$$

(4) $P = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$.

3. 课堂巩固

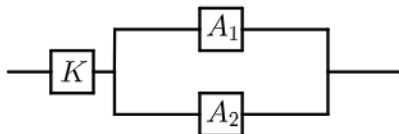
52 当开关 S_1 与 S_2 同时断开时电路断开. 设 S_1 、 S_2 断开的概率分别为0.5和0.7, 且各个开关相互独立. 则电路为断开的概率是().

- A. 0.35 B. 0.15 C. 0.65 D. 0.85

答案 A

解析 $\because S_1, S_2$ 断开的概率分别为0.5和0.7, 且各个开关相互独立,
 $\therefore$ 电路断开的概率为: $0.5 \times 0.7 = 0.35$, 故选A.

53 如图, 用 K 、 A_1 、 A_2 三类不同的元件连接成一个系统. 当 K 正常工作且 A_1 、 A_2 至少有一个正常工作时, 系统正常工作, 已知 K 、 A_1 、 A_2 正常工作的概率依次为0.9、0.7、0.8, 则系统正常工作的概率为 _____.



答案 0.846

解析 根据题意, 记 K 、 A_1 、 A_2 正常工作分别为事件 A 、 B 、 C ,
 则 $P(A) = 0.9$,
 A_1 、 A_2 至少有一个正常工作的概率为: $1 - P(\overline{B})P(\overline{C}) = 1 - 0.3 \times 0.2 = 0.94$,
 则系统正常工作的概率为 $0.9 \times 0.94 = 0.846$.
 故答案为: 0.846.

54 甲、乙两人参加歌唱比赛, 晋级概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$, 且两人是否晋级相互独立, 则两人中恰有一人晋级的概率为().

- A. $\frac{19}{20}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{7}{20}$

答案 D

解析 甲、乙两人参加歌唱比赛，晋级概率分别为 $\frac{4}{5}$ 和 $\frac{3}{4}$ ，且两人是否晋级相互独立，故有甲晋级乙不能晋级的概率为 $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4}$ ，则两人中恰有一人晋级的概率为 $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$ 。所以D选项是正确的。故选D。

55 一名工人维护3台独立的游戏机，一天内3台游戏机需要维护的概率分别为0.9、0.8和0.75，则一天内至少有一台游戏机不需要维护的概率为（ ）。

- A. 0.995 B. 0.54 C. 0.46 D. 0.005

答案 C

解析 三台游戏机都需要维护的概率为 $0.9 \times 0.8 \times 0.75 = 0.54$ 。故至少有一台游戏机不需要维护的概率 $1 - 0.54 = 0.46$ 。故选：C。

56 在一次猜灯谜活动中，共有20道灯谜，两名同学独立竞猜，甲同学猜对了12个，乙同学猜对了8个。假设猜对每道灯谜都是等可能的，试求：

- (1) 任选一道灯谜，恰有一个人猜对的概率。
- (2) 任选一道灯谜，甲、乙都没有猜对的概率。

答案 (1) $\frac{13}{25}$ 。
(2) $\frac{6}{25}$ 。

解析 (1) 甲猜对的概率为 $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ ，
∴甲猜错的概率为 $\frac{2}{5}$ ，
乙猜对的概率为 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ ，

$\therefore$ 乙猜对的概率为 $\frac{3}{5}$.

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{13}{25} .$$

$$(2) \quad \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25} .$$

五、综合应用

57 袋中有大小相同，质地均匀的2个红球和3个黄球，从中无放回的先后取两个球，取到红球的概率为 () .

A. $\frac{1}{10}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{7}{10}$

D. $\frac{3}{5}$

答案 C

解析 若未取到红球的概率为 $\frac{3 \times 2}{5 \times 4} = \frac{3}{10}$,

$\therefore$ 取到红球的概率为 $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$,

故选C .

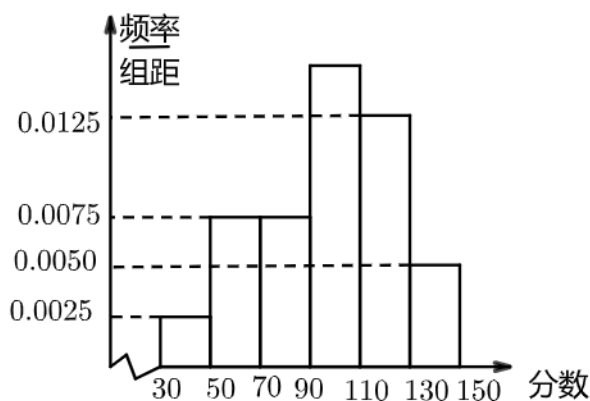
58 电视台组织中学生知识竞赛，共设有5个板块的试题，主题分别是“中华诗词”“社会主义核心价值观”“依法治国理念”，“中国戏剧”，“创新能力”，某参赛队从中任选2个主题作答，则“社会主义核心价值观”主题被该队选中的概率是 _____ .

答案 $\frac{2}{5}$

解析 “社会主义核心价值观”未被选中的概率： $\frac{4 \times 3}{5 \times 4} = \frac{3}{5}$,

$\therefore$ “社会主义核心价值观”被选中的概率为 $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

59 为了选拔2019年全国高中数学联赛决赛考试的学生，成都实验外国语学校组织了自主选拔考试，共有200名学生参加，所有学生的成绩均在[30,150)内，其频率分布直方图如图所示 .



- (1) 求分数在 $[90, 110)$ 内的学生人数，并估计这200名学生成绩的平均分；（以各组区间中点值代表该组的取值）。
- (2) 因该校参加决赛的名额只有60名，选拔规则是取分数排在前60名的学生，但此次考试分数从高到低排在第59位的学生共有5名（这5名学生的分数相同，学生甲在其中）若从这5名学生中随机选2人进入决赛，求甲被选中的概率。

答案

- (1) 97 .
- (2) $\frac{2}{5}$.

解析

- (1) 由题意，分数在 $[90, 110)$ 内的频率为

$$1 - 20 \times (0.0025 + 0.0075 \times 2 + 0.0125 + 0.005) = 0.3 ,$$

$$\therefore \text{分数在}[90, 110)\text{内的学生人数为 } 200 \times 0.3 = 60 .$$

$\therefore$ 这200名学生成绩的平均分为

$$20 \times (40 \times 0.0025 + 60 \times 0.0075 + 80 \times 0.0075 + 100 \times 0.015 + 120 \times 0.0125 + 140 \times 0.005) = 97$$

- (2) 记从这5名学生中随机选2人进入决赛，甲被选中为事件 M ，

设排在第59位的五个学生依次为甲， A ， B ， C ， D 。

从这五个学生中随机选两个情形有： $(\text{甲}, A)$ ， $(\text{甲}, B)$ ， $\dots$ ， (C, D) ，共10种。

包含甲在内的情形有： $(\text{甲}, A)$ ， $(\text{甲}, B)$ ， $(\text{甲}, C)$ ， $(\text{甲}, D)$ ，共4种，

$$\therefore \text{所求概率 } P(M) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} .$$

60 10件产品中有4件一等品，6件二等品，从中随机取出两件。

- (1) 用适当的符号表示抽样的可能结果，列举试验的样本空间。

(2) 求这两件产品中有一等品的概率 .

答案

(1) $\Omega = \{(a_i, a_j) | i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}, i \neq j\}$.

(2) $\frac{2}{3}$.

解析

(1) 首先对10件产品进行编号 ,

例如 , 4件一等品编号为 a_1, a_2, a_3, a_4 , 6件二等品编号为 $a_5, \dots, a_{10}$,

则样本空间为 $\Omega = \{(a_i, a_j) | i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}, i \neq j\}$.

(2) 方法一 : 设 A = “两件产品中有一等品” , A_1 = “第一件产品为一等品” , A_2 = “第二件产品为一等品” ,

则 $A = A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2 + A_1 A_2$,

且 $A_1 \overline{A_2}$, $\overline{A_1} A_2$, $A_1 A_2$ 两两互斥 .

因为 $n(\Omega) = 10 \times 9 = 90$, $n(A_1 A_2) = 4 \times 3 = 12$, $n(A_1 \overline{A_2}) = 4 \times 6 = 24$,

$n(\overline{A_1} A_2) = 6 \times 4 = 24$, $n(\overline{A_1} \overline{A_2}) = 6 \times 5 = 30$,

所以由互斥事件的概率加法公式 ,

得 $P(A) = P(A_1 \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} A_2) + P(A_1 A_2) = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} + \frac{12}{90} = \frac{2}{3}$.

方法二 : 因为事件 A 的对立事件为 $\overline{A_1 A_2}$,

所以 $P(A) = 1 - P(\overline{A_1 A_2}) = 1 - \frac{30}{90} = \frac{2}{3}$.

方法三 : 因为 $A = A_1 \cup A_2$, A_1 和 A_2 不互斥 ,

所以 $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \frac{4}{10} + \frac{4}{10} - \frac{12}{90} = \frac{2}{3}$.