

复数

一、复数的定义

1. 知识讲解

数系的扩充

为了解决 $x^2 + 1 = 0$ 这样的方程在实数系中无解的问题，我们设想引入一个新数 i ，使 i 是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的根，即使 $i \cdot i = -1$ ，把这个新数 i 添加到实数集中去，得到一个新数集，记作 A ，那么方程 $x^2 + 1 = 0$ 在 A 中就有解 $x = i$ 了，由于 i 并非实根，我们将其定义为虚根，仿照实数系中以 1 为度量单位一样，进一步称其为虚根单位。

按照我们的研究需要并配合数系扩充的原则，以 1 和 i 为基元，形如其线性组合

$a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 一定也在数集 A 中，所以实数系经过扩充后得到的新数集应该是

$$\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}.$$

复数的概念

我们把集合 $\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ 中的数，即形如 $a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的数叫做**复数**，全体复数所组成的集合 $\mathbf{C}$ 叫做**复数集**。

复数的周期

(1) 它的平方等于 -1 ，即 $i^2 = -1$ ；

(2) 实数可以与它进行四则运算，进行四则运算时，原有加、乘运算律仍然成立。

(3) i 与 -1 的关系: i 就是 -1 的一个平方根，即方程 $x^2 = -1$ 的一个根，方程 $x^2 = -1$ 的另一个根是 $-i$ 。

(4) i 的周期性: $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$, $i^{4n} = 1$ 。

复数的代数形式

复数通常用字母 z 表示，即 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$)，这一表示形式叫做**复数的代数形式**。

对于复数 $z = a + bi$ ，以后不作特殊说明，都有 $a, b \in \mathbf{R}$ ，其中的 a 与 b 分别叫做复数 z 的**实部**与**虚部**。



复数相等的充要条件

在复数集 $\mathbf{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbf{R}\}$ 中任取两个数 $a + bi, c + di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$,

我们规定： $a + bi$ 与 $c + di$ 相等的充要条件是 $a = c$ 且 $b = d$ 。



复数的分类

对于复数 $a + bi$ ，当且仅当 $b = 0$ 时，它是**实数**；

当 $b \neq 0$ 时，叫做**虚数**；

当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时，叫做**纯虚数**。

2. 例题精讲

1

$(1 - \sqrt{3})i$ 的实部为 ()

A. 1

B. $-\sqrt{3}$

C. $1 - \sqrt{3}$

D. 0

答案

D

解析

由复数的定义可知选 D。

2

若复数 $(m^2 - 5m - 6) + (m^2 + 4m + 3)i = 0$ ，则实数 m 的值是 ()

A. -3 或 -1

B. 6 或 -1

C. -3

D. -1

答案

D

解析

由复数相等的充要条件，得 $\begin{cases} m^2 + 4m + 3 = 0, \\ m^2 - 5m - 6 = 0, \end{cases} \begin{cases} m^2 - 3m + 1 = 5, \\ m^2 - 5m - 6 = 0, \end{cases}$ 解得 $m = -1$ 。

3

已知复数 $z = (a^2 - 1) + (a - 2)i (a \in \mathbf{R})$ ，则“ $a = 1$ ”是“ z 为纯虚数”的 ()。

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 非充分非必要条件

答案 A

解析 为纯虚数等价于 $\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ a - 2 \neq 0 \end{cases}$, 即 $a = \pm 1$, 故“ $a = 1$ ”是“ z 为纯虚数”的充分非必要条件, 选择A.

4 设复数 $z = \lg(m^2 - 2m - 2) + (m^2 + 3m + 2)i$, 问当实数 m 为何值时:

(1) z 是实数?

(2) z 是纯虚数?

答案 (1) $m = -1$ 或 -2

(2) $m = 3$

解析 (1) 要使复数 z 为实数, 需要满足 $\begin{cases} m^2 - 2m - 2 > 0 \\ m^2 + 3m + 2 = 0 \end{cases}$,

解得 $m = -1$ 或 -2 . $\therefore$ 当 $m = -1$ 或 -2 时, z 是实数.

(2) 要使复数 z 为实数, 需要满足 $\begin{cases} m^2 - 2m - 2 = 1 \\ m^2 + 3m + 2 \neq 0 \end{cases}$,

解得 $m = 3$. $\therefore$ 当 $m = 3$ 时, z 是纯虚数.

5 $i^{4n+1} + i^{4n+3} = \underline{\hspace{2cm}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)

答案 0

解析 利用周期性.

3. 课堂巩固

6 复数 $z = 2 - 3i$ 的虚部为 ().

A. -3

B. 3

C. 2

D. $-3i$

答案 A

解析 $z = 2 - 3i$, 虚部为 -3 .

故选: A.

7 已知 $a - 1 + 2ai = -4 + 4i$, 求复数 a .

答案 $a = 1 + 2i$

解析 设 $a = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $x + yi - 1 + 2(x + yi)i = -4 + 4i$,

$$\therefore x - 2y - 1 + (2x + y)i = -4 + 4i,$$

$$\text{由复数相等的充要条件, 得 } \begin{cases} x - 2y - 1 = -4, \\ 2x + y = 4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

$$\therefore a = 1 + 2i.$$

8 设 $a, b \in \mathbf{R}$, “ $a = 0$ ”是“复数 $a + bi$ 是纯虚数”的 () .

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

答案 B

解析 当 $a = 0$ 时, 如果 $b = 0$, 此时 $a + bi = 0$ 是实数, 不是纯虚数, 因此不是充分条件;

而如果 $a + bi$ 已经是纯虚数, 由定义实部为零, 虚部不为零可以得到 $a = 0$, 因此是必要条件,

故选 B

9

设 $z = (m^2 - 5m - 6) + (m^2 - 2m - 3)i$ ($m \in \mathbf{R}$) , 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, z 为实数; 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, z 为纯虚数.

答案 1: -1或3

2: 6

10 若 i 是虚数单位, 则 $i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 8i^8 = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $4 - 4i$

解析 $i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 8i^8 = (-2 + 4 - 6 + 8) + i \cdot (1 - 3 + 5 - 7) = 4 - 4i$

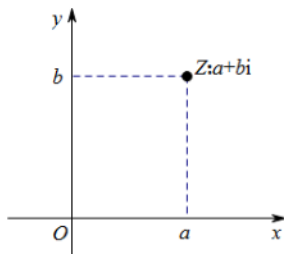
二、复数几何意义

1. 知识讲解



复数的坐标意义

根据复数相等的定义, 任何一个复数 $z = a + bi$ 都可以由一个有序实数对 (a, b) 唯一确定. 因为有序实数对 (a, b) 与平面直角坐标系中的点一一对应, 所以复数集与平面直角坐标系中的点集之间可以建立一一对应. 如下图:



点 Z 的横坐标是 a , 纵坐标是 b , 复数 $z = a + bi$ 可用点 $Z(a, b)$ 表示, 这个建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面, x 轴叫做实轴, y 轴叫做虚轴. 显然, 实轴上的点都表示实数; 除了原点外, 虚轴上的点都表示纯虚数.

按照这种表示方法，每一个复数，有复平面内唯一的一个点和它对应；反过来，复平面内的每一个点，有唯一的一个复数和它对应．由此可知，复数集 $\mathbf{C}$ 和复平面内所有的点所成的集合是——对应的，即：

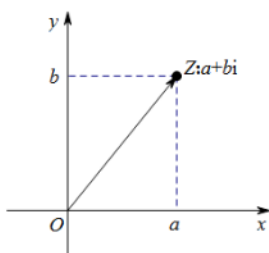
$$\text{复数 } z = a + bi \leftrightarrow \text{复平面内的点 } Z(a, b)$$

这是复数的一种几何意义．



复数的向量表示

在平面直角坐标系中，每一个平面向量都可以用一个有序实数对来表示，而有序实数对与复数是——对应的，这样根据传递性，我们还可以用平面向量来表示复数．如下图：



设复平面内的点 Z 表示复数 $z = a + bi$ ，连接 OZ ，显然向量 $\overrightarrow{OZ}$ 由点 Z 唯一确定；反过来，点 Z （相对于原点来说）也可以由向量 $\overrightarrow{OZ}$ 唯一确定．因此，复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面内的向量所成的集合也是——对应的（实数 0 与零向量对应，）即：

$$\text{复数 } z = a + bi \leftrightarrow \text{平面向量 } \overrightarrow{OZ}$$

这是复数的另一种几何意义．

为方便起见，我们常把复数 $z = a + bi$ 说成点 Z 或说成向量 $\overrightarrow{OZ}$ ，显然，相等的向量表示同一个复数．



复数的模

向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模 r 叫做复数 $z = a + bi$ 的模，记作 $|z|$ 或 $|a + bi|$ ，

由模的定义可知： $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ．

2. 例题精讲

11

设 $(1 + i)x = 1 + yi$ ，其中 x, y 是实数，则 $|x + yi| = (\quad)$ ．

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

答案 B

解析 由 $(1+i)x = 1+yi$ 可知: $x+xi = 1+yi$, 故 $\begin{cases} x=1 \\ x=y \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

所以 $|x+yi| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$.

故选B.

12 复数 $z = 4 - 2i$ (i 是虚数单位) 在复平面内对应的点位于 ().

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

答案 D

解析 $\because 4 > 0, -2 < 0$,

$\therefore$ 复数 $z = 4 - 2i$ 在复平面内对应的点位于第四象限.

故选D.

13 复数 z 对应的点在第二象限, 则 $z + i^2$ 对应的点在 ().

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

答案 B

解析 不妨设 $z = -a + bi$ ($a > 0, b > 0$),

$\therefore z + i^2 = -a + bi - 1 = (-a - 1) + bi$,

$\therefore -a - 1 < 0, b > 0$,

$\therefore$ 对应的点坐标为 $(-a - 1, b)$,

$\therefore$ 对应的点在第二象限.

复平面内有 A 、 B 、 C 三点，点 A 对应的复数是 $2 + i$ ，向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数是 $1 + 2i$ ，向量 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数是 $3 - i$ ，求 C 点在复平面内的坐标。

答案 $(4, -2)$

解析 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$,

$\therefore \overrightarrow{AC}$ 对应的复数为： $(3 - i) - (1 + 2i) = 2 - 3i$,

设 $C(x, y)$ ，则 $(x + yi) - (2 + i) = 2 - 3i$

$\therefore (x + yi) = (2 + i) + (2 - 3i) = 4 - 2i$ ，故 $x = 4$ ， $y = -2$ ，所以 C 点在复平面内的坐标为 $(4, -2)$ 。

15 若复数 $x^2 + 6x + 5 + (x^2 - 4x - 5)i$ ($x \in \mathbf{R}$) 在复平面内对应的点在实半轴上，求 x 的值。

答案 5

解析 $\therefore$ 复数 $x^2 + 6x + 5 + (x^2 - 4x - 5)i$ ($x \in \mathbf{R}$) 在复平面内对应的点在实轴的正半轴上，

$$\therefore \begin{cases} x^2 + 6x + 5 > 0, \\ x^2 - 4x - 5 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x < -5 \text{ 或 } x > -1, \\ x = -1 \text{ 或 } x = 5. \end{cases}$$

$\therefore x = 5$ 。

16 复平面内若复数 $z = m^2(1 + i) - m(4 + i) - 6i$ 所对应的点在第二象限内，则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(0, 3)$

B. $(-2, 0)$

C. $(3, 4)$

D. $(-10, 2)$

答案 C

解析 $z = (m^2 - 4m) + (m^2 - m - 6)i$ ，则 $\begin{cases} m^2 - 4m < 0, \\ m^2 - m - 6 > 0, \end{cases}$ 解得 $3 < m < 4$ 。

17 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则不等式 $-2 + (b - a)i > -5 - b + (a + 2b - 6)i$ 成立的条件是 () .

A. $a > -5$ 且 $b = 2$

B. $a = b = 2$

C. $a = 2$ 且 $b > -5$

D. $a > 2$ 且 $b > 5$

答案 B

3. 课堂巩固

18 已知 $Z = 4 - 3i$, 则 Z 模长为 _____ .

答案 5

解析 $|Z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$.

19 在复平面内, 复数 $z = 1 - 2i$ 对应的点的坐标为 () .

A. (1, 2)

B. (2, 1)

C. (1, -2)

D. (2, -1)

答案 C

解析 由复数的几何意义可知对应的坐标为 (1, -2), 故选 C .

20 已知 i 是虚数单位, 则复数 $z = 1 + 2i + 3i^2$ 所对应的点落在 () .

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

答案 B

解析 $z = 1 + 2i + 3i^2 = 1 + 2i - 3 = -2 + 2i$

故选 B .

21 向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的复数为 $1 + 4i$ ，向量 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $-3 + 6i$ ，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为_____.

答案 $-4 + 2i$

解析 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -3 + 6i - 1 - 4i = -4 + 2i$.

22 已知 $z = (m + 3) + (m - 1)i$ 在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是().

A. $(-3, 1)$

B. $(-1, 3)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(-\infty, -3)$

答案 A

解析 由已知可得 $\begin{cases} m + 3 > 0 \\ m - 1 < 0 \end{cases}$ ，所以 $-3 < m < 1$ ，故选A.

23 若复数 $(1 - i)(a + i)$ 在复平面内对应的点在第二象限，则实数 a 的取值范围是().

A. $(-\infty, 1)$

B. $(-\infty, -1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(-1, +\infty)$

答案 B

解析 $\because$ 复数 $(1 - i)(a + i) = a + 1 + (1 - a)i$ 在复平面内对应的点在第二象限，

$$\therefore \begin{cases} a + 1 < 0, \\ 1 - a > 0, \end{cases}$$

$$\therefore a < -1.$$

故选B.

24 若复数 $z = (m + 1) + (m^2 - 9)i < 0$ ，则实数 m 的值等于_____.

答案 -3

解析 $\because$ 复数 $z = (m+1) + (m^2-9)i < 0$,

$$\therefore \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m + 1 < 0 \end{cases},$$

解得 $m = -3$,

故实数 m 的值为 -3 .

故答案为: -3 .

三、复数的四则运算

1. 知识讲解

设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ 是任意两个复数, 那么复数之间的四则运算法则如下:

复数的加减法运算

两个复数的加减法运算可以这样进行, 实部与实部相加减、虚部与虚相加减, 然后将计算所得实部、虚部结合形成新的复数, 即:

$$(1) z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(2) z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i;$$

很明显, 两个复数的和仍然是一个确定的复数.

复数的乘法运算

两个复数相乘, 类似于两个多项式相乘, 展开之后只需要将 i^2 换成 -1 , 并把实部和虚部分别合并即可, 即: $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

可见两个复数的积仍然是一个复数.

共轭复数

介绍复数的除法运算之前, 我们先了解下共轭复数的概念:

一般地, 当两个复数的实部相等, 虚部互为相反数时, 这两个复数叫做互为**共轭复数**.

通常将复数 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$.

共轭复数的性质

共轭复数还有下列性质，请读者自行证明：

① $\overline{\overline{z}} = z$;

② $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$;

③ $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$;

④复数 z_1 与 z_2 的和差积商的共轭复数等于 $\bar{z}_1$ 与 $\bar{z}_2$ 相应的和差积商；



复数的除法运算

引入共轭复数最大的好处就是方便我们研究复数的除法运算：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2} (c+di \neq 0).$$

2. 例题精讲

25 $\frac{1+2i}{1-2i} = ()$.

A. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

B. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

C. $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

D. $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

答案 D

解析 $\frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-3+4i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.

26 已知复数 z 满足 $(\sqrt{3}+3i)z=3i$ ，则 z 等于 ()

A. $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

B. $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

C. $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

D. $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

答案 D

解析 $z = \frac{3i}{\sqrt{3}+3i} = \frac{3i(\sqrt{3}-3i)}{(\sqrt{3}+3i)(\sqrt{3}-3i)} = \frac{3\sqrt{3}i+9}{12} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ ，故选D.

27 若复数 z 满足 $z(1+i) = 1-i$ (i 是虚数单位), 则其共轭复数 $\bar{z} =$ _____.

答案 i

解析 方法一: 设 $z = a + bi$,

$$\text{则 } (a + bi)(1 + i) = 1 - i,$$

$$\text{即 } a - b + (a + b)i = 1 - i,$$

$$\text{由 } \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases},$$

$$\text{解得 } a = 0, b = -1,$$

$$\text{所以 } z = -i, \bar{z} = i.$$

$$\text{方法二: 由已知条件可得 } z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i, \therefore \bar{z} = i.$$

28 若实数 x, y 满足 $(1+i)x + (1-i)y = 2$, 则 xy 等于()

A. 1

B. 2

C. -2

D. -1

答案 A

29 设复数 $z_1 = 1 + i, z_2 = x + 2i$ ($x \in \mathbf{R}$), 若 $z_1 \cdot z_2$ 为实数, 则 x 等于()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

答案 A

解析 $z_1 \cdot z_2 = (1 + i) \cdot (x + 2i) = (x - 2) + (2 + x)i$, $\because z_1 \cdot z_2 \in \mathbf{R}, \therefore 2 + x = 0, \therefore x = -2$.

30 若 $z_1 = a + 2i, z_2 = 3 - 4i$, 且 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为_____.

答案 $\frac{8}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a+2i}{3-4i} = \frac{(a+2i)(3+4i)}{9+16} \\ \frac{3a+4ai+6i-8}{25} &= \frac{(3a-8)+(4a+6)i}{25}, \\ \therefore \frac{z_1}{z_2} \text{ 为纯虚数, } \therefore \begin{cases} 3a-8=0 \\ 4a+6 \neq 0 \end{cases}, \therefore a &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

D. 既不充分也不必要条件

故选A.

$$\therefore a^2 + b^2 = 5 .$$

33 计算：

$$(1) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6;$$

$$(2) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$$

答案 (1) 2

(2) $2(-1)^n$

解析 (1) 原式 = $\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\right]^2 + \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\right]^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$

(2) 原式 = $\left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{2n} + \left[\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{2n} = i^{2n} + (-1)^{2n} = (-1)^n + (-1)^n = 2(-1)^n.$

3. 课堂巩固

34 复数 $i(2-i) = ()$.

A. $1+2i$

B. $1-2i$

C. $-1+2i$

D. $-1-2i$

答案 A

解析 $i(2-i) = 2i - i^2 = 1 + 2i$, 选A

35 复数 $\frac{i-2}{1+2i} = ()$.

A. i

B. $-i$

C. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

D. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

答案 A

解析 $\frac{i-2}{1+2i} = \frac{(i-2)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5i}{5} = i$

故答案为A.

36 已知 i 是虚数单位, 若 $3+i=z(1-i)$, 则 $z=(\quad)$.

A. $1-2i$

B. $2-i$

C. $2+i$

D. $1+2i$

答案 D

解析 复数 $3+i=z(1-i) \Rightarrow z = \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+2i$.

37 复数 $z = \frac{1}{1-i}$ 的共轭复数是 $(\quad)$

A. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

C. $1-i$

D. $1+i$

答案 B

解析 $\because z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $\therefore z$ 的共轭复数为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

38 若 $(1+i) + (2-3i) = a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), i 是虚数单位, 则 a, b 的值分别等于 $(\quad)$.

A. $3, -2$

B. $3, 2$

C. $3, -3$

D. $-1, 4$

答案 A

解析 对题中所给的等式左边进行化简得 $(1+i) + (2-3i) = 3-2i$, $a=3, b=-2$.

39 若复数 $\frac{a+3i}{1+2i}$ ($a \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位)是纯虚数, 则实数 a 的值为 $(\quad)$

A. -2

B. 4

C. -6

D. 6

答案 C

解析

$$\therefore \frac{a+3i}{1+2i} = \frac{(a+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{a+6}{5} + \frac{3-2a}{5}i. \because \frac{a+3i}{1+2i} \text{ 是纯虚数}, \therefore \frac{a+6}{5} = 0. \therefore a = -6.$$

故选C.

40 若复数 $(1+bi)(2+i)$ 是纯虚数(i 是虚数单位, b 是实数),则 b 等于()

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. -2

答案 A

解析 $(1+bi)(2+i) = 2-b+(1+2b)i$ 要为纯虚数,则 $2-b=0$, $1+2b \neq 0$,所以 $b=2$.

41 已知 i 是虚数单位,则化简 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2020}$ 的结果为().

A. i

B. $-i$

C. -1

D. 1

答案 D

解析 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2020}$
 $= \left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^{2020}$
 $= \left(\frac{1-1+2i}{2}\right)^{2020} = i^{2020} = 1.$

故选D.

42 计算 $\left[(1+2i) \cdot i^{100} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5\right]^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{20} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 $1+2i$

解析 $\left[(1+2i) \cdot i^{100} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5\right]^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{20} = [(1+2i) \cdot 1 + (-i)^5]^2 - i^{10} = (1+i)^2 - i^{10} = 1+2i$

四、综合练习

43 下列命题中是假命题的是 ()

- A. 两个复数相等的一个必要条件是它们的虚部相等
- B. 两个复数不相等的一个充分条件是它们的实部不相等
- C. 两个虚数不能比较大小
- D. 实数一定大于虚数

答案 D

解析 实数与虚数不能比较大小 .

44 若复数 z 满足 : $z(1+i) = |1+\sqrt{3}i|$, 则复数 z 的虚部是 _____ .

答案 -1

解析 由 $z(1+i) = |1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$,

$$\text{得 } z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i ,$$

$\therefore$ 复数 z 的虚部是 -1 .

故答案为 : -1 .

45 设 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, 则“ z_1, z_2 中至少有一个数是虚数”是“ $z_1 - z_2$ 是虚数”的 () .

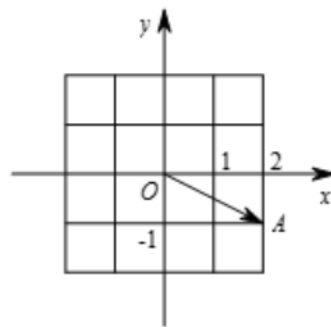
- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充要条件
- D. 既非充分也非必要条件

答案 B

解析 充分性不成立 , 如 $z_1 = 1+i$, $z_2 = 2+i$, $z_1 - z_2 = -1$ 不是虚数 ;

必要性成立，采用反证法，若 z_1, z_2 全不是虚数，即 z_1, z_2 均为实数，则 $z_1 - z_2$ 比为实数，所以 $z_1 - z_2$ 是虚数，则 z_1, z_2 中至少有一个数是虚数．选择B．故答案选B．

46 如图，在复平面内，复数 z 对应的向量为 $\overrightarrow{OA}$ ，则复数 $z \cdot i =$ _____， $\left| \frac{z}{2+i} \right| =$ _____．



答案 1: $1 + 2i$

2: 1

解析 由图可知 $z = 2 - i$ ，

故 $z \cdot i = (2 - i)i = 1 + 2i$ ，

$$\left| \frac{z}{2+i} \right| = \left| \frac{2-i}{2+i} \right| = \left| \frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)} \right| = \left| \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i \right| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = 1.$$

47 已知 i 虚数单位，则 $z = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2017} =$ _____．

答案 i

解析 $i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$ ， $\therefore$ 以4个为一周期，

$$z = 504(i + i^2 + i^3 + i^4) + i = i.$$

故答案为： i ．

48 已知 $|z| = 2z + 9i$ ，求复数 z ．

答案 $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2}i$.

解析 设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) , 则由 $|z| = 2z + 9i$, 得 $\sqrt{a^2 + b^2} = 2a + (2b + 9)i$,
由复数相等的充要条件知 $\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} = 2a \\ 2b + 9 = 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ b = -\frac{9}{2} \end{cases}$
所以, $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{9}{2}i$.

49 在复数范围内解方程 $|z|^2 + (z + \bar{z})i = \frac{3-i}{2+i}$ (i 为虚单位)

答案 $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

解析 设 $z = a + bi$, 则 $|z|^2 = a^2 + b^2$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$,
于是有 $a^2 + b^2 + 2ai = \frac{3-i}{2+i} = 1-i$,
所以 $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2a = -1 \end{cases}$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$, $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$,
所以 $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

50 已知复数 z 满足 $|z - 2| = 1$, 则 $|z + 2 + 5i|$ 的最大值和最小值分别为 () .

A. $5\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{34}$

B. 3 和 1

C. $\sqrt{41} + 1$ 和 $\sqrt{41} - 1$

D. $\sqrt{39}$ 和 3

答案 C

解析 $z \in \mathbf{C}$, $|z - 2| = 1$, 设 $z = x + yi$, 则表示 z 在以 $(2, 0)$ 为圆心 1 为半径的圆上 ,
则 $|z + 2 + 5i|$ 表示 z 到 $(-2, -5)$ 的距离 ,
所以它的最大值为 $\sqrt{(2+2)^2 + (-5)^2} + 1 = \sqrt{41} + 1$,
和最小值 $\sqrt{(2+2)^2 + (-5)^2} - 1 = \sqrt{41} - 1$.
故选 C .

51 若复数 z 满足 $|z - 1 - 2i| = 2$, 则 $|z|$ 的最小值为 () .

A. $\sqrt{5} - 2$

B. $\sqrt{5} - 1$

C. $\sqrt{3} - 1$

D. $\sqrt{3} + 1$

答案 A

解析

设 $z = (a + 1) + (b + 2)i$

$$\therefore |z - 1 - 2i| = 2,$$

$$\therefore |a + bi| = 2,$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4,$$

$$|z|^2 = (a + 1)^2 + (b + 2)^2$$

$$= a^2 + 2a + 1 + b^2 + 4b + 4$$

$$= (a^2 + b^2) + 2a + 4b + 5$$

$$= 9 + 2(a + 2b),$$

$$\therefore (a^2 + b^2)(1^2 + 2^2) \geq (a + 2b)^2,$$

$$\therefore 4 \times 5 \geq (a + 2b)^2,$$

$$\therefore -2\sqrt{5} \leq a + 2b \leq 2\sqrt{5},$$

$$\therefore |z|^2 = 9 + 2(a + 2b) \geq 9 - 4\sqrt{5} = 9 - 2\sqrt{20} = (\sqrt{5} - 2)^2,$$

$$\therefore |z| \geq \sqrt{5} - 2.$$

故选A.

52 若 $\frac{2-i}{a-i} > \frac{1}{2}$ (i 是虚数单位, a 是实数), 则 $a =$ _____.

答案 2

解析

$$\therefore \frac{2-i}{a-i} > \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{2-i}{a-i} &= \frac{(2-i)(a+i)}{(a-i)(a+i)} \\ &= \frac{2a+2i-ai-i^2}{a^2-i^2} \\ &= \frac{2a+1+(2-a)i}{a^2+1}, \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{2a+1}{a^2+1} > \frac{1}{2}, \\ a-2=0 \end{cases}$$

解得 $a = 2$.

53 设 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, 已知 $|z_1| = |z_2| = 1$, $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$, 求 $|z_1 - z_2|$.

答案 $\sqrt{2}$

解析

方法一：设 $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$),

由题设知 $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, $(a + c)^2 + (b + d)^2 = 2$.

又由 $(a + c)^2 + (b + d)^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2$,

可得 $2ac + 2bd = 0$.

$\therefore |z_1 - z_2|^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2 = a^2 + c^2 + b^2 + d^2 - (2ac + 2bd) = 2$.

$\therefore |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$.

方法二： $\because |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$,

将已知数值代入，可得 $|z_1 - z_2|^2 = 2$.

$\therefore |z_1 - z_2| = \sqrt{2}$.

方法三：在复平面内分别作出复数 z_1, z_2 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$,

$\because |z_1| = |z_2| = 1, |z_1 + z_2| = \sqrt{2}$.

$\therefore \overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$ 不共线 (若 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$ 共线，则 $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$ 或 0).

以 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边作平行四边形 OZ_1ZZ_2 (图略),

则由 $|z_1| = |z_2|$ 可知四边形 OZ_1ZZ_2 为菱形.

又 $|z_1|^2 = |z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$, $\therefore \angle Z_1OZ_2 = 90^\circ$,

即四边形 OZ_1ZZ_2 为正方形，故 $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$.

54 已知复数 z_1 满足 $(z_1 - 2)(1 + i) = 1 - i$ (i 为虚数单位)，复数 z_2 的虚部为 2 ，且 $z_1 \cdot z_2$ 是实数，求 z_2 .

答案 $4 + 2i$

解析

$(z_1 - 2)(1 + i) = 1 - i \Rightarrow z_1 = 2 - i$,

设 $z_2 = a + 2i$, $a \in \mathbf{R}$,

$$\text{则 } z_1 z_2 = (2-i)(a+2i) = (2a+2) + (4-a)i,$$

$$\therefore z_1 z_2 \in \mathbf{R},$$

$$\therefore a = 4,$$

$$\therefore z_2 = 4 + 2i.$$

55 已知方程 $(1+i)x^2 - 2(a+i)x + 5 - 3i = 0$ 有实根, 求实数 a 的值及实根 x_0 .

答案

$$\begin{cases} x_0 = -1, \\ a = -3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = 3, \\ a = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

解析

由题意得

$$(1+i)x_0^2 - 2(a+i)x_0 + 5 - 3i = 0,$$

$$\text{即 } (x_0^2 - 2ax_0 + 5) + (x_0^2 - 2x_0 - 3)i = 0.$$

$$\therefore \begin{cases} x_0^2 - 2ax_0 + 5 = 0, \\ x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x_0 = -1, \\ a = -3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x_0 = 3, \\ a = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

56 在复平面内, 复数 $z = a^2 - a - 2 + (a^2 - 3a - 4)i$ (其中 $a \in \mathbf{R}$).

(1) 若复数 z 为实数, 求 a 的值.

(2) 若复数 z 为纯虚数, 求 a 的值.

(3) 对应的点在第四象限, 求实数 a 的取值范围.

答案

$$(1) a = 4 \text{ 或 } a = -1.$$

$$(2) a = 2.$$

$$(3) 2 < a < 4.$$

解析

$$(1) a^2 - 3a - 4 = 0, (a-4)(a+1) = 0,$$

$$\therefore a = 4 \text{ 或 } a = -1.$$

$$(2) \begin{cases} a^2 - a - 2 = 0 \\ a^2 - 3a - 4 \neq 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} (a-2)(a+1) = 0 \\ (a-4)(a+1) \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore a = 2.$$

(3) z 在复平面对应点的坐标 $(a^2 - a - 2, a^2 - 3a - 4)$,

$\therefore$ 其在第四象限 ,

$$\therefore \begin{cases} a^2 - a - 2 > 0 \\ a^2 - 3a - 4 < 0 \end{cases} ,$$

$$\therefore 2 < a < 4 .$$