

复数

一、复数的定义

1. 知识讲解

数系的扩充

为了解决 $x^2 + 1 = 0$ 这样的方程在实数系中无解的问题，我们设想引入一个新数 i ，使 i 是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的根，即使 $i \cdot i = -1$ ，把这个新数 i 添加到实数集中去，得到一个新数集，记作 A ，那么方程 $x^2 + 1 = 0$ 在 A 中就有解 $x = i$ 了，由于 i 并非实根，我们将其定义为虚根，仿照实数系中以 1 为度量单位一样，进一步称其为虚根单位。

按照我们的研究需要并配合数系扩充的原则，以 1 和 i 为基元，形如其线性组合

$a \cdot 1 + b \cdot i = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 一定也在数集 A 中，所以实数系经过扩充后得到的新数集应该是

$\mathbf{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbf{R}\}$ 。

复数的概念

我们把集合 $\mathbf{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbf{R}\}$ 中的数，即形如 $a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 的数叫做**复数**，全体复数所组成的集合 $\mathbf{C}$ 叫做**复数集**。

复数的周期

(1) 它的平方等于 -1 ，即 $i^2 = -1$ ；

(2) 实数可以与它进行四则运算，进行四则运算时，原有加、乘运算律仍然成立。

(3) i 与 -1 的关系: i 就是 -1 的一个平方根，即方程 $x^2 = -1$ 的一个根，方程 $x^2 = -1$ 的另一个根是 $-i$ 。

(4) i 的周期性: $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$, $i^{4n} = 1$ 。

复数的代数形式

复数通常用字母 z 表示，即 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$)，这一表示形式叫做**复数的代数形式**。

对于复数 $z = a + bi$ ，以后不作特殊说明，都有 $a, b \in \mathbf{R}$ ，其中的 a 与 b 分别叫做复数 z 的**实部**与**虚部**。

复数相等的充要条件

在复数集 $\mathbf{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbf{R}\}$ 中任取两个数 $a + bi$ ， $c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$)，

我们规定： $a + bi$ 与 $c + di$ 相等的充要条件是 $a = c$ 且 $b = d$ 。

复数的分类

对于复数 $a + bi$ ，当且仅当 $b = 0$ 时，它是**实数**；

当 $b \neq 0$ 时，叫做**虚数**；

当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时，叫做**纯虚数**。

2. 例题精讲

1 $(1 - \sqrt{3})i$ 的实部为 ()

- A. 1 B. $-\sqrt{3}$ C. $1 - \sqrt{3}$ D. 0

2 若复数 $(m^2 - 5m - 6) + (m^2 + 4m + 3)i = 0$ ，则实数 m 的值是 ()

- A. -3或-1 B. 6或-1 C. -3 D. -1

3 已知复数 $z = (a^2 - 1) + (a - 2)i$ ($a \in \mathbf{R}$)，则“ $a = 1$ ”是“ z 为纯虚数”的 ()。

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 非充分非必要条件

4 设复数 $z = \lg(m^2 - 2m - 2) + (m^2 + 3m + 2)i$ ，问当实数 m 为何值时：

(1) z 是实数？

(2) z 是纯虚数？

5 $i^{4n+1} + i^{4n+3} = \underline{\hspace{2cm}} (n \in \mathbf{N}^*)$

3. 课堂巩固

6 复数 $z = 2 - 3i$ 的虚部为 () .

A. -3

B. 3

C. 2

D. $-3i$

7 已知 $a - 1 + 2ai = -4 + 4i$, 求复数 a .

8 设 $a, b \in \mathbf{R}$, “ $a = 0$ ”是“复数 $a + bi$ 是纯虚数”的 () .

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分又不必要条件

9 设 $z = (m^2 - 5m - 6) + (m^2 - 2m - 3)i (m \in \mathbf{R})$, 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, z 为实数; 当 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, z 为纯虚数 .

10 若 i 是虚数单位, 则 $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 8i^8 = \underline{\hspace{2cm}}$.

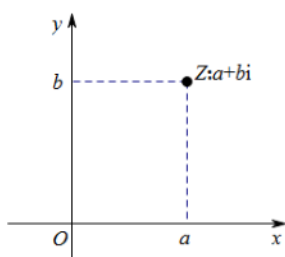
二、复数几何意义

1. 知识讲解



复数的坐标意义

根据复数相等的定义，任何一个复数 $z = a + bi$ 都可以由一个有序实数对 (a, b) 唯一确定。因为有序实数对 (a, b) 与平面直角坐标系中的点一一对应，所以复数集与平面直角坐标系中的点集之间可以建立一一对应。如下图：



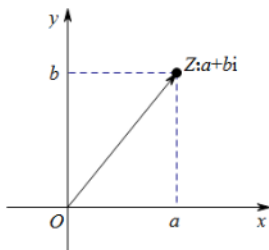
点 Z 的横坐标是 a ，纵坐标是 b ，复数 $z = a + bi$ 可用点 $Z(a, b)$ 表示，这个建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做复平面， x 轴叫做实轴， y 轴叫做虚轴。显然，实轴上的点都表示实数；除了原点外，虚轴上的点都表示纯虚数。

按照这种表示方法，每一个复数，有复平面内唯一的一个点和它对应；反过来，复平面内的每一个点，有唯一的一个复数和它对应。由此可知，复数集 $\mathbf{C}$ 和复平面内所有的点所成的集合是一一对应的，即：

$$\text{复数 } z = a + bi \leftrightarrow \text{复平面内的点 } Z(a, b)$$

这是复数的一种几何意义。

数是——对应的，这样根据传递性，我们还可以用平面向量来表示复数，如下图：



是一一对应的 (实数0与零向量对应,) 即:

复数 $z = a + bi \leftrightarrow$ 平面向量 $\overrightarrow{OZ}$

这是复数的另一种几何意义.

复数.

向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模 r 叫做复数 $z = a + bi$ 的模, 记作 $|z|$ 或 $|a + bi|$,

由模的定义可知： $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. 例题精讲

- 11 设 $(1+i)x = 1+yi$, 其中 x, y 是实数, 则 $|x+yi| = (\quad)$.

A. 1

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. 2

- 12 复数 $z = 4 - 2i$ (i 是虚数单位)在复平面内对应的点位于().

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

- 13 复数 z 对应的点在第二象限, 则 $z + i^2$ 对应的点在 ()
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 14 复平面内有 A 、 B 、 C 三点, 点 A 对应的复数是 $2 + i$, 向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数是 $1 + 2i$, 向量 $\overrightarrow{BC}$ 对应的复数是 $3 - i$, 求 C 点在复平面内的坐标.
- 15 若复数 $x^2 + 6x + 5 + (x^2 - 4x - 5)i$ ($x \in \mathbf{R}$) 在复平面内对应的点在实半轴上, 求 x 的值.
- 16 复平面内若复数 $z = m^2(1 + i) - m(4 + i) - 6i$ 所对应的点在第二象限内, 则实数 m 的取值范围是 ()
 A. $(0, 3)$ B. $(-2, 0)$
 C. $(3, 4)$ D. $(-10, 2)$
- 17 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 则不等式 $-2 + (b - a)i > -5 - b + (a + 2b - 6)i$ 成立的条件是 () .
 A. $a > -5$ 且 $b = 2$ B. $a = b = 2$
 C. $a = 2$ 且 $b > -5$ D. $a > 2$ 且 $b > 5$

3. 课堂巩固

- 18 已知 $Z = 4 - 3i$, 则 Z 模长为 ____ .
- 19 在复平面内, 复数 $z = 1 - 2i$ 对应的点的坐标为 () .
 A. $(1, 2)$ B. $(2, 1)$ C. $(1, -2)$ D. $(2, -1)$
- 20 已知 i 是虚数单位, 则复数 $z = 1 + 2i + 3i^2$ 所对应的点落在 () .
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

21 向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的复数为 $1 + 4i$ ，向量 $\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 $-3 + 6i$ ，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 _____.

22 已知 $z = (m + 3) + (m - 1)i$ 在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是 () .

A. $(-3, 1)$

B. $(-1, 3)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(-\infty, -3)$

23 若复数 $(1 - i)(a + i)$ 在复平面内对应的点在第二象限，则实数 a 的取值范围是 () .

A. $(-\infty, 1)$

B. $(-\infty, -1)$

C. $(1, +\infty)$

D. $(-1, +\infty)$

24 若复数 $z = (m + 1) + (m^2 - 9)i < 0$ ，则实数 m 的值等于 _____ .

三、复数的四则运算

1. 知识讲解

设 $z_1 = a + bi$ ， $z_2 = c + di$ 是任意两个复数，那么复数之间的四则运算法则如下：



复数的加减法运算

两个复数的加减法运算可以这样进行，实部与实部相加减、虚部与虚相加减，然后将计算所得实部、虚部结合形成新的复数，即：

$$(1) z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(2) z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i;$$

很明显，两个复数的和仍然是一个确定的复数。



复数的乘法运算

两个复数相乘，类似于两个多项式相乘，展开之后只需要将 i^2 换成 -1 ，并把实部和虚部分别合并即可，即：
$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

可见两个复数的积仍然是一个复数。

共轭复数

介绍复数的除法运算之前，我们先了解下共轭复数的概念：

一般地，当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为**共轭复数**。

通常将复数 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$ 。

共轭复数的性质

共轭复数还有下列性质，请读者自行证明：

① $\overline{(\bar{z})} = z$ ；

② $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ ；

③ $z \in \mathbf{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ ；

④ 复数 z_1 与 z_2 的和差积商的共轭复数等于 $\bar{z}_1$ 与 $\bar{z}_2$ 相应的和差积商；

复数的除法运算

引入共轭复数最大的好处就是方便我们研究复数的除法运算：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2} \quad (c+di \neq 0).$$

2. 例题精讲

25 $\frac{1+2i}{1-2i} = (\quad)$.

A. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

B. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

C. $-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$

D. $-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

26 已知复数 z 满足 $(\sqrt{3}+3i)z=3i$ ，则 z 等于()

A. $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

B. $\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

C. $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

D. $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$

27 若复数 z 满足 $z(1+i)=1-i$ (i 是虚数单位)，则其共轭复数 $\bar{z} = \underline{\hspace{2cm}}$.

28 若实数 x, y 满足 $(1+i)x + (1-i)y = 2$, 则 xy 等于 ()

- A. 1 B. 2 C. -2 D. -1

29 设复数 $z_1 = 1+i$, $z_2 = x+2i$ ($x \in \mathbf{R}$), 若 $z_1 \cdot z_2$ 为实数, 则 x 等于 ()

- A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

30 若 $z_1 = a+2i$, $z_2 = 3-4i$, 且 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数, 则实数 a 的值为 _____.

31 已知 i 是虚数单位, $a, b \in \mathbf{R}$, 则“ $a=b=1$ ”是“ $(a+bi)^2 = 2i$ ”的 () .

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

32 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, $(a+bi)^2 = 3+4i$ (i 是虚数单位) 则 $a^2+b^2 =$ _____, $ab =$ _____.

33 计算:

$$(1) \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6;$$

$$(2) \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4n} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{4n}$$

3. 课堂巩固

34 复数 $i(2-i) =$ () .

- A. $1+2i$ B. $1-2i$ C. $-1+2i$ D. $-1-2i$

35 复数 $\frac{i-2}{1+2i} =$ () .

- A. i B. $-i$
C. $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ D. $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

36 已知 i 是虚数单位，若 $3 + i = z(1 - i)$ ，则 $z = (\quad)$.

A. $1 - 2i$

B. $2 - i$

C. $2 + i$

D. $1 + 2i$

37 复数 $z = \frac{1}{1-i}$ 的共轭复数是 $(\quad)$

A. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

B. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

C. $1 - i$

D. $1 + i$

38 若 $(1 + i) + (2 - 3i) = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$)， i 是虚数单位，则 a, b 的值分别等于 $(\quad)$.

A. $3, -2$

B. $3, 2$

C. $3, -3$

D. $-1, 4$

39 若复数 $\frac{a+3i}{1+2i}$ ($a \in \mathbf{R}$, i 为虚数单位)是纯虚数，则实数 a 的值为 $(\quad)$

A. -2

B. 4

C. -6

D. 6

40 若复数 $(1 + bi)(2 + i)$ 是纯虚数 (i 是虚数单位， b 是实数)，则 b 等于 $(\quad)$

A. 2

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. -2

41 已知 i 是虚数单位，则化简 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2020}$ 的结果为 $(\quad)$.

A. i

B. $-i$

C. -1

D. 1

42 计算 $\left[(1 + 2i) \cdot i^{100} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5\right]^2 - \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{20} = \underline{\hspace{2cm}}$.

四、综合练习

43 下列命题中是假命题的是 ()

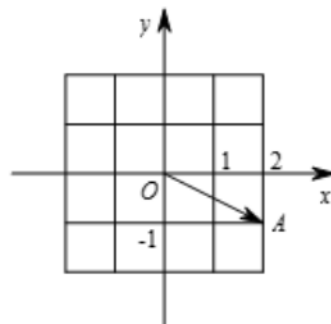
- A. 两个复数相等的一个必要条件是它们的虚部相等
- B. 两个复数不相等的一个充分条件是它们的实部不相等
- C. 两个虚数不能比较大小
- D. 实数一定大于虚数

44 若复数 z 满足： $z(1+i) = |1+\sqrt{3}i|$ ，则复数 z 的虚部是 _____ .

45 设 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ ，则“ z_1, z_2 中至少有一个数是虚数”是“ $z_1 - z_2$ 是虚数”的 () .

- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充要条件
- D. 既非充分也非必要条件

46 如图，在复平面内，复数 z 对应的向量为 $\overrightarrow{OA}$ ，则复数 $z \cdot i =$ _____， $\left| \frac{z}{2+i} \right| =$ _____ .



47 已知 i 虚数单位，则 $z = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2017} =$ _____ .

48 已知 $|z| = 2z + 9i$ ，求复数 z .

49 在复数范围内解方程 $|z|^2 + (z + \bar{z})i = \frac{3-i}{2+i}$ (i 为虚单位)

50 已知复数 z 满足 $|z-2|=1$, 则 $|z+2+5i|$ 的最大值和最小值分别为 () .

A. $5\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{34}$

B. 3 和 1

C. $\sqrt{41}+1$ 和 $\sqrt{41}-1$

D. $\sqrt{39}$ 和 3

51 若复数 z 满足 $|z-1-2i|=2$, 则 $|z|$ 的最小值为 () .

A. $\sqrt{5}-2$

B. $\sqrt{5}-1$

C. $\sqrt{3}-1$

D. $\sqrt{3}+1$

52 若 $\frac{2-i}{a-i} > \frac{1}{2}$ (i 是虚数单位, a 是实数), 则 $a =$ _____ .

53 设 $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, 已知 $|z_1| = |z_2| = 1$, $|z_1 + z_2| = \sqrt{2}$, 求 $|z_1 - z_2|$.

54 已知复数 z_1 满足 $(z_1 - 2)(1+i) = 1-i$ (i 为虚数单位), 复数 z_2 的虚部为 2, 且 $z_1 \cdot z_2$ 是实数, 求 z_2 .

55 已知方程 $(1+i)x^2 - 2(a+i)x + 5 - 3i = 0$ 有实根，求实数 a 的值及实根 x_0 .

56 在复平面内，复数 $z = a^2 - a - 2 + (a^2 - 3a - 4)i$ (其中 $a \in \mathbf{R}$) .

- (1) 若复数 z 为实数，求 a 的值 .
- (2) 若复数 z 为纯虚数，求 a 的值 .
- (3) 对应的点在第四象限，求实数 a 的取值范围 .