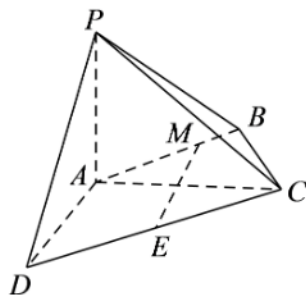


# 立体几何与空间向量综合习题

## 一、空间中的角度

- 1 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $AC \perp AD$ ， $AB \perp BC$ ， $\angle BCA = 60^\circ$ ， $AP = AC = AD = 2$ ， $E$  为  $CD$  的中点， $M$  在  $AB$  上，且  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$ 。



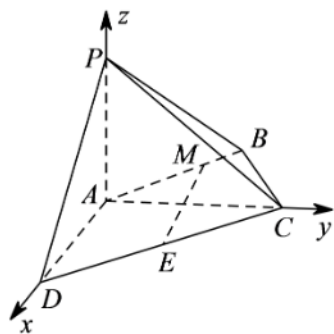
- (1) 求证： $EM \parallel$  平面  $PAD$ 。
- (2) 求平面  $PAD$  与平面  $PBC$  所成锐二面角的余弦值。
- (3) 点  $F$  是线段  $PD$  上异于两端点的任意一点，若满足异面直线  $EF$  与  $AC$  所成角  $45^\circ$ ，求  $AF$  的长。

### 答案

- (1) 证明见解析。
- (2)  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 。
- (3)  $|AF| = \sqrt{2}$ 。

### 解析

- (1) 以  $A$  为原点， $AD$  为  $x$  轴， $AC$  为  $y$  轴， $AP$  为  $z$  轴，建立如图的空间直角坐标系，  
 $A(0,0,0)$ ， $D(2,0,0)$ ， $C(0,2,0)$ ， $E(1,1,0)$ ， $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ ， $P(0,0,2)$ ，  
 设  $M(x,y,z)$ ，



$$\therefore \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB},$$

$$\therefore (x, y, z) = 2 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - x, \frac{3}{2} - y, -z \right),$$

$$\therefore \begin{cases} x = -\sqrt{3} - 2x \\ y = 3 - 2y \\ z = -2z \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases},$$

$$\therefore M \left( -\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0 \right),$$

$$\therefore \overrightarrow{EM} = \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1, 0, 0 \right), \text{ 平面 } PAD \text{ 的法向量 } \vec{p} = (0, 1, 0),$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} \cdot \vec{p} = 0,$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} \perp \vec{p},$$

又  $\because EM \not\subset \text{平面 } PAD,$

$\therefore EM // \text{平面 } PAD.$

(2) 设平面  $PBC$  的法向量  $\vec{m} = (x, y, z),$

$$\therefore \overrightarrow{PC} = (0, 2, -2), \overrightarrow{BC} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right),$$

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} y - z = 0 \\ \sqrt{3}x + y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = -1,$$

$$\therefore y = \sqrt{3}, z = \sqrt{3}$$

$$\therefore \vec{m} = (-1, \sqrt{3}, \sqrt{3}),$$

平面  $PAD$  的法向量  $\vec{p} = (0, 1, 0),$

设二面角所成的锐二面角为  $\theta,$

$$\therefore \cos \theta = |\cos \langle \vec{m}, \vec{p} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{p}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

平面  $PAD$  与平面  $PBC$  所成锐二面角的余弦值为  $\frac{\sqrt{21}}{7}.$

(3) 令  $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PD}, (0 < \lambda < 1), \overrightarrow{PF} = \lambda(2, 0, -2),$

$$\therefore F(2\lambda, 0, 2 - 2\lambda),$$

$$\overrightarrow{EF} = (2\lambda - 1, -1, 2 - 2\lambda),$$

$$\therefore |\cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{2\sqrt{(2\lambda - 1)^2 + 1 + (2 - 2\lambda)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

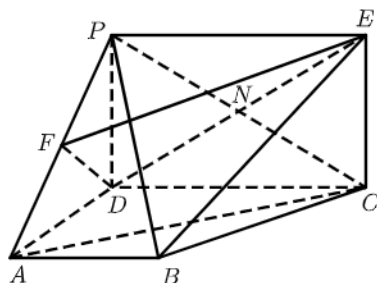
$$\therefore 4\lambda^2 - 6\lambda + 2 = 0,$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2} \text{ 或 } \lambda = 1 \text{ (舍)}$$

$$\therefore F(1, 0, 1),$$

$$\therefore |AF| = \sqrt{2}.$$

- 2 如图,  $PD$  垂直于梯形  $ABCD$  所在的平面,  $\angle ADC = \angle BAD = 90^\circ$ .  $F$  为  $PA$  中点,  $PD = \sqrt{2}$ ,  $AB = AD = \frac{1}{2}CD = 1$ . 四边形  $PDCE$  为矩形, 线段  $PC$  交  $DE$  于点  $N$ .



- (1) 求证:  $AC \parallel$  平面  $DEF$ ;
- (2) 求二面角  $A - BC - P$  的大小;
- (3) 在线段  $EF$  上是否存在一点  $Q$ , 使得  $BQ$  与平面  $BCP$  所成角的大小为  $\frac{\pi}{6}$ ? 若存在, 请求出  $FQ$  的长; 若不存在, 请说明理由.

答案

- (1) 证明见解析
- (2)  $\frac{\pi}{4}$ .
- (3) 存在点  $Q$ , 且  $|FQ| = \frac{\sqrt{19}}{2}$

解析

- (1) 连接  $FN$ , 在  $\triangle PAC$  中,  $F, N$  分别为  $PA, PC$  中点, 所以  $FN \parallel AC$ ,  
因为  $FN \subset$  平面  $DEF$ ,  $AC \not\subset$  平面  $DEF$ .  
所以  $AC \parallel$  平面  $DEF$
- (2) 如图以  $D$  为原点, 分别以  $DA, DC, DP$  所在直线为  $x, y, z$  轴,  
建立空间直角坐标系  $D - xyz$ .  
则  $P(0, 0, \sqrt{2}), B(1, 1, 0), C(0, 2, 0)$ ,

所以  $\overrightarrow{PB} = (1, 1, -\sqrt{2})$ ,  $\overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0)$ .

设平面  $PBC$  的法向量为  $\vec{m} = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{PB} = (x, y, z) \cdot (1, 1, -\sqrt{2}) = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = (x, y, z) \cdot (-1, 1, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x + y - \sqrt{2}z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} y = x \\ z = \sqrt{2}x \end{cases},$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \sqrt{2} \end{cases},$$

所以  $\vec{m} = (1, 1, \sqrt{2})$ .

因为平面  $ABC$  的法向量  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ ,

$$\text{所以} \cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{n} \cdot \vec{m}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

由图可知二面角  $A-BC-P$  为锐二面角,

所以二面角  $A-BC-P$  的大小为  $\frac{\pi}{4}$ .

(3) 设存在点  $Q$  满足条件.

由  $F\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $E(0, 2, \sqrt{2})$ . 设  $\overrightarrow{FQ} = \lambda \overrightarrow{FE} (0 \leq \lambda \leq 1)$ ,

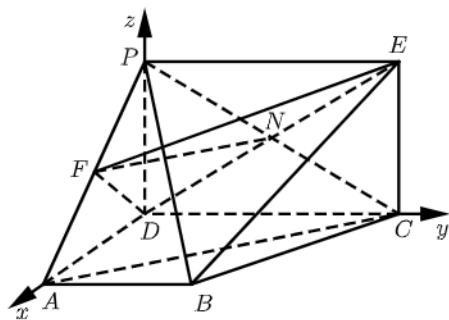
$$\text{整理得 } Q\left(\frac{1-\lambda}{2}, 2\lambda, \frac{\sqrt{2}(1+\lambda)}{2}\right), \overrightarrow{BQ} = \left(-\frac{1+\lambda}{2}, 2\lambda-1, \frac{\sqrt{2}(1+\lambda)}{2}\right)$$

因为直线  $BQ$  与平面  $BCP$  所成角的大小为  $\frac{\pi}{6}$ ,

$$\text{所以} \sin \frac{\pi}{6} = \left| \cos \langle \overrightarrow{BQ}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{BQ} \cdot \vec{m}|}{|\overrightarrow{BQ}| \cdot |\vec{m}|} = \frac{|5\lambda-1|}{2\sqrt{19\lambda^2-10\lambda+7}} = \frac{1}{2},$$

则  $\lambda^2 = 1$ , 由  $0 \leq \lambda \leq 1$  知  $\lambda = 1$ , 即  $Q$  点与  $E$  点重合.

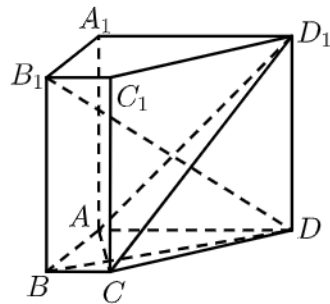
故在线段  $EF$  上存在一点  $Q$ , 且  $|FQ| = |EF| = \frac{\sqrt{19}}{2}$ .



3

如图, 在直棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中  $AD \parallel BC$ .  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $AC \perp BD$ ,  $BC = 1$ ,

$AD = AA_1 = 3$ .



(1) 证明:  $AC \perp B_1D$ ;

(2) 求直线 $B_1C_1$ 与平面 $ACD_1$ 所成角的正弦值.

答案

(1) 证明见解析.

(2)  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

解析

(1)  $\because ABCD - A_1B_1C_1D_1$  是直棱柱,  $\therefore BB_1 \perp$  面  $ABCD$ ,

且  $BD \subset$  面  $ABCD \Rightarrow BB_1 \perp AC$ .

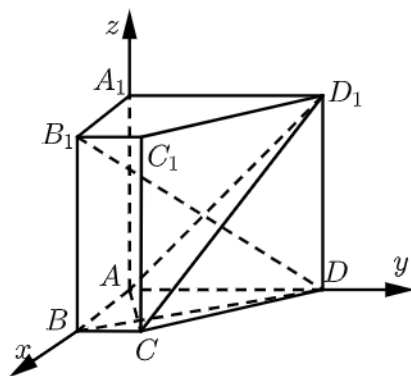
又  $\because AC \perp BD$ , 且  $BD \cap BB_1 = B$ ,  $\therefore AC \perp$  面  $BDB_1$ .

$\because B_1D \subset$  面  $BDB_1 \therefore AC \perp B_1D$ .

(2)  $\because B_1C_1 // BC // AD$ ,

$\therefore$  直线  $B_1C_1$  与平面  $ACD_1$  的夹角, 即直线  $AD$  与平面  $ACD_1$  的夹角  $\theta$ .

建立直角坐标系, 设原点在  $A$  点,  $AB$  为  $y$  轴正半轴,  $AD$  为  $x$  轴正半轴,  $AA_1$  为  $z$  轴正半轴.



设  $A(0, 0, 0)$ ,  $D(3, 0, 0)$ ,  $D_1(3, 0, 3)$ ,  $B(0, y, 0)$ ,  $C(1, y, 0)$ ,

则  $\overrightarrow{AC} = (1, y, 0)$ ,  $\overrightarrow{BD} = (3, -y, 0)$ ,  $\therefore \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ .

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow 3 - y^2 + 0 = 0, y > 0 \Rightarrow y = \sqrt{3}.$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} = (1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{AD_1} = (3, 0, 3).$$

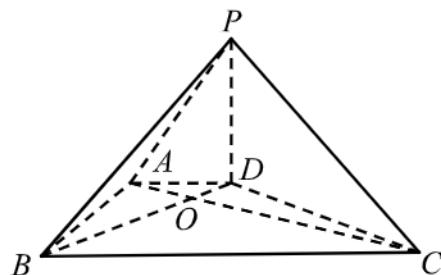
$$\text{设平面 } ACD_1 \text{ 的法向量为 } \vec{n}, \text{ 则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{3}y = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases}.$$

平面  $ACD_1$  的一个法向量  $\vec{n} = (-\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$ , 又  $\overrightarrow{AD} = (3, 0, 0)$ ,

$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{AD} \rangle| = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7} \cdot 3} = \frac{\sqrt{21}}{7},$$

所以  $B_1C_1$  与平面  $ACD_1$  夹角的正弦值为  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

如图，在底面为直角梯形的四棱锥  $P-ABCD$  中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $PD \perp$  平面  $ABCD$ ， $AD = 1$ ， $AB = \sqrt{3}$ ， $BC = 4$ 。



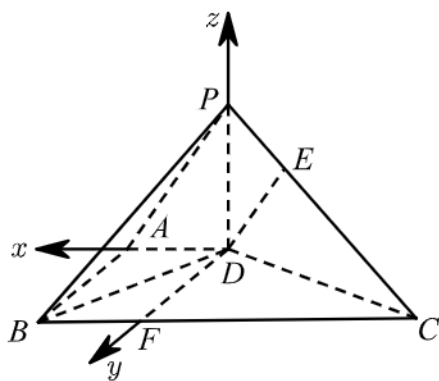
- (1) 求证： $BD \perp PC$ 。
- (2) 求直线  $AB$  与平面  $PDC$  所成的角。
- (3) 设点  $E$  在棱  $PC$  上， $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PC}$ ，若  $DE \parallel$  平面  $PAB$ ，求  $\lambda$  的值。

答案

- (1) 证明见解析。
- (2)  $60^\circ$ 。
- (3)  $\frac{1}{4}$

解析

- (1)  $\because \angle DAB = 90^\circ, AD = 1, AB = \sqrt{3}, \therefore BD = 2, \angle ABD = 30^\circ$ ,  
 $\because BC \parallel AD$   
 $\therefore \angle DBC = 60^\circ, BC = 4$ , 由余弦定理得  $DC = 2\sqrt{3}$ ,  
 $BC^2 = DB^2 + DC^2$ ,  
 $\therefore BD \perp DC$ ,  
 $\because PD \perp$  面  $ABCD$ ,  
 $\therefore BD \perp PD, PD \cap CD = D$ ,  
 $\therefore BD \perp$  面  $PDC$ ,  
 $\because PC$  在面  $PDC$  内,  
 $\therefore BD \perp PC$ 。
- (2) 如图，在平面  $ABCD$  内过  $D$  作直线  $DF \parallel AB$ ，交  $BC$  于  $F$ ，  
 分别以  $DA$ 、 $DF$ 、 $DP$  所在的直线为  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴建立空间直角坐标系。



由条件知  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, \sqrt{3}, 0)$ ,

设  $PD = a$ , 则  $\overrightarrow{BD} = (-1, -\sqrt{3}, 0)$ ,  $\overrightarrow{PC} = (-3, \sqrt{3}, -a)$ ,

由 (1) 知  $BD \parallel$  面  $PDC$ ,  $\overrightarrow{DB}$  就是平面  $PDC$  的法向量.

$\overrightarrow{AB} = (0, \sqrt{3}, 0)$ ,  $\overrightarrow{DB} = (1, \sqrt{3}, 0)$ .

设  $AB$  与面  $PDC$  所成角大小为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{DB}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\because 0^\circ < \theta < 90^\circ$ ,

$\therefore \theta = 60^\circ$ ,

即直线  $AB$  与平面  $PDC$  所成角为  $60^\circ$ .

(3) 在 (2) 中的空间坐标系中  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, \sqrt{3}, 0)$ ,  $P(0, 0, a)$ ,  $C(-3, \sqrt{3}, 0)$ ,

$\overrightarrow{PC} = (-3, \sqrt{3}, -a)$ ,  $\overrightarrow{PE} = (-3\lambda, \sqrt{3}\lambda, -a\lambda)$ ,

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PE} = (0, 0, a) + (-3\lambda, \sqrt{3}\lambda, -a\lambda) = (-3\lambda, \sqrt{3}\lambda, a - a\lambda)$

$\overrightarrow{AB} = (0, \sqrt{3}, 0)$ ,  $\overrightarrow{PA} = (1, 0, -a)$ ,

设  $\vec{n} = (x, y, z)$  为面  $PAB$  的法向量,

由  $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0$ , 得  $y = 0$ , 由  $\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n} = 0$ , 得  $x - az = 0$ ,

取  $x = a, z = 1$ ,  $\vec{n} = (a, 0, 1)$

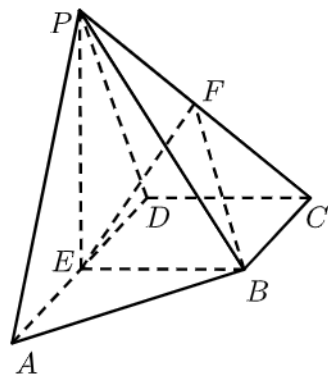
由  $DE \parallel$  面  $PAB$  得:

$\overrightarrow{DE} \perp \vec{n}$ ,

$\therefore \overrightarrow{DE} \cdot \vec{n} = 0, -3a\lambda + a - a\lambda = 0$ ,

$\therefore \lambda = \frac{1}{4}$

在四棱锥  $P-ABCD$  中，侧面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ ， $ABCD$  为直角梯形， $BC \parallel AD$ ， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $BC = CD = \frac{1}{2}AD = 1$ ， $PA = PD$ ， $E, F$  为  $AD, PC$  的中点。



- (1) 求证： $PA \parallel$  平面  $BEF$ ；
- (2) 若  $PC$  与  $AB$  所成角为  $45^\circ$ ，求  $PE$  的长；
- (3) 在 (II) 的条件下，求二面角  $F-BE-A$  的余弦值。

答案

(1) 证明见解析

(2)  $PE = \sqrt{2}$

(3)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

解析

(1) 连接  $AC$  交  $BE$  于  $O$ ，并连接  $EC, FO$ ，

$\because BC \parallel AD, BC = \frac{1}{2}AD, E$  为  $AD$  中点，

$\therefore AE \parallel BC$ ，且  $AE = BC$ ，

$\therefore$  四边形  $ABCE$  为平行四边形，

$\therefore O$  为  $AC$  中点。

又  $F$  为  $AD$  中点，

$\therefore OF \parallel PA$ 。

$\because OF \subset$  平面  $BEF, PA \not\subset$  平面  $BEF$ ，

$\therefore PA \parallel$  平面  $BEF$ 。

(2) 解法一：

$\because PA = PD, E$  为  $AD$  中点， $\therefore PE \perp AD$ 。

$\because$  侧面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ ，

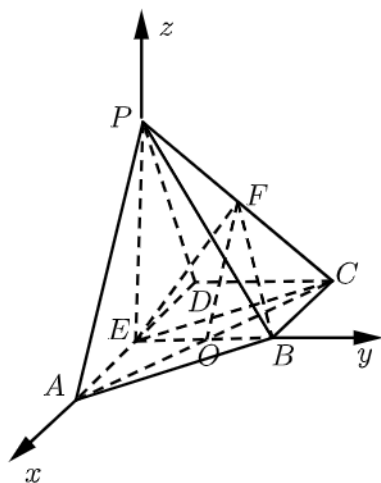
侧面  $PAD \cap$  底面  $ABCD = AD, PE \subset$  平面  $PAD$

$\therefore PE \perp$  平面  $ABCD$

易知 $BCDE$ 为正方形,

$\therefore AD \perp BE$ ,

建立如图空间直角坐标系 $E-xyz$ ,  $PE = t (t > 0)$ ,



则 $E(0,0,0)$ ,  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$ ,  $P(0,0,t)$ ,  $C(-1,1,0)$

$\therefore \overrightarrow{PC} = (-1, 1, -t)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$

$\therefore PC$ 与 $AB$ 所成角为 $45^\circ$

$$\therefore \left| \cos \langle \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{AB} \rangle \right| = \frac{|\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{PC}| |\overrightarrow{AB}|} = \frac{|1+1+0|}{\sqrt{2+t^2} \sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

解得:  $t = \sqrt{2} \therefore PE = \sqrt{2}$

解法二: 由 $BCDE$ 为正方形可得 $EC = \sqrt{2}$ ,  $BC = \sqrt{2}$

由 $ABCE$ 为平行四边形可得 $EC \parallel AB$

$\therefore \angle PCE$ 为 $PC$ 与 $AB$ 所成角, 即 $\angle PCE = 45^\circ$

$\therefore PA = PD$ ,  $E$ 为 $AD$ 中点,  $\therefore PE \perp AD$

$\therefore$ 侧面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$ , 侧面 $PAD \cap$ 底面 $ABCD = AD$ ,  $PE \subset$ 平面 $PAD$

$\therefore PE \perp$ 平面 $ABCD$

$\therefore PE \perp EC$

$\therefore PE = EC = \sqrt{2}$

(3)  $F$ 为 $PC$ 的中点, 所以 $F = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ,  $\overrightarrow{EB} = (0, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 $BEF$ 的法向量

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{EB} = y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0 \end{cases}$$

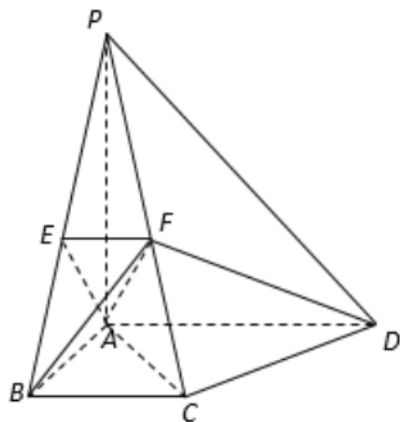
取 $x = 2$ , 则 $z = \sqrt{2}$ , 得 $\vec{n} = (2, 0, \sqrt{2})$   $\overrightarrow{EP} = (0, 0, \sqrt{2})$ 是平面 $ABE$ 的法向量

$$\therefore \left| \cos \langle \vec{n}, \vec{EP} \rangle \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{EP}|}{|\vec{n}| |\vec{EP}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

由图可知二面角  $E-AC-B$  的平面角是钝角，

所以二面角  $E-AC-B$  的余弦值为  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

- 6 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，平面  $PAC \perp$  平面  $ABCD$ ，且  $PA \perp AC$ ， $PA = AD = 2$ 。四边形  $ABCD$  满足  $BC \parallel AD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = BC = 1$ 。点  $E, F$  分别为侧棱  $PB, PC$  上的点，且  $\frac{PE}{PB} = \frac{PF}{PC} = \lambda$ 。



- (1) 求证： $EF \parallel$  平面  $PAD$ ；
- (2) 当  $\lambda = \frac{1}{2}$  时，求异面直线  $BF$  与  $CD$  所成角的余弦值；
- (3) 是否存在实数  $\lambda$ ，使得平面  $AFD \perp$  平面  $PCD$ ？若存在，试求出  $\lambda$  的值；若不存在，请说明理由。

答案

- (1) 证明见解析；
- (2) 异面直线  $BF$  与  $CD$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ；
- (3) 当  $\lambda = \frac{2}{3}$  时，平面  $AFD \perp$  平面  $PCD$ 。

解析

- (1) 由已知， $\frac{PE}{PB} = \frac{PF}{PC} = \lambda$ ，

所以  $EF \parallel BC$ 。

因为  $BC \parallel AD$ ，所以  $EF \parallel AD$ 。

而  $EF \not\subset$  平面  $PAD$ ， $AD \subset$  平面  $PAD$ ，

所以  $EF \parallel$  平面  $PAD$ 。

- (2) 因为平面  $ABCD \perp$  平面  $PAC$ ，

平面 $ABCD \cap$ 平面 $PAC = AC$ ，且

$PA \perp AC$ ，

所以 $PA \perp$ 平面 $ABCD$ 。

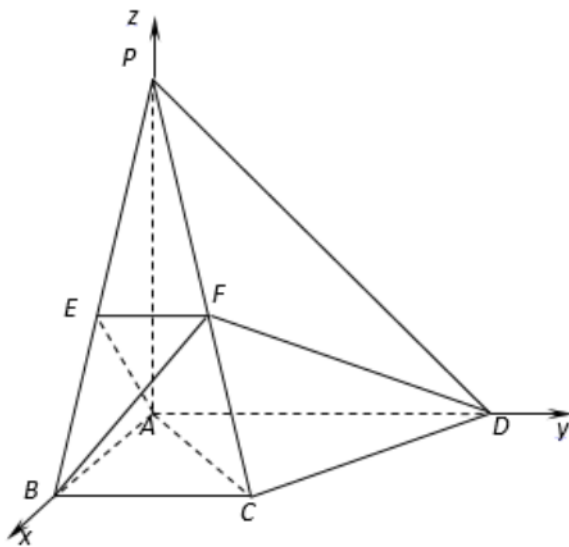
所以 $PA \perp AB$ ， $PA \perp AD$ 。

又因为 $AB \perp AD$ ，

所以 $PA, AB, AD$ 两两垂直。

如图所示，建立空间直角坐标系，

因为 $AB = BC = 1$ ， $PA = AD = 2$



所以 $A(0,0,0), B(1,0,0)$ ，

$C(1,1,0), D(0,2,0), P(0,0,2)$ 。

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时， $F$ 为 $PC$ 中点，

所以 $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ ，

所以 $\overrightarrow{BF} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \overrightarrow{CD} = (-1, 1, 0)$ 。

设异面直线 $BF$ 与 $CD$ 所成的角为 $\theta$ ，

$$\text{所以 } \cos \theta = |\cos \langle \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CD} \rangle| = \frac{|(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \cdot (-1, 1, 0)|}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}，$$

所以异面直线 $BF$ 与 $CD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

(3) 设 $F(x_0, y_0, z_0)$ ，则 $\overrightarrow{PF} = (x_0, y_0, z_0 - 2), \overrightarrow{PC} = (1, 1, -2)$ 。由已知 $\overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PC}$ ，所以

$$(x_0, y_0, z_0 - 2) = \lambda(1, 1, -2)，\text{ 所以 } \begin{cases} x_0 = \lambda, \\ y_0 = \lambda, \\ z_0 = 2 - 2\lambda. \end{cases} \text{ 所以 } \overrightarrow{AF} = (\lambda, \lambda, 2 - 2\lambda)。$$

设平面 $AFD$ 的一个法向量为 $n_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ，因为 $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 0)$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} n_1 \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \\ n_1 \cdot \overrightarrow{AD} = 0. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \lambda x_1 + \lambda y_1 + (2 - 2\lambda)z_1 = 0, \\ 2y_1 = 0. \end{cases} \text{ 令 } z_1 = \lambda, \text{ 得 } n_1 = (2\lambda - 2, 0, \lambda)。$$

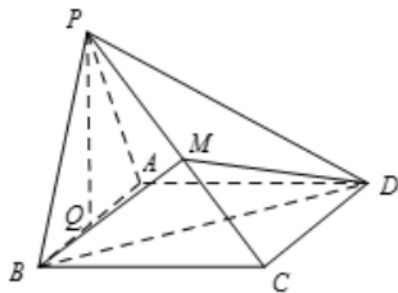
设平面 $PCD$ 的一个法向量为 $n_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ，因为 $\overrightarrow{PD} = (0, 2, -2), \overrightarrow{CD} = (-1, 1, 0)$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} n_2 \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \\ n_2 \cdot \overrightarrow{CD} = 0. \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2y_2 - 2z_2 = 0, \\ -x_2 + y_2 = 0. \end{cases} \text{ 令 } x_2 = 1, \text{ 则 } n_2 = (1, 1, 1)。$$

若平面 $AFD \perp$ 平面 $PCD$ ，则 $n_1 \cdot n_2 = 0$ ，所以 $(2\lambda - 2) + \lambda = 0$ ，解得 $\lambda = \frac{2}{3}$ 。

所以当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时，平面 $AFD \perp$ 平面 $PCD$ 。

- 7 如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面  $ABCD$  为菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ，侧面  $PAB$  是边长为 2 的正三角形，侧面  $PAB \perp$  底面  $ABCD$ 。



- (1) 设  $AB$  的中点为  $Q$ ，求证： $PQ \perp$  平面  $ABCD$ ；
- (2) 求斜线  $PD$  与平面  $ABCD$  所成角的正弦值；
- (3) 在侧棱  $PC$  上存在一点  $M$ ，使得二面角  $M-BD-C$  的大小为  $60^\circ$ ，求  $\frac{CM}{CP}$  的值。

答案

- (1) 答案见解析。
- (2) 答案见解析。
- (3) 答案见解析。

解析

- (1) 因为侧面  $PAB$  是正三角形， $AB$  的中点为  $Q$ ，所以  $PQ \perp AB$ ，  
因为侧面  $PAB \perp$  底面  $ABCD$ ，侧面  $PAB \cap$  底面  $ABCD = AB$ ， $PQ \subset$  侧面  $PAB$ ，  
所以  $PQ \perp$  平面  $ABCD$ 。
- (2) (II) 连结  $AC$ ，设  $AC \cap BD = O$ ，

建立空间直角坐标系  $O-xyz$ ，

则  $O(0,0,0)$ ， $B(\sqrt{3},0,0)$ ， $C(0,1,0)$ ，

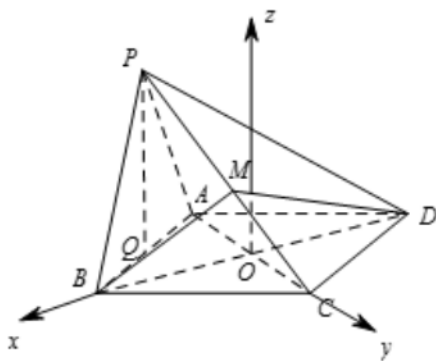
$D(-\sqrt{3},0,0)$ ， $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ ，

$\overrightarrow{PD} = (-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{3})$ ，平面  $ABCD$  的法向量  $\vec{m} = (0,0,1)$ ，

设斜线  $PD$  与平面  $ABCD$  所成角为  $\alpha$ ，

$$\text{则 } \sin \alpha = |\cos \langle \vec{m}, \overrightarrow{PD} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \overrightarrow{PD}|}{|\vec{m}| |\overrightarrow{PD}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{27}{4} + \frac{1}{4} + 3}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

- (3) 设  $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{CP} = (\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t, \sqrt{3}t)$ ，则  $M(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t + 1, \sqrt{3}t)$ ，



$$\overrightarrow{BM} = (\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}, -\frac{3}{2}t + 1, \sqrt{3}t), \overrightarrow{DB} = 2\sqrt{3}(1, 0, 0),$$

设平面 $MBD$ 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ , 则 $\vec{n} \perp \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow (\frac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3})x + (-\frac{3}{2}t + 1)y + \sqrt{3}tz = 0,$$

取 $z = \sqrt{3}$ , 得 $\vec{n} = (0, \frac{6t}{3t-2}, \sqrt{3})$ , 又平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{m} = (0, 0, 1)$

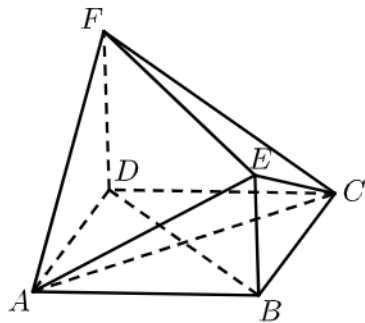
$$\text{所以 } |\frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|}| = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = |\cos 60^\circ|, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + (\frac{6t}{3t-2})^2}} = \frac{1}{2},$$

解得 $t = 2$  (舍去) 或 $t = \frac{2}{5}$ . 所以, 此时 $\frac{CM}{CP} = \frac{2}{5}$ .

## 二、空间中的距离

8 如图, 四边形 $ABCD$ 是边长为2的菱形,  $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ,  $DF = 2BE = 2$ ,  $BE \parallel DF$ ,

$$FC = AF = 2\sqrt{2}.$$



- (1) 求证: 平面 $ACE \perp$ 平面 $BDFE$ .
- (2) 求点 $F$ 到平面 $ACE$ 的距离.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

解析

- (1)  $\because FC = 2\sqrt{2}, DC = DF = 2,$   
 $\therefore FC^2 = DC^2 + DF^2,$   
 $\therefore DF \perp DC,$  同理 $DF \perp DA$   
 $\therefore DF \perp$ 平面 $ABCD,$   
 $\therefore DF \perp AC,$  又四边形 $ABCD$ 为菱形,  
 $\therefore DB \perp AC.$

$$\because BD \cap DF = D,$$

$$\therefore AC \perp \text{平面} BDFE.$$

$$\because AC \subset \text{平面} AEC,$$

$$\therefore \text{平面} AEC \perp \text{平面} BDFE.$$

(2) ①: 设  $F$  到平面  $ACE$  的距离为  $h$ ,  $AC \cap BD = O$ , 连接  $OE, OF$ , 由 (1) 可知四边形  $BDFE$  为直角梯形,  $S_{\triangle OFE} = S_{\text{四边形} BDFE} - S_{\triangle OBE} - S_{\triangle ODF} = \frac{3}{2}$ ,

$$\text{又} \because AO \perp \text{平面} BDFE,$$

$$\therefore V_{\text{三棱锥} OEF} = \frac{1}{3} AO \cdot S_{\triangle OFE} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{又} \triangle OBE \text{ 中, } OE = \sqrt{OB^2 + BE^2} = \sqrt{2}, S_{\triangle AEO} = \frac{1}{2} AO \cdot OE = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

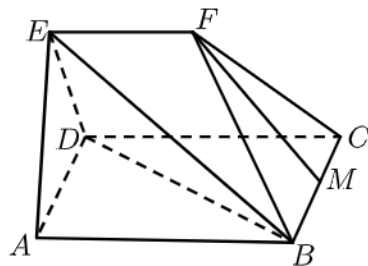
$$\therefore V_{\text{三棱锥} F-OEA} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{\triangle OAE} = \frac{\sqrt{6}}{6} h, \text{ 由 } V_{\text{三棱锥} F-OEA} = V_{\text{三棱锥} A-OEF}, \text{ 解得: } h = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

所以点  $F$  到平面  $ACE$  的距离为  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

②: 由 (1) 平面  $AEC \perp$  平面  $BDFE$ , 又平面  $AEC \cap$  平面  $BDFE = OE$ , 且  $F \in$  平面  $BDFE$ , 过  $F$  作  $FH \perp OE$ , 垂足为  $H$  点, 则  $FH \perp$  平面  $ACE$ , 所以  $FH$  即为点  $F$  到平面  $ACE$  的距离, 分别以  $DB, DF$  为  $x, y$  轴建立直角坐标系, 则  $O(1, 0), E(2, 1), F(0, 2)$ , 则  $OE: x - y - 1 = 0, d = FH = \frac{|-2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .

9 在如图所示的五面体  $ABCDEF$  中, 四边形  $ABCD$  为菱形, 且  $\angle DAB = 60^\circ$ ,

$EA = ED = AB = 2EF = 2, EF \parallel AB, M$  为  $BC$  的中点.



(1) 求证:  $FM \parallel$  平面  $BDE$ .

(2) 若平面  $ADE \perp$  平面  $ABCD$ , 求点  $F$  到平面  $BDE$  的距离.

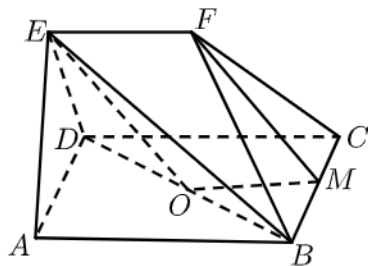
答案

(1) 证明见解析.

(2)  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ .

解析

- (1) 取 $BD$ 的中点 $O$ , 连接 $OM, OE$ ,



因为 $O, M$ 分别为 $BD, BC$ 的中点,

所以 $OM \parallel CD$ , 且 $OM = \frac{1}{2}CD$ ,

因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $CD \parallel AB$ ,

又 $EF \parallel AB$ , 所以 $CD \parallel EF$ ,

又 $AB = CD = 2EF$ , 所以 $EF = \frac{1}{2}CD$ ,

所以 $OM \parallel EF$ , 且 $OM = EF$ ,

所以四边形 $OMFE$ 为平行四边形,

所以 $MF \parallel OE$ ,

又 $OE \subset$ 平面 $BDE$ ,  $MF \not\subset$ 平面 $BDE$ ,

所以 $MF \parallel$ 平面 $BDE$ .

- (2) 由(1)得 $FM \parallel$ 平面 $BDE$ ,

所以点 $F$ 到平面 $BDE$ 的距离等于点 $M$ 到平面 $BDE$ 的距离,

取 $AD$ 的中点 $H$ , 连接 $EH, BH$ ,

因为 $EA = ED$ , 四边形 $ABCD$ 为菱形, 且 $\angle DAB = 60^\circ$ ,

所以 $EH \perp AD$ ,  $BH \perp AD$ ,

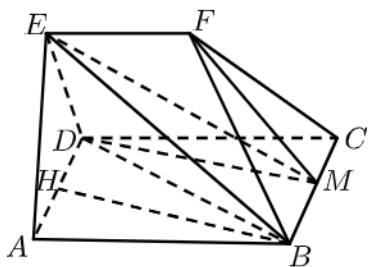
因为平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$ , 平面 $ADE \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ,  $EH \subset$ 平面 $ADE$ ,

所以 $EH \perp$ 平面 $ABCD$ , 所以 $EH \perp BH$ ,

易得 $EH = BH = \sqrt{3}$ , 所以 $BE = \sqrt{6}$ ,

$$\text{所以 } S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{2},$$

设点 $F$ 到平面 $BDE$ 的距离为 $h$ , 连接 $DM$ ,

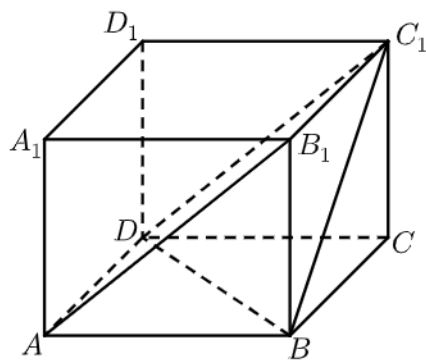


$$\text{则 } S_{\triangle BDM} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{连接 } EM, \text{ 由 } V_{\text{三棱锥 } E-BDM} = V_{\text{三棱锥 } M-BDE}, \text{ 得 } \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \times h \times \frac{\sqrt{15}}{2},$$

$$\text{解得 } h = \frac{\sqrt{15}}{5}, \text{ 即点 } F \text{ 到平面 } BDE \text{ 的距离为 } \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

10 长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 棱长  $AB = \sqrt{3}$ ,  $AA_1 = 1$ , 截面  $AB_1C_1D$  为正方形.



(1) 求异面直线  $BC_1$  与  $AD$  所成角的大小.

(2) 求点  $B_1$  到平面  $DBC_1$  的距离.

(3) 求二面角  $B_1 - C_1D - B$  的大小.

答案

(1)  $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}.$

(2)  $\frac{2\sqrt{57}}{19}.$

(3)  $\arccos \frac{2\sqrt{57}}{19}.$

解析

(1) 方法一:  $\because$  截面  $AB_1C_1D$  为正方形,

$$\therefore AB_1 = B_1C_1,$$

$$\text{又 } \because AB = \sqrt{3}, AA_1 = BB_1 = 1,$$

$$\therefore AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2,$$

$$AB_1^2 = 3 + 1 = 4,$$

$$\therefore AB_1 = 2 = B_1C_1,$$

在  $\triangle BCC_1$  中,

$$BC = B_1C_1 = 2,$$

$$CC_1 = AA_1 = 1,$$

$$CC_1 \perp BC,$$

$$\therefore \cos \angle C_1BC = \frac{BC}{BC_1},$$

$$\text{又} \because BC_1^2 = BC^2 + CC_1^2 = 4 + 1 = 5,$$

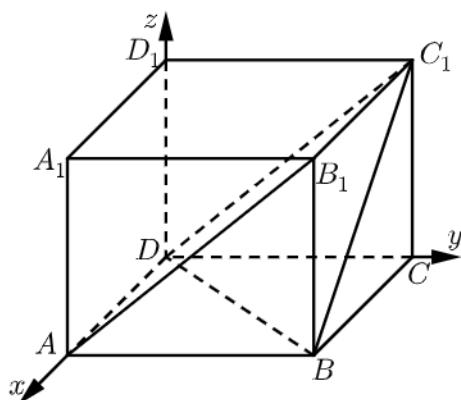
$$\therefore BC_1 = \sqrt{5},$$

$$\cos \angle C_1BC = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

而  $AD \parallel BC$ ,

$$\therefore BC_1 \text{ 与 } AD \text{ 所成角大小为 } \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

方法二：以  $D$  为原点， $DA$  为  $x$  轴， $DC$  为  $y$  轴， $DD_1$  为  $z$  轴建立空间直角坐标系，



$$A(2, 0, 0), B(2, \sqrt{3}, 0), C_1(0, \sqrt{3}, 1), D(0, 0, 0),$$

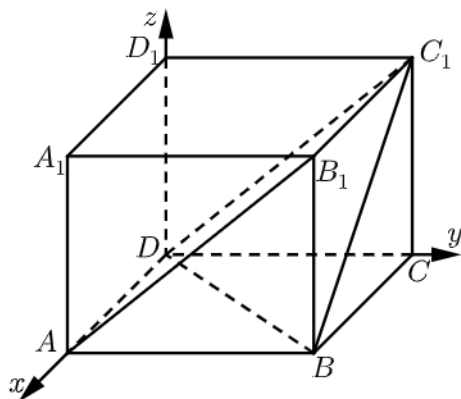
$$\overrightarrow{AD} = (-2, 0, 0),$$

$$\overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 1),$$

$$\cos \langle \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{4}{2 \times \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore BC_1 \text{ 与 } AD \text{ 所成角大小为 } \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(2) 建立如图所示的空间直角坐标系  $D-xyz$ ，则：



$$B(2, \sqrt{3}, 0), D(0, 0, 0), C_1(0, \sqrt{3}, 1),$$

$$\overrightarrow{BD} = (-2, -\sqrt{3}, 0),$$

$$\overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 1),$$

设平面  $BDC_1$  的法向量为  $\vec{m} = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \vec{BD} \cdot \vec{m} = 0 \\ \vec{BC_1} \cdot \vec{m} = 0 \end{cases}, \quad \therefore \begin{cases} -2x - \sqrt{3}y = 0 \\ -2x + z = 0 \end{cases},$$

令  $x = \sqrt{3}$ , 则  $z = 2\sqrt{3}$ ,  $y = -2$ ,

即  $\vec{m} = (\sqrt{3}, -2, 2\sqrt{3})$ ,

又  $B_1(2, \sqrt{3}, 1)$ ,  $\vec{B_1B} = (0, 0, -1)$ ,

$$\cos \langle \vec{B_1B}, \vec{m} \rangle = \frac{\vec{B_1B} \cdot \vec{m}}{|\vec{B_1B}| |\vec{m}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{1 \times \sqrt{3+12+4}} = -\frac{2\sqrt{57}}{19},$$

$$\therefore d = |\vec{B_1B}| \cdot |\cos \langle \vec{B_1B}, \vec{m} \rangle|,$$

$$\therefore d = \frac{2\sqrt{57}}{19},$$

即点  $B_1$  到平面  $DBC$  距离为  $\frac{2\sqrt{57}}{19}$ .

(3)  $\because B_1(2, \sqrt{3}, 1)$ ,  $C_1(0, \sqrt{3}, 1)$ ,  $D(0, 0, 0)$ ,

$$\therefore \vec{DB_1} = (2, \sqrt{3}, 1),$$

$$\vec{DC_1} = (0, \sqrt{3}, 1),$$

设平面  $B_1C_1D$  的一个法向量为  $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$ ,

$$\begin{cases} \vec{DB_1} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{DC_1} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \quad \therefore \begin{cases} 2x_1 + \sqrt{3}y_1 + z_1 = 0 \\ \sqrt{3}y_1 + z_1 = 0 \end{cases},$$

令  $z_1 = -3$ , 则  $y_1 = \sqrt{3}$ ,

$$2x_1 + 3 - 3 = 0,$$

$$\therefore \vec{n} = (0, \sqrt{3}, -3) = (0, 1, -\sqrt{3}),$$

$$\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} = \frac{2\sqrt{57}}{19},$$

故二面角  $B_1 - C_1D - B$  大小为  $\arccos \frac{2\sqrt{57}}{19}$ .

11

如图1, 四边形  $ABCD$  是边长为2的菱形,  $\angle BAD = 60^\circ$ ,  $E$  为  $CD$  的中点, 以  $BE$  为折痕将  $\triangle BCE$  折起到  $\triangle PBE$  的位置, 使得平面  $PBE \perp$  平面  $ABCD$ , 如图2.

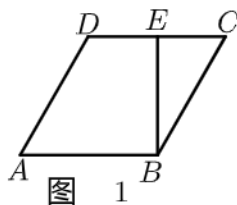


图 1

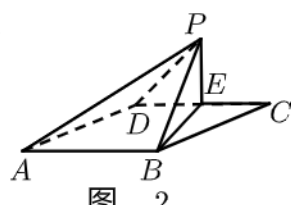


图 2

- (1) 证明：平面 $PAB \perp$ 平面 $PBE$  .  
 (2) 求点 $D$ 到平面 $PAB$ 的距离 .

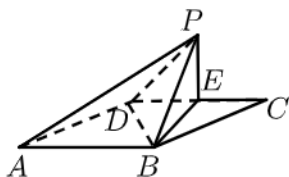
答案

- (1) 证明见解析 .  
 (2)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  .

解析

- (1) 因为 $CE \perp BE$  ,  
 所以 $PE \perp BE$  .  
 又平面 $PBE \perp$ 平面 $ABCD$  , 平面 $PBE \cap$ 平面 $ABCD = BE$  ,  $PE \subset$ 平面 $PBE$  ,  
 所以 $PE \perp$ 平面 $ABCD$  .  
 又 $AB \subset$ 平面 $ABCD$  ,  
 所以 $PE \perp AB$  .  
 由已知 ,  $\triangle BCD$ 是等边三角形 , 且 $E$ 为 $CD$ 的中点 ,  
 所以 $BE \perp CD$  .  
 因为 $AB \parallel CD$  ,  
 所以 $AB \perp BE$  .  
 又 $PE \cap BE = E$  ,  
 所以 $AB \perp$ 平面 $PBE$  .  
 又 $AB \subset$ 平面 $PAB$  ,  
 所以平面 $PAB \perp$ 平面 $PBE$  .

- (2) 解法一：如图 , 连接 $BD$  , 在 $\triangle ABD$ 中 ,  $AB = AD = 2$  ,  $\angle BAD = 60^\circ$  ,



所以 $S_{\triangle ABD} = \sqrt{3}$  .

由(1)知 ,  $PE \perp$ 平面 $ABD$  , 且 $PE = 1$  ,

所以三棱锥 $P-ABD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

在 $\text{Rt}\triangle PBE$ 中,  $PE = 1$ ,  $BE = \sqrt{3}$ , 得 $PB = 2$ .

由(1)知,  $AB \perp$ 平面 $PBE$ , 所以 $AB \perp PB$ .

$$S_{\triangle ABP} = 2.$$

设点 $D$ 到平面 $PAB$ 的距离为 $d$ .

则三棱锥 $D-PAB$ 的体积 $V' = \frac{1}{3} \times 2 \times d = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 解得 $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

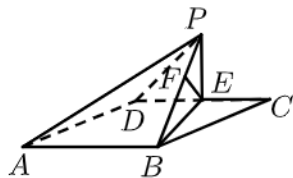
解法二:

因为 $DE \parallel AB$ ,  $AB \subset$ 平面 $PAB$ ,  $DE \not\subset$ 平面 $PAB$ ,

所以 $DE \parallel$ 平面 $PAB$ .

所以点 $E$ 到平面 $PAB$ 的距离等于点 $D$ 到平面 $PAB$ 的距离.

过点 $E$ 作 $PB$ 的垂线, 垂足为 $F$ , 即 $EF \perp PB$ .



由(1)知, 平面 $PAB \perp$ 平面 $PBE$ , 平面 $PAB \cap$ 平面 $PBE = PB$ ,  $EF \subset$ 平面 $PBE$ ,

所以 $EF \perp$ 平面 $PAB$ , 即 $EF$ 为点 $D$ 到平面 $PAB$ 的距离.

由(1)知,  $PE \perp BE$ .

在 $\text{Rt}\triangle PBE$ 中,  $PE = 1$ ,  $BE = \sqrt{3}$ , 得 $PB = 2$ .

$$\text{又 } PE \cdot BE = PB \cdot EF,$$

$$\text{所以 } EF = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以点 $D$ 到平面 $PAB$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .