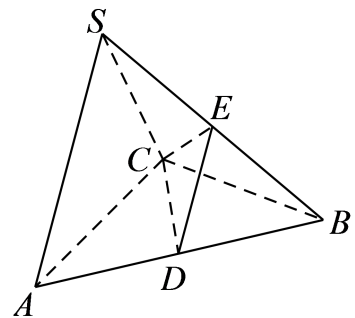


# 立体几何与空间向量综合

## 一、空间中的角度

### 例1

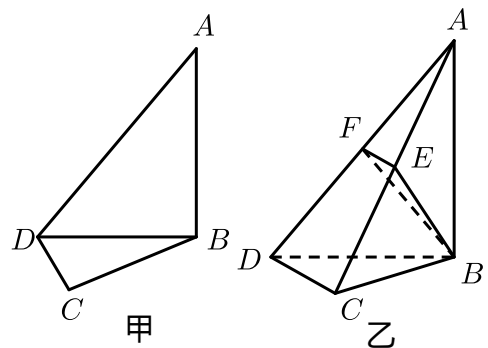
1. 如图，在三棱锥 $S-ABC$ 中，底面 $ABC$ 是正三角形， $AB=4$ ， $SA=SC=2\sqrt{3}$ ，侧面 $SAC\perp$ 底面 $ABC$ ， $D$ ， $E$ 分别为 $AB$ ， $SB$ 的中点。



- (1) 求证： $AC\perp SB$ 。
- (2) 求直线 $SC$ 与平面 $ECD$ 所成角的正弦值。
- (3) 求二面角 $E-CD-B$ 的余弦值。

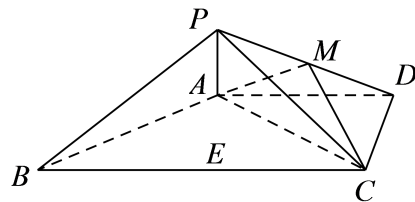
### 练1

2. 如图甲，在平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle A=45^\circ$ ， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle ADC=105^\circ$ ， $AB=BD$ ，现将四边形 $ABCD$ 沿 $BD$ 折起，使平面 $ABD\perp$ 平面 $BDC$ （如图乙），设点 $E$ 、 $F$ 分别为棱 $AC$ 、 $AD$ 的中点。

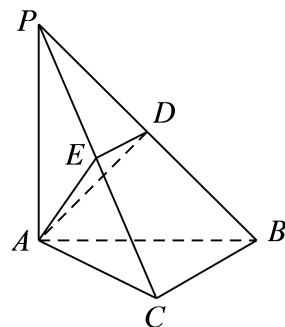


- (1) 求证： $DC\perp$ 平面 $ABC$ 。
- (2) 求 $BF$ 与平面 $ABC$ 所成角的正弦。
- (3) 求二面角 $B-EF-A$ 的余弦。

3. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp CD$ ，且 $AD = CD = 2\sqrt{2}$ ， $BC = 4\sqrt{2}$ ， $PA = 2$ ，点 $M$ 在 $PD$ 上．



- (1) 求证： $AB \perp PC$ ．  
 (2) 求异面直线 $PB$ 与 $DC$ 所成角的余弦值．  
 (3) 若二面角 $M-AC-D$ 的平面角的大小为 $45^\circ$ ，求直线 $BM$ 与平面 $PAC$ 所成角的正弦值．
4. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABC$ ，点 $D, E$ 分别在棱 $PB, PC$ 上， $PA = AB = 2$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $\angle BCA = 90^\circ$ ，且 $DE \parallel BC$ ．

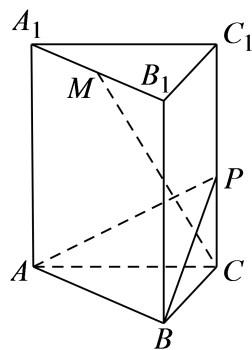


- (1) 求证： $BC \perp$ 平面 $PAC$ ．  
 (2) 当点 $D$ 为 $PB$ 的中点时，求 $AD$ 与平面 $PAC$ 所成角的正切值．  
 (3) 是否存在点 $E$ 使得二面角 $A-DE-P$ 为直二面角？并说明理由．

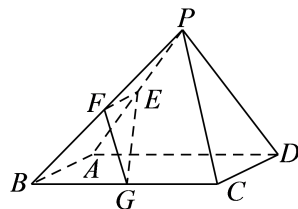
## 二、动点问题

### 例2

5. 如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为4正三角形， $AA_1 \perp$ 平面 $ABC$ ， $AA_1 = 2\sqrt{6}$ ， $M$ 为 $A_1B_1$ 的中点．



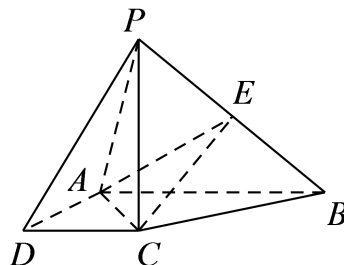
- (1) 求证： $MC \perp AB$  .
- (2) 在棱  $CC_1$  上是否存在点  $P$  , 使得  $MC \perp$  平面  $ABP$  ? 若存在 , 确定点  $P$  的位置 ; 若不存在 , 说明理由 .
- (3) 若点  $P$  为  $CC_1$  的中点 , 求二面角  $B - AP - C$  的余弦值 .
6. 已知在四棱锥  $P - ABCD$  中 , 底面  $ABCD$  是边长为 4 的正方形 ,  $\triangle PAD$  是正三角形 , 平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$  ,  $E, F, G$  分别是  $PA, PB, BC$  的中点 .



- (1) 求证： $EF \perp$  平面  $PAD$  .
- (2) 求平面  $EFG$  与平面  $ABCD$  所成锐二面角的大小 .
- (3) 线段  $PD$  上是否存在一个动点  $M$  , 使得直线  $GM$  与平面  $EFG$  所成角为  $\frac{\pi}{6}$  , 若存在 , 求线段  $PM$  的长度 , 若不存在 , 说明理由 .

## 练2

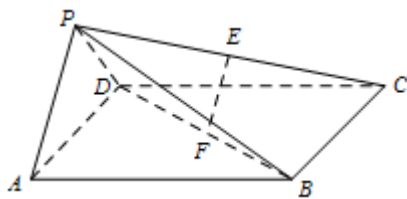
7. 如图 , 在四棱锥  $P - ABCD$  中 , 四边形  $ABCD$  是直角梯形 ,  $AB \perp AD$  ,  $AB \parallel CD$  ,  $PC \perp$  底面  $ABCD$  ,  $AB = 2AD = 2CD = 4$  ,  $PC = 2a$  ,  $E$  是  $PB$  的中点 .



- (1) 求证：平面  $EAC \perp$  平面  $PBC$  .
- (2)

若二面角  $P-AC-E$  的余弦值为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，求直线  $PA$  与平面  $EAC$  所求角的正弦值。

8. 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是边长为 2 的正方形，侧面  $PAD \perp$  底面  $ABCD$ ，且  $PA = PD = \frac{\sqrt{2}}{2}AD$ ， $E, F$  分别为  $PC, BD$  的中点。



- (1) 求证： $EF \parallel$  平面  $PAD$ ；  
 (2) 求证：面  $PAB \perp$  平面  $PDC$ ；  
 (3) 在线段  $AB$  上是否存在点  $G$ ，使得二面角  $C-PD-G$  的余弦值为  $\frac{1}{3}$ ？说明理由。

### 三、空间中的距离

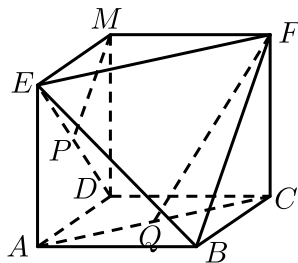
过空间不在平面  $\alpha$  内一点  $O$  做平面  $\alpha$  的垂线，垂足为  $A$ ，另过  $O$  作  $OB$  交  $\alpha$  于  $B$ ，且  $OA$  与  $OB$  不

重合，设平面  $\alpha$  的法向量为  $\vec{m}$ ， $OB$  与平面  $\alpha$  所成的角为  $\theta$ ，则  $\sin \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{m}| |\vec{OB}|}$ ，于是点  $O$  到平

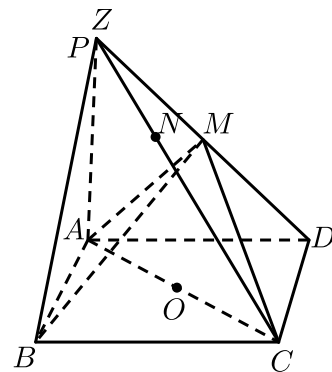
$$\text{面 } \alpha \text{ 的距离 } |OA| = |\vec{OB}| \cdot \sin \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{OB}|}{|\vec{m}|}$$

#### 例3

9. 如图所示，已知四边形  $ABCD$ 、 $EADM$  和  $MDCF$  都是边长为  $a$  的正方形，点  $P, Q$  分别是  $ED$  和  $AC$  的中点。求： $P$  点到平面  $EFB$  的距离。



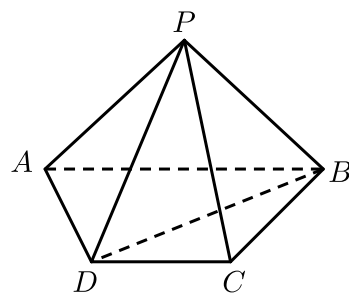
10. 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是矩形， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $PA = AD = 4$ ， $AB = 2$ 。以  $AC$  的中点  $O$  为球心、 $AC$  为直径的球面交  $PD$  于点  $M$ ，交  $PC$  于点  $N$ 。



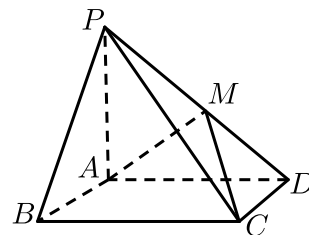
- ( 1 ) 求证：平面  $ABM \perp$  平面  $PCD$  ；  
 ( 2 ) 求直线  $CD$  与平面  $ACM$  所成的角的正弦值 ；  
 ( 3 ) 求点  $N$  到平面  $ACM$  的距离 ．

### 练3

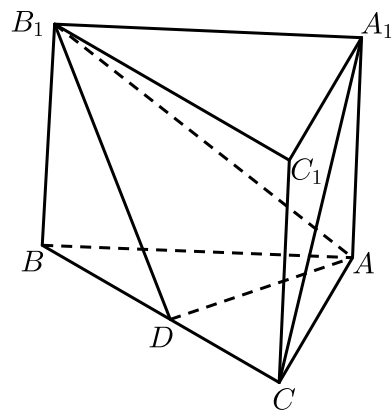
11. 如图，四棱锥  $P-ABCD$  中，侧面  $PAB$  是等腰直角三角形， $PA = PB$ ， $BC \perp$  平面  $PAB$ ， $AB = BC = 2$ ， $AD = BD = \sqrt{5}$ ．



- ( 1 ) 求证： $PA \perp$  平面  $PBC$  ．  
 ( 2 ) 求顶点  $C$  到平面  $PAD$  的距离 ．
12. 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，底面  $ABCD$  是矩形， $PA \perp$  平面  $ABCD$ ， $PA = AD = 4$ ， $AB = 2$ ， $M$  是  $PD$  中点 ．



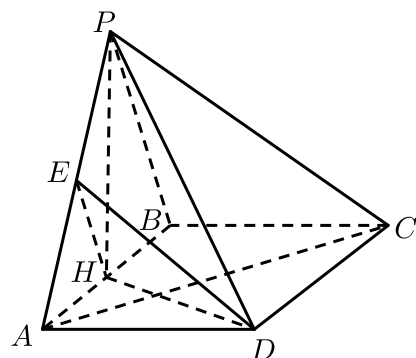
- ( 1 ) 求直线  $CD$  与平面  $ACM$  所成的角的正弦值 ．  
 ( 2 ) 求点  $P$  到平面  $ACM$  的距离 ．
13. 如图，在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $D$  是  $BC$  的中点，且  $AD \perp BC$ ，四边形  $ABB_1A_1$  为正方形 ．



( 1 ) 求证： $A_1C \parallel$ 平面 $AB_1D$  .

( 2 ) 若 $\angle BAC = 60^\circ$  ,  $BC = 4$  , 求点 $A_1$ 到平面 $AB_1D$ 的距离 .

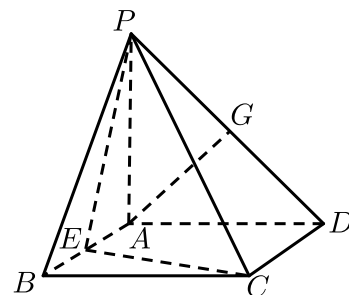
14. 如图，四棱锥 $P - ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形，侧面 $PAB$ 是正三角形， $AB = 2$  ,  $BC = \sqrt{2}$  ,  $PC = \sqrt{6}$  .  $E$ 、 $H$ 分别为 $PA$ 、 $AB$ 的中点 .



( 1 ) 求证： $PH \perp AC$  .

( 2 ) 求点 $P$ 到平面 $DEH$ 的距离 .

15. 如图，在四棱锥 $P - ABCD$ 中， $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，四边形 $ABCD$ 为正方形， $PA = AB = 2$  ,  $E$ 是 $AB$ 的中点， $G$ 是 $PD$ 的中点 .



( 1 ) 求证： $AG \parallel$ 平面 $PEC$  .

( 2 ) 求证：平面 $PCD \perp$ 平面 $PEC$  .

( 3 ) 求点 $D$ 到面 $PEC$ 的距离 .

