

空间向量的运算习题

一、空间向量线性运算

1 判断正误，正确的画“√”，错误的画“×”。

1. 在空间中，单位向量唯一。()
2. 在空间中，任意一个向量都可以进行平移。()
3. 在空间中，互为相反向量的两个向量必共线。()
4. 空间两非零向量相加时，一定可以用平行四边形法则运算。()
5. 空间中任意两个单位向量必相等。()
6. $\lambda \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相同。()
7. 在四边形 $ABCD$ 中，一定有 $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ ()。

答案

× √ √ × × × ×

解析

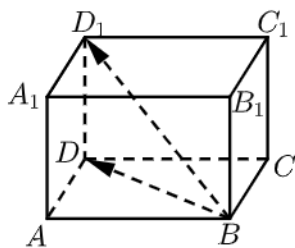
1. 单位向量的模为1，但方向不确定，故不唯一。
4. 平行四边形法则适用于两个不共线的非零向量相加。
5. 任意两个单位向量模相等，方向不一定相同。
7. 在平行四边形 $ABCD$ 中，才有 $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ 。

2 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $\vec{BA} + \vec{BC} + \vec{DD_1} = ()$ 。

- | | |
|-------------------|-----------------|
| A. $\vec{D_1B_1}$ | B. $\vec{D_1B}$ |
| C. $\vec{DB_1}$ | D. $\vec{BD_1}$ |

答案 D

解析 如图所示，



长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD_1} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BD_1}.$$

故选D.

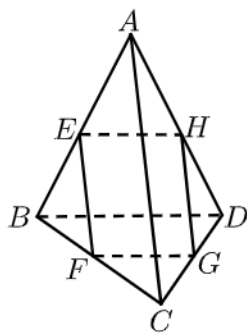
- 3 在平行六面体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, 若 $\overrightarrow{AC'} = x\overrightarrow{AB} + \frac{y}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{z}{3}\overrightarrow{CC'}$, 则 $x + y + z =$ _____.

答案 6

解析 在平行六面体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中, 又 $\overrightarrow{AC'} = x\overrightarrow{AB} + \frac{y}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{z}{3}\overrightarrow{CC'}$,

$$\text{所以 } \begin{cases} x = 1 \\ \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{z}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 所以 } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}, \text{ 所以 } x + y + z = 6.$$

- 4 如图, 在空间四边形 $ABCD$ 中, 连接 AC, BD , E, F, G, H 分别为 AB, BC, CD, DA 边上的中点, 则下列各式中成立的是 ().



- A. $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$
 B. $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GE} = \vec{0}$
 C. $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$
 D. $\overrightarrow{EF} - \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$

答案 B

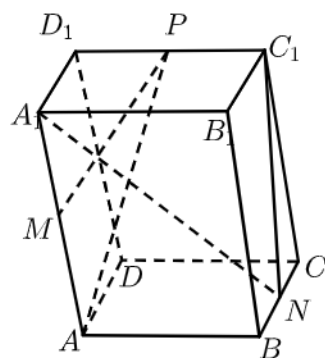
解析 $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{GH}$,

易证四边形 $EFGH$ 为平行四边形,

故 $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GH} = \vec{0}$.

故选 B.

5 如图所示, 在空间几何体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 各面为平行四边形, 设 $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, M, N, P 分别是 AA_1, BC, C_1D_1 的中点, 试用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 表示以下各向量.



(1) $\overrightarrow{AP}$.

(2) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NC_1}$.

答案 (1) $\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

(2) $\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$.

解析 (1) 因为 P 是 C_1D_1 的中点,

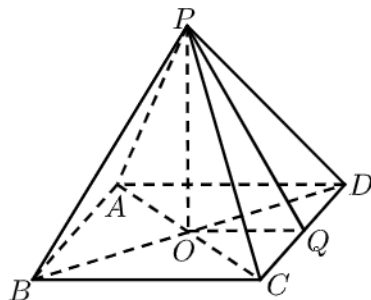
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1P} \\ &= \vec{a} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C_1} \\ &= \vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= \vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}.\end{aligned}$$

(2) 因为 M 是 AA_1 的中点,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AP}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \left(\vec{a} + \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}, \\
 &\text{又 } \overrightarrow{NC_1} \\
 &= \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CC_1} \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1} \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} \\
 &= \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a}, \\
 &\text{所以 } \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NC_1} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right) + \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\
 &= \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}.
 \end{aligned}$$

6 如图，已知正四棱锥 $P-ABCD$ ，点 O 是正方形 $ABCD$ 的中心， Q 是 CD 的中点。



- (1) 若 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PQ} + x\overrightarrow{PC} + y\overrightarrow{PA}$ ，求 x, y 的值。
 (2) $\overrightarrow{PA} = m\overrightarrow{PO} + n\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PD}$ ，求 m, n 的值。

答案

(1) $x = y = -\frac{1}{2}$.

(2) $m = 2, n = -2$.

解析

(1) 因为 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PQ} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{PQ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PA}$

所以 $x = y = -\frac{1}{2}$.

(2) 因为 O 为 AC 的中点， Q 为 CD 的中点，

所以 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PO}$ ， $\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PQ}$ ，

所以 $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{PC}$ ， $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PD}$ ，

所以 $\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{PO} - 2\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PD}$ ，

所以 $m = 2, n = -2$.

二、空间向量基本定理

7 已知空间向量 $\vec{a}, \vec{b}$, 且 $\vec{AB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{BC} = -5\vec{a} + 6\vec{b}$, $\vec{CD} = 7\vec{a} - 2\vec{b}$, 则一定共线的三点是 () .

A. A, B, D

B. A, B, C

C. C, B, D

D. A, C, D

答案 A

解析 $\vec{BD} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$, 显然 $\vec{BD} = 2\vec{AB}$, 所以 A, B, D 共线 .
故选 A .

8 已知 A, B, C 三点不共线, O 是平面 ABC 外任意一点, 若由 $\vec{OP} = \frac{1}{5}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB} + \lambda\vec{OC}$ 确定的点 P 与 A, B, C 三点共面, 则 $\lambda =$ _____ .

答案 $\frac{2}{15}$

解析 根据 P, A, B, C 四点共面, 知存在实数 x, y, z , 使得 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$ 成立, 其中 $x + y + z = 1$, 于是 $\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + \lambda = 1$, 所以 $\lambda = \frac{2}{15}$.

三、空间向量数量积

9 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB = AC = AD = 2$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ 等于 () .

A. -2

B. 2

C. $-2\sqrt{3}$

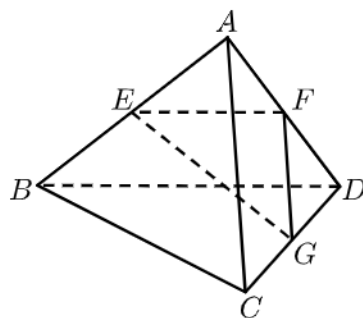
D. $2\sqrt{3}$

答案 A

解析 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
 $= 0 - 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = -2$.

故选：A.

10 如图，已知空间四边形每条边和对角线长都等于 a ，点 E 、 F 、 G 分别是 AB 、 AD 、 DC 的中点，则下列向量的数量积等于 a^2 的是 () .



- A. $2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$
- B. $2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB}$
- C. $2\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{AC}$
- D. $2\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CB}$

答案 C

解析 $2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2$ ，故A错；
 $2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} = -a^2$ ，故B错；
 $2\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$ ，故D错，只有C正确.

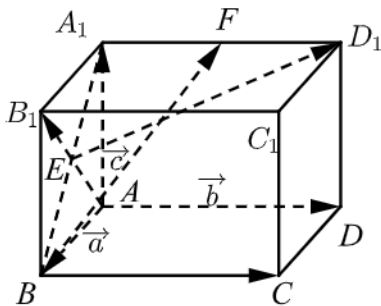
11 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = AA_1 = 2$ ， $AD = 4$ ， E 为侧面 AA_1B_1B 的中心， F 为 A_1D_1 的中点. 求下列向量的数量积.

- (1) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED_1}$.
- (2) $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB_1}$.

答案 (1) 16 .

(2) 0 .

解析 (1) 如图所示, 设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$,



则 $|\vec{a}| = |\vec{c}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$.

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{ED_1} = \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{EA_1} + \overrightarrow{A_1D_1}) = \vec{b} \cdot \left[\frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) + \vec{b} \right] = |\vec{b}|^2 = 4^2 = 16.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AB_1} &= (\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1F}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}) \\ &= \left(\vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 = 2^2 - 2^2 = 0. \end{aligned}$$

四、空间向量坐标运算

12 若 $A(m+1, n-1, 3)$, $B(2m, n, m-2n)$, $C(m+3, n-3, 9)$ 三点共线, 则 $m+n =$ _____ .

答案 0

解析 由题意, 得 $\overrightarrow{AB} = (m-1, 1, m-2n-3)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -2, 6)$.

因为 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AC}$, 所以 $\frac{m-1}{2} = \frac{1}{-2} = \frac{m-2n-3}{6}$,

解得 $m=0$, $n=0$, 所以 $m+n=0$.

13 (3分) 在空间直角坐标系中, 已知 $A(1, 0, -3)$, $B(4, -2, 1)$, 则 $|AB| = ()$.

A. $\sqrt{15}$

B. $\sqrt{29}$

C. $\sqrt{34}$

D. $\sqrt{149}$

答案 B

解析 $\vec{AB} = (3, -2, 4)$, $|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{29}$.

14 (3分) 已知 $A(2, -5, 1)$, $B(1, -4, 1)$, $C(2, -2, 4)$, 则 $\vec{AB}$ 与 $\vec{AC}$ 的夹角为 ().

A. $\frac{\pi}{2}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{6}$

答案 B

解析 空间向量的数量积运算.

$$\therefore A(2, -5, 1), B(1, -4, 1), C(2, -2, 4),$$

$$\therefore \vec{AB} = (-1, 1, 0), \vec{AC} = (0, 3, 3),$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1 \times 0 + 1 \times 3 + 0 \times 3 = 3.$$

$$\text{并且 } |\vec{AB}| = \sqrt{2}, |\vec{AC}| = 3\sqrt{2}.$$

$$\therefore \cos \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \times |\vec{AC}|} = \frac{3}{\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \vec{AB} \text{ 与 } \vec{AC} \text{ 的夹角为 } \frac{\pi}{3}.$$

故选: B.

15 (3分) 已知 $A(1, 2, -1)$ 关于面 xyO 的对称点为 B , 而 B 关于 x 轴对称的点为 C , 则 $\vec{BC} = ()$.

A. $(0, 4, 2)$

B. $(0, -4, -2)$

C. $(0, 4, 0)$

D. $(2, 0, -2)$

答案 B

解析 由已知可得 $B(1, 2, 1)$, $C(1, -2, -1)$, 所以 $\vec{BC} = (0, -4, -2)$.

16 (3分) 已知点 $A(-3, 1, -4)$, 则点 A 关于 x 轴对称的点的坐标为 ().

A. $(-3, -1, 4)$

B. $(-3, -1, -4)$

C. $(3, 1, 4)$

D. $(3, -1, -4)$

答案 A

解析 点 $A(-3, 1, -4)$ 关于 x 轴对称的点的坐标为 $(-3, -1, 4)$.
 故选A .

17 (3分) 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中, 点 $A(-2, 4, 3)$ 关于坐标平面 yOz 的对称的点是() .

- A. $(2, 4, 3)$ B. $(2, -4, 3)$ C. $(-2, -4, 3)$ D. $(-2, 4, -3)$

答案 A

解析 只需要将 x 轴上的分量取相反数即可, 选A

18 (3分) 已知向量 $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 0, -3)$, 则 $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 $\sqrt{22}$

解析 $\vec{a} + 2\vec{b} = (3, 2, -3)$,
 $\therefore |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$.