

立体几何综合问题

一、空间中的平行和垂直关系

1. 例题精讲

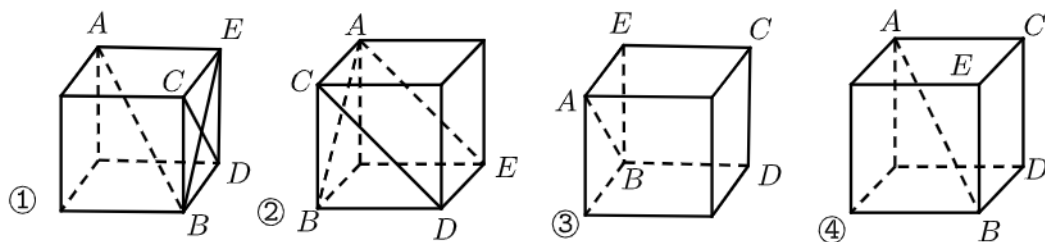
1 已知 α, β, γ 是空间三个不同的平面, a 是空间一条直线,则下列命题正确的是() .

- A. 若 $\alpha \perp \beta, a // \beta$, 则 $a \perp \alpha$
- B. $\alpha \perp \beta, a \perp \beta$, 则 $a // \alpha$
- C. 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\beta // \alpha$
- D. $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, \alpha \cap \beta = l$, 则 $l \perp \gamma$

2 已知直线 m 和平面 α, β , 则下列四个命题中正确的是() .

- A. 若 $\alpha \perp \beta, m \subset \beta$, 则 $m \perp \alpha$
- B. 若 $\alpha // \beta, m // \alpha$, 则 $m // \beta$
- C. 若 $\alpha // \beta, m \perp \alpha$, 则 $m \perp \beta$
- D. 若 $m // \alpha, m // \beta$, 则 $\alpha // \beta$

3 在下列四个正方体中, 能得出 $AB \perp CD$ 的是() .



- A. ①
- B. ①②
- C. ②③
- D. ④

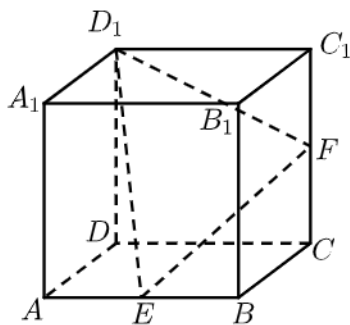
2. 课堂巩固

4 下列命题:

①垂直于同一条直线的两个平面互相平行；②垂直于同一个平面的两条直线互相平行；③一条直线在平面内，另一条直线与这个平面垂直，则这两条直线互相垂直．其中正确的个数是（ ）．

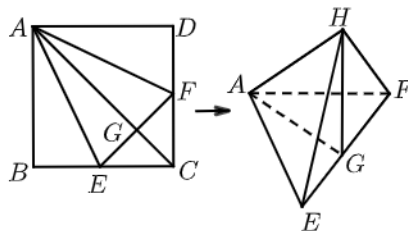
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

- 5 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 E, F 分别为棱 AB, CC_1 的中点，在平面 ADD_1A_1 内与平面 D_1EF 平行的直线（ ）．



- A. 不存在 B. 有1条 C. 有2条 D. 有无数条

- 6 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E, F 分别是 BC, CD 的中点， G 是 EF 的中点，现在沿 AE, AF 及 EF 把这个正方形折成一个空间图形，使 B, C, D 三点重合，重合后的点记为 H ，那么，在这个空间图形中必有（ ）．

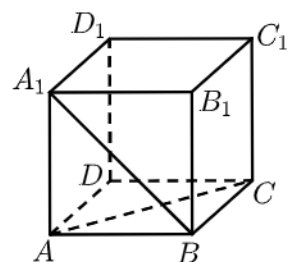


- A. $AG \perp \triangle EFH$ 所在平面 B. $AH \perp \triangle EFH$ 所在平面
C. $HF \perp \triangle AEF$ 所在平面 D. $HG \perp \triangle AEF$ 所在平面

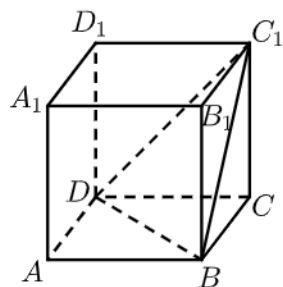
二、空间中的角度

1. 例题精讲

- 7 如右图所示，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 A_1B 与 AC 所成角的大小为 _____ ．



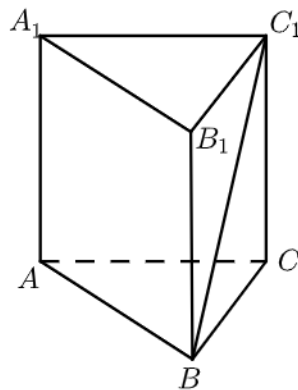
- 8 如图，已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ，则二面角 $C_1 - BD - C$ 的正切值为 _____，异面直线 A_1B_1 与 C_1D 所成角的大小为 _____。



2. 课堂巩固

- 9 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为 C_1D_1 的中点，则异面直线 AE 与 BC 所成角的余弦值为 _____。

- 10 如图，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 \perp$ 底面 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AA_1 = AC = CB$ ，则直线 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值是 ()。



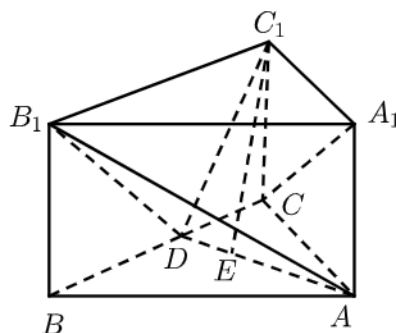
A. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

三、综合问题

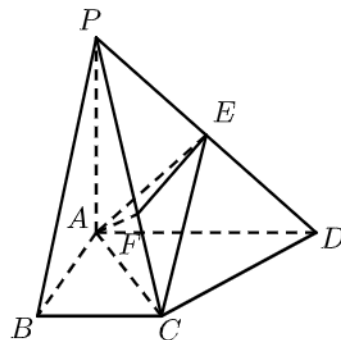
1. 例题精讲

- 11 如图，直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，底面边长 $AB = 5$ ， $BC = 4$ ， $AC = 3$ ，侧棱长为 $2\sqrt{3}$ ， D 为 BC 中点， $CE \perp AD$ ， E 为垂足。



- (1) 求证： $A_1C \parallel$ 平面 AB_1D 。
- (2) 求证：平面 $AB_1D \perp$ 平面 CC_1E 。
- (3) 求直线 DC_1 与平面 CC_1E 所成角的正弦值。

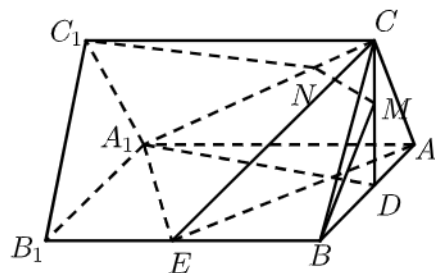
- 12 已知四棱锥 $P - ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是梯形， $AD \parallel BC$ ， $AB = BC = 2$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $CD \perp AC$ ，平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PA = AD$ ， $PB = 2\sqrt{5}$ ， E 为 PD 中点， $AF \perp PC$ ，垂足为 F 。



- (1) 求证： $PA \perp$ 平面 $ABCD$ 。
- (2) 求异面直线 AB 与 CE 所成的角。
- (3) 求证： $PD \perp EF$ 。

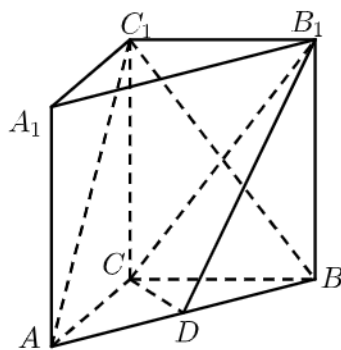
2. 课堂巩固

- 13 如图，在三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中， D 是棱 AB 的中点．在 CD 上取一点 M ，过点 M 和 BC_1 做平面，交平面 A_1CD 于 MN ．



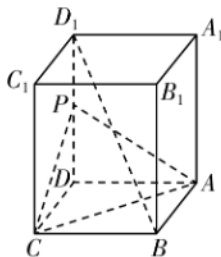
- (1) 证明： $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD ．
- (2) 证明： $BC_1 \parallel MN$ ．
- (3) 若 E 是棱 BB_1 上的任意一点，且三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 的体积为 12，求三棱锥 $A - A_1CE$ 的体积．

- 14 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AC = BC = \sqrt{2}$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AA_1 = 2$ ， D 为 AB 的中点．



- (1) 求证： $AC \perp BC_1$ ；
- (2) 求证： $AC_1 \parallel$ 平面 B_1CD ；
- (3) 求异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值．

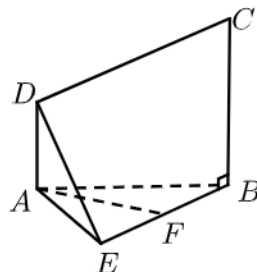
- 15 如图，长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = AD = 1$ ， $AA_1 = 2$ ，点 P 为 DD_1 的中点．



- (1) 求证：直线 $BD_1 \parallel$ 平面 PAC ．
- (2) 求证：平面 $PAC \perp$ 平面 BDD_1 ．

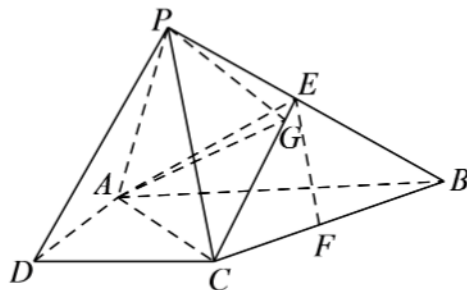
(3) 求直线 PB_1 与平面 PAC 所成的角.

- 16 如图, 在多面体 $ABCDE$ 中, $\triangle AEB$ 为等边三角形, $AD \parallel BC$, $BC \perp AB$, $CE = 2\sqrt{2}$, $AB = BC = 2AD = 2$, 点 F 为边 EB 的中点.



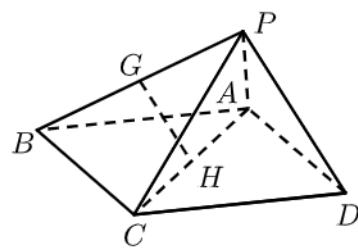
- (1) 求证: $AF \parallel$ 平面 DEC .
- (2) 求证: 平面 $DEC \perp$ 平面 EBC .
- (3) 求直线 AB 与平面 DEC 所成角的正弦值.

- 17 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA = 2\sqrt{2}$, $PC = \sqrt{6}$, $PD = \sqrt{7}$, E 是 PB 的中点. 底面是四边形 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \perp AD$, $AB \parallel CD$, $AB = 2AD = 2CD = 2$.



- (1) 求证: 平面 $EAC \perp$ 平面 PBC .
- (2) 求二面角 $P-AC-E$ 的余弦值.
- (3) 求直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值.

- 18 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\triangle PCD$ 为等边三角形, 平面 $PAC \perp$ 平面 PCD , $PA \perp CD$. $CD = 2$, $AD = 3$.



- (1) 设 G, H 分别为 PB, AC 的中点, 求证: $GH \parallel$ 平面 PAD .
- (2) 求证: $PA \perp$ 平面 PCD .
- (3) 求直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值.