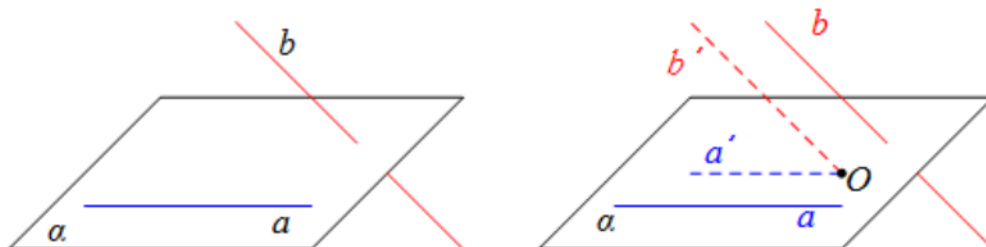


异面直线夹角与线面角

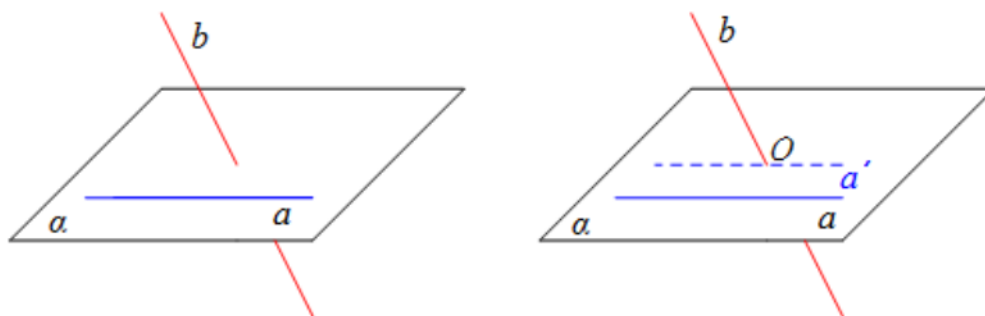
一、异面直线夹角

1. 知识讲解

已知两条异面直线 a, b ，经过空间任一点 O 作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$ ，我们把 a' 与 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 与 b 所成的角（或夹角），记作 $\langle a, b \rangle$ ，见下图：



为了简便，点 O 常取在两条异面直线中的一条上．例如取在直线 b 上，然后经过点 O 作直线 $a' \parallel a$ ， a' 和 b 所成的锐角（或直角）就是异面直线 a 与 b 所成的角，如下图：



如果两条异面直线所称的角是直角，那么我们就说这两条直线互相垂直．这条互相垂直的异面直线 a, b ，记作 $a \perp b$ ．

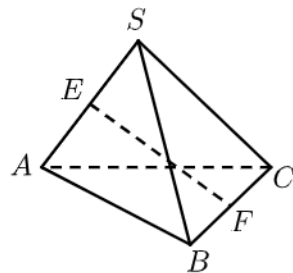
显然，由异面直线夹角的定义，两条异面直线的夹角的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$ ．

2. 例题精讲

- 1 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 AD ， BD_1 所成角的余弦值为 _____ .
- 2 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M 、 N 分别是 AB 、 BB_1 的中点，则异面直线 MN 与 BC_1 所成角的大小是 _____ .
- 3 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，若 E 、 F 分别是棱 AB 和棱 BB_1 的中点，则 A_1E 和 CF 所成的角的余弦值为 () .
 A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{5}$

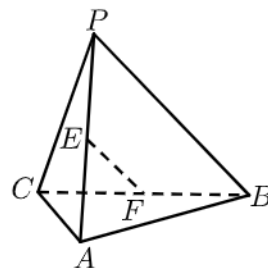
3. 课堂巩固

- 4 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = 2$ ， $AB = 1$ ，则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 _____ .
- 5 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M 、 N 分别是棱 BB_1 ， B_1C_1 的中点，若 $\angle CMN = 90^\circ$ ，则异面直线 AD_1 与 DM 所成的角为 _____ .
- 6 如图，在三棱锥 $S - ABC$ 中， $SC = AB = 2$ ， E 、 F 分别是 SA 、 BC 的中点，且满足 $EF = \sqrt{3}$ ，则异面直线 SC 与 AB 所成的角等于 () .



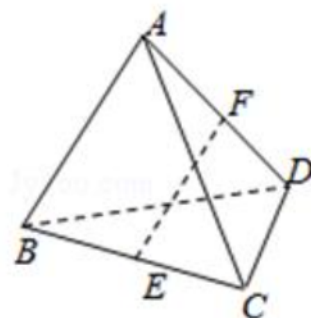
- A. 60° B. 120°
 C. 120° 或者 60° D. 30°

- 7 如图, E, F 分别是三棱锥 $P-ABC$ 的棱 AP, BC 的中点, $PC = 10, AB = 6, EF = 7$, 则异面直线 AB 与 PC 所成的角为 () .



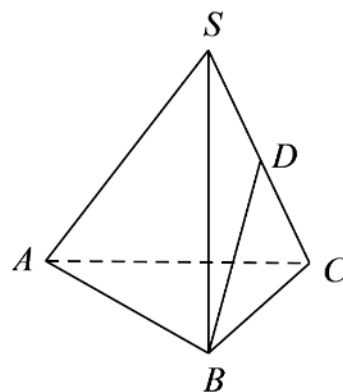
- A. 120 B. 60 C. 45 D. 30

- 8 如图, 空间四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, AB 与 CD 所成角为 $\frac{\pi}{3}$, 点 E, F 分别为 BC, AD 的中点, 则直线 AB 与 EF 所成角为 () .



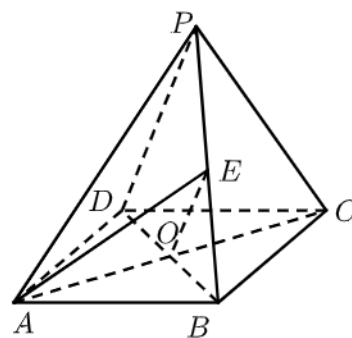
- A. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{2}$

- 9 如图所示，棱长皆相等的四面体 $S-ABC$ 中， D 为 SC 的中点，则 BD 与 SA 所成角的余弦值是（ ）。



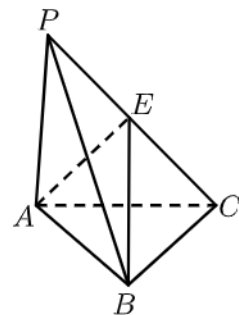
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

- 10 如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等，且 $ABCD$ 是正方形，点 E 是 PB 的中点，则异面直线 AE 与 PD 所成角的余弦值为（ ）。



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

- 11 如图所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $PA = AB = AC = 2$ ， E 是 PC 的中点。



- (1) 求证： AE 与 PB 是异面直线。
- (2) 求异面直线 AE 和 PB 所成角的余弦值。

二、空间线面成角

1. 知识讲解

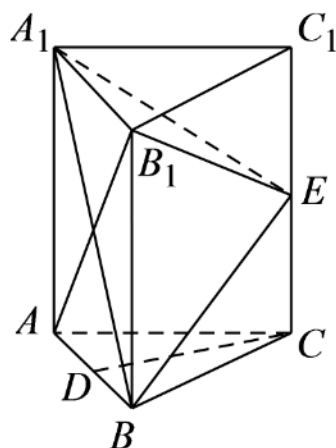
(1) 概念：平面的斜线与它在平面上的射影所成的角叫做这条斜线与平面所成的角。

(2) 取值范围： $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

2. 例题精讲

定义法

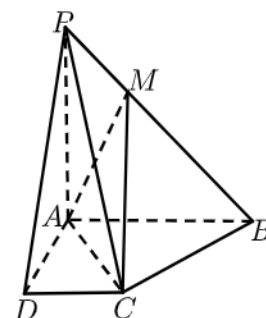
12 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，每个侧面均为正方形， D 为底边 AB 的中点， E 为侧棱 CC_1 的中点。



求直线 B_1E 与平面 AA_1C_1C 所成角的正弦值。

利用已知垂直

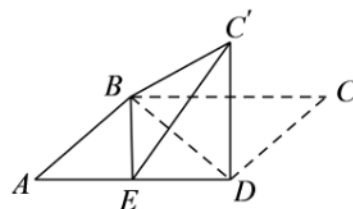
13 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = AD = AP = 2CD = 2$ 。



- (1) 若平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ，求证： $PA \perp$ 平面 $ABCD$ 。
- (2) 在 (1) 的条件下，求 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值。

等体积法

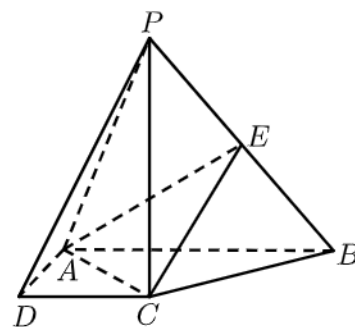
- 14 已知平行四边形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $AD = 10$ ， $BD = 8$ ， E 是线段 AD 的中点，沿直线 BD 将 $\triangle BCD$ 翻折成 $\triangle BC'D$ ，使得平面 $BC'D \perp$ 平面 ABD 。



求直线 BD 与平面 BEC' 所成角的正弦值。

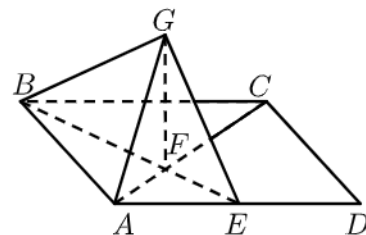
3. 课堂巩固

- 15 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是直角梯形， $AB \perp AD$ ， $AB \parallel CD$ ， $PC \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PC = AB = 2AD = 2CD = 2$ ， E 是 PB 的中点。



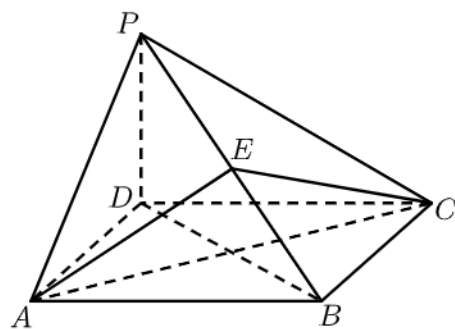
- (1) 求证：平面 $EAC \perp$ 平面 PBC 。
- (2) 求直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值。

- 16 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB = 1$ ， $AD = \sqrt{2}$ ， E 是 AD 的中点， BE 与 AC 交于点 F ， $GF \perp$ 平面 $ABCD$ 。



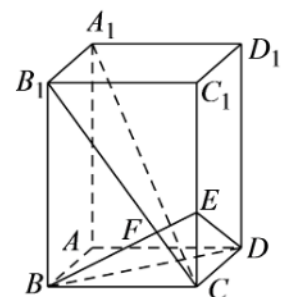
若 $AF = FG$ ，求直线 EG 与平面 ABG 所成角的正弦值。

- 17 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形， $PD \perp$ 底面 $ABCD$ ，点 E 在棱 PB 上。



当 $PD = \sqrt{2}AB$ ，且 E 为 PB 的中点时，求 AE 与平面 PDB 所成的角的大小。

- 18 已知长方体 AC_1 中，棱 $AB = BC = 1$ ，棱 $BB_1 = 2$ ，连接 B_1C ，过 B 点作 B_1C 的垂线交 CC_1 于 E ，交 B_1C 于 F 。



求平面 A_1B_1C 与直线 DE 所成角的正弦值。