

立体几何综合问题

一、空间中的平行和垂直关系

本讲讲义题目全部来自近两年天津高一期中期末试卷.

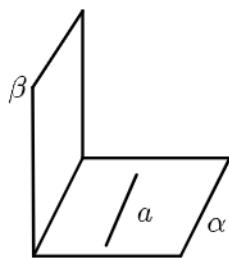
1. 例题精讲

1 已知 α, β, γ 是空间三个不同的平面, a 是空间一条直线,则下列命题正确的是().

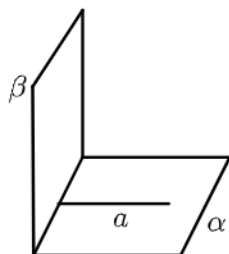
- A. 若 $\alpha \perp \beta, a // \beta$, 则 $a \perp \alpha$
- B. $\alpha \perp \beta, a \perp \beta$, 则 $a // \alpha$
- C. 若 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 则 $\beta // \alpha$
- D. $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, \alpha \cap \beta = l$, 则 $l \perp \gamma$

答案 D

解析 A选项: 如图有可能 $a \subset \alpha$, 故A错误;



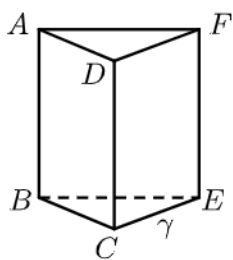
B选项: 如图有可能 $a \subset \alpha$, 故B错误;



C选项: 如图为直三棱柱, 底面为 γ ,

平面 $ABCD$ 为 α , 平面 $ABEF$ 为 β ,

α 与 β 相交, 故C错误;



D选项：正确。

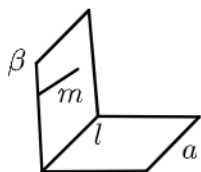
故选D。

2 已知直线 m 和平面 α, β ，则下列四个命题中正确的是（ ）。

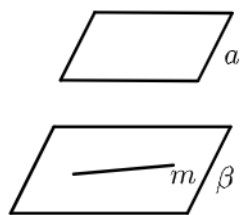
- A. 若 $\alpha \perp \beta, m \subset \beta$ ，则 $m \perp \alpha$
- B. 若 $\alpha // \beta, m // \alpha$ ，则 $m // \beta$
- C. 若 $\alpha // \beta, m \perp \alpha$ ，则 $m \perp \beta$
- D. 若 $m // \alpha, m // \beta$ ，则 $\alpha // \beta$

答案 C

解析 A.如图设 $\alpha \cap \beta = l$ ，若 $m // l$ ， $\therefore m // \alpha$ ，故A错误；

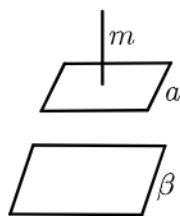


B.如图，有可能 $m \subset \beta$ ，故B错误；



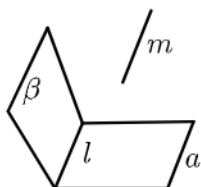
C.

$\because m \perp \alpha, \alpha // \beta, \therefore m \perp \beta$ ，故C正确；

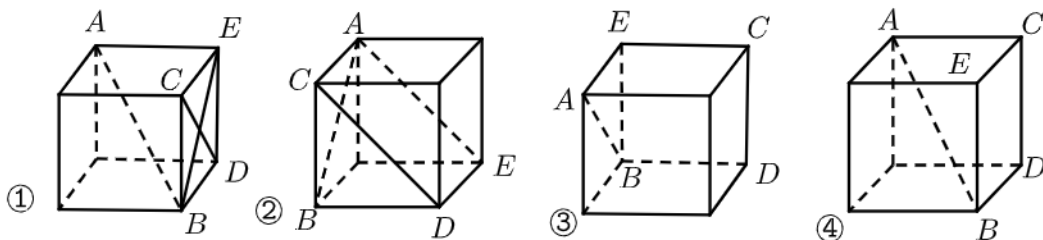


D.

如图设 $\alpha \cap \beta = l$, 令 $m \parallel l$, $\therefore m \parallel \alpha, m \parallel \beta$, 但是此时 α 不平行于 β , 故D错误;



3 在下列四个正方体中, 能得出 $AB \perp CD$ 的是 ().



A. ①

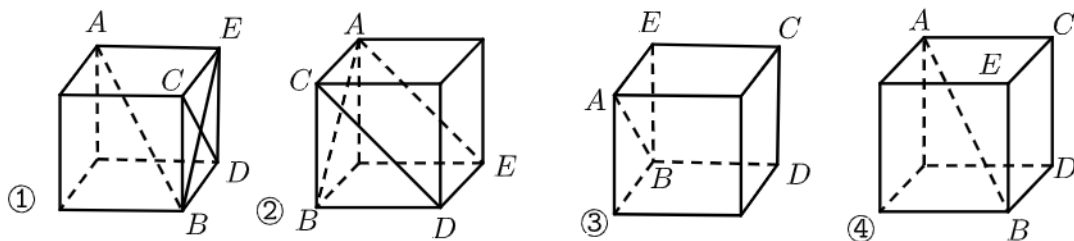
B. ①②

C. ②③

D. ④

答案 A

解析 如下图:



在①中,

$\because BE \perp CD, AE \perp CD, BE \cap AE = E,$

$\therefore CD \perp \text{平面} ABE,$

$\because AB \subset \text{平面} ABE,$

$\therefore AB \perp CD$, 故①正确;

在②中，

$\because CD // AE$ ， $\triangle ABE$ 是等边三角形，

$\therefore AB$ 与 CD 异面，且所成角为 60° ，故②错误；

在③中，

$CD // BE$ ， $\angle ABE = 45^\circ$ ，

$\therefore AB$ 与 CD 异面，且所成角为 45° ，故③错误；

在④中，

$CD // BE$ ， $\tan \angle ABE = \frac{AE}{BE} = \sqrt{2}$ ，

$\therefore AB$ 与 CD 异面，且不垂直，故④错误．

故选A．

2. 课堂巩固

4 下列命题：

①垂直于同一条直线的两个平面互相平行；②垂直于同一个平面的两条直线互相平行；③一条直线在平面内，另一条直线与这个平面垂直，则这两条直线互相垂直．其中正确的个数是（ ）．

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

答案 D

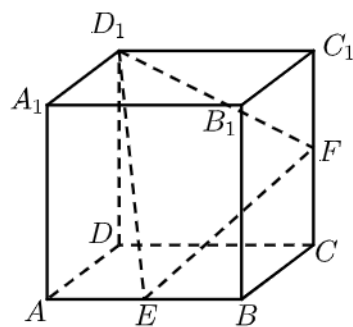
解析 ①垂直于同一条直线的两个平面互相平行，正确；

②垂直于同一个平面的两条直线互相平行，正确；

③由直线垂直于平面，则垂直于平面内的所有直线，正确．

故选D．

5 如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 E ， F 分别为棱 AB ， CC_1 的中点，在平面 ADD_1A 内切与平面 D_1EF 平行的直线（ ）．



A. 不存在

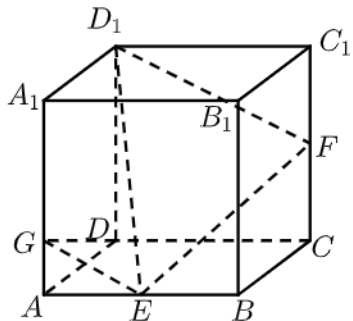
B. 有1条

C. 有2条

D. 有无数条

答案 D

解析 在 AA_1 上取一点 G , 使得 $AG = \frac{1}{4}AA_1$, 连接 EG, DG ,



$$\therefore \frac{D_1C_1}{C_1F} = \frac{2}{1} = \frac{AE}{AG},$$

$$\therefore EG \parallel D_1F,$$

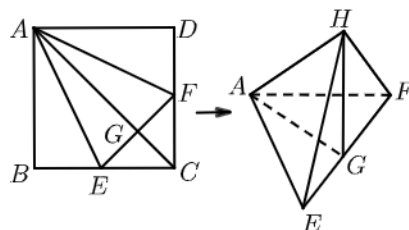
$\therefore E, G, D_1, F$ 四点共面,

$\therefore$ 在平面 ADD_1A_1 内平行于 D_1G 的直线均平行于平面 D_1EF ,

$\therefore$ 无数条.

故选D.

6 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, E, F 分别是 BC, CD 的中点, G 是 EF 的中点, 现在沿 AE, AF 及 EF 把这个正方形折成一个空间图形, 使 B, C, D 三点重合, 重合后的点记为 H , 那么, 在这个空间图形中必有 ().



- A. $AG \perp \triangle EFH$ 所在平面
C. $HF \perp \triangle AEF$ 所在平面

- B. $AH \perp \triangle EFH$ 所在平面
D. $HG \perp \triangle AEF$ 所在平面

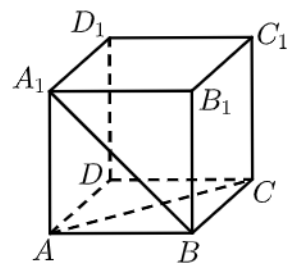
答案 B

解析 $\because \angle AHE = \angle ABE = 90^\circ$
 $\therefore AH \perp EH$
 $\angle AHF = \angle ADF = 90^\circ$
 $\therefore AH \perp FH$
 又 $\because EH \cap FH = H$
 $\therefore AH \perp$ 平面 EFH .

二、空间中的角度

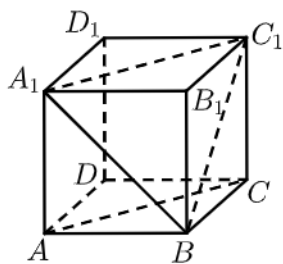
1. 例题精讲

7 如右图所示，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 A_1B 与 AC 所成角的大小为 _____ .



答案 60°

解析 连接 A_1C_1 、 BC_1 ,



$A_1C_1 \parallel AC$,

$\therefore \angle C_1A_1B$ 为异面直线 AC 与 A_1B 的夹角或其补角,

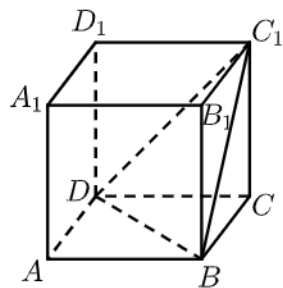
$\triangle A_1B_1C_1$ 为等边三角形,

$\therefore \angle C_1A_1B_1 = 60^\circ$,

$\therefore$ 异面直线 A_1B 与 AC 夹角为 60° .

故答案为: 60° .

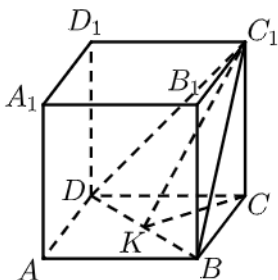
- 8 如图, 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 则二面角 $C_1 - BD - C$ 的正切值为 _____, 异面直线 A_1B_1 与 C_1D 所成角的大小为 _____.



答案 1: $\sqrt{2}$

2: 45°

解析 设正方体棱长为 a , 取 BD 中点 K , 连结 CK , C_1K ,



$\therefore DC = BC$,

$\therefore CK \perp BD$,

又 $\because C_1D = C_1B$,

$\therefore C_1K \perp BD$,

$\therefore \angle CKC_1$ 为二面角 $C_1 - BD - C$, $\tan \angle CKC_1 = \frac{CC_1}{CK} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \sqrt{2}$,

$\therefore A_1B_1 \parallel DC$,

$\therefore \angle C_1DC$ 为异面直线 A_1B_1 与 C_1D 所成角 $\tan \angle C_1DC = \frac{C_1C}{DC} = \frac{a}{c} = 1$,

$\therefore \angle C_1DC = 45^\circ$.

故答案为: $\sqrt{2}, 45^\circ$.

2. 课堂巩固

- 9 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 C_1D_1 的中点, 则异面直线 AE 与 BC 所成角的余弦值为 _____.

答案 $\frac{2}{3}$

解析 方法一: 取 A_1B_1 的中点 F , 连接 EF, FA , 则有 $EF \parallel B_1C_1 \parallel BC$, $\angle AEF$ 即是直线 AE 与 BC

所成的角或其补角, 设正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $2a$,

则有 $EF = 2a$, $AF = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a$, $AE = \sqrt{(2a)^2 + (2a)^2 + a^2} = 3a$.

在 $\triangle AEF$ 中, $\cos \angle AEF = \frac{AE^2 + EF^2 - AF^2}{2AE \cdot EF} = \frac{9a^2 + 4a^2 - 5a^2}{2 \times 3a \times 2a} = \frac{2}{3}$.

因此, 异面直线 AE 与 BC 所成的角的余弦值是 $\frac{2}{3}$.

方法二: 连接 DE , 设 $AD = 2$

易知 $AD \parallel BC$,

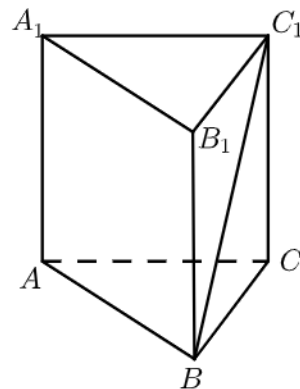
$\angle DAE$ 就是异面直线 AE 与 BC 所成角,

在 $\triangle RtADE$ 中, 由于 $DE = \sqrt{5}$, $AD = 2$, 可得 $AE = 3$

$\cos \angle DAE = \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$,

故答案为: $\frac{2}{3}$.

如图，三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 \perp$ 底面 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AA_1 = AC = CB$ ，则直线 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值是（ ）。

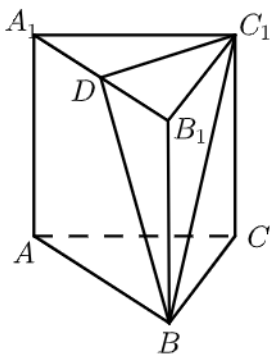


A. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

答案 A

解析 如图所示，



由题意可知：在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，

有 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AA_1 = AC = CB$ ，

设 $AC = 2a$ ，

则有 $AC = CB = AA_1 = BB_1 = 2a$ ，

$$BC_1 = \sqrt{BB_1^2 + BC_1^2} = 2\sqrt{2}，$$

取 A_1B_1 中点为 D ，连接 C_1D ，

$\because C_1A_1 = C_1B_1$ ，且 $\angle A_1CB_1 = 90^\circ$ ，

$\therefore C_1D = \sqrt{2}a$ ， $C_1D \perp A_1B_1$ ，

$AA_1 \perp$ 底面 $ABC \Rightarrow AA_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1$ ，

$\therefore AA_1 \perp C_1D$ ，

即有 $C_1D \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

所以 $\angle C_1BD$ 即为直线 BC_1 与平面 ABB_1A_1 所成的角 ,

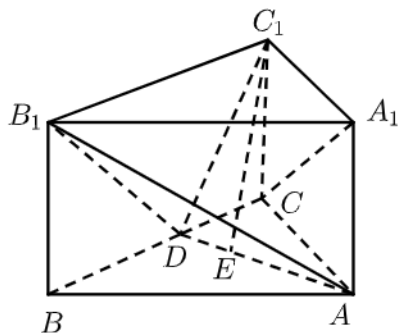
$$\sin \angle C_1BD = \frac{C_1D}{BC_1} = \frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{2}a} = \frac{1}{2} .$$

故选 A .

三、综合问题

1. 例题精讲

- 11 如图, 直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 底面边长 $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 3$, 侧棱长为 $2\sqrt{3}$, D 为 BC 中点, $CE \perp AD$, E 为垂足 .



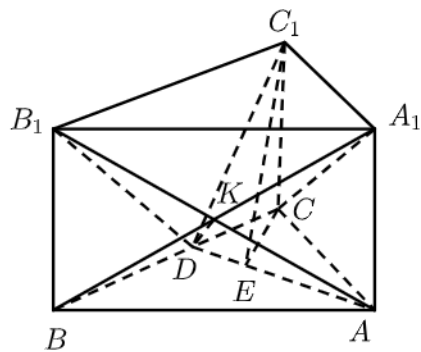
- (1) 求证: $A_1C \parallel$ 平面 AB_1D .
- (2) 求证: 平面 $AB_1D \perp$ 平面 CC_1E .
- (3) 求直线 DC_1 与平面 CC_1E 所成角的正弦值 .

答案

- (1) 证明见解析 .
- (2) 证明见解析 .
- (3) $\frac{\sqrt{13}}{13}$.

解析

- (1) 取 AB_1 中点 K ,



$\because$ 四边形 ABB_1A_1 为长方形 ,

$\therefore K$ 为 A_1B 中点 ,

D 为 BC 中点 , 连结 KD ,

$\therefore KD \parallel A_1C$,

又 $\because KD \subset$ 平面 AB_1D ,

$A_1C \not\subset$ 平面 AB_1D ,

$\therefore A_1C \parallel$ 平面 AB_1D .

(2) $\because$ 该图为直三棱柱 ,

$\therefore C_1C \perp$ 平面 ABC ,

又 $\because AD \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore C_1C \perp AD$,

又 $\because CE \perp AD$,

$C_1C \cap CE = C$,

$\therefore AD \perp$ 平面 CC_1E ,

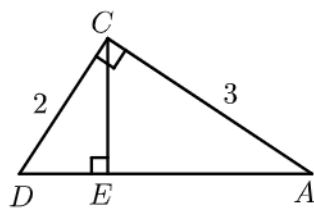
又 $\because AD \subset$ 平面 AB_1D ,

$\therefore$ 平面 $AB_1D \perp$ 平面 CC_1E .

(3) 由 (2) 知 $AD \perp$ 平面 CC_1E ,

$\therefore DE \perp$ 平面 CC_1E ,

设 DC_1 与平面 CC_1E 所成角为 θ ,



$$\sin \theta = \frac{DE}{DC_1} ,$$

$\because D$ 为 BC 中点,

$$\therefore CD = \frac{1}{2}BC = 2,$$

$$CC_1 = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore C_1D^2 = CD^2 + CC_1^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 = 16,$$

$$\therefore C_1D > 0,$$

$$\therefore C_1D = 4,$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中,

$$AD^2 = CD^2 + AC^2 = 2^2 + 3^2 = 13,$$

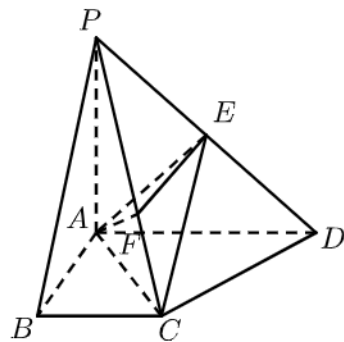
$$\therefore AD = \sqrt{13},$$

$$\cos D = \frac{DC}{AD} = \frac{CD}{AD} = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$DE = DC \cdot \cos D = 2 \times \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}},$$

$$\sin \theta = \frac{\frac{4}{\sqrt{13}}}{4} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

- 12 已知四棱锥 $P-ABCD$, 底面 $ABCD$ 是梯形, $AD \parallel BC$, $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 60^\circ$, $CD \perp AC$, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = AD$, $PB = 2\sqrt{5}$, E 为 PD 中点, $AF \perp PC$, 垂足为 F .



- (1) 求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$.
- (2) 求异面直线 AB 与 CE 所成的角.
- (3) 求证: $PD \perp EF$.

答案

(1) 证明见解析.

(2) $\angle KBA = 45^\circ$.

(3) 证明见解析 .

解析

(1) $\because \angle CBA = 60^\circ$,

又 $\because BC = BA = 2$,

$\therefore AC = 2$,

$\because AD \parallel BC$,

$\therefore \angle DAC = \angle BCA = 60^\circ$,

又 $\because \angle ACD = 90^\circ$,

$\therefore CD = 2\sqrt{3}$, $AD = 4$,

$\because PA = AD$,

$\therefore PA = 4$,

$\therefore PA^2 + AB^2 = PB^2$,

$\therefore PA \perp AB$,

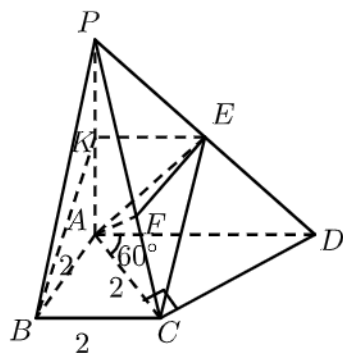
又 $\because$ 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

$PA \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 取 AP 中点 K , 连接 EK , BK ,



$\because E$ 、 K 为 PA , PD 中点 ,

$\therefore EK \parallel \frac{1}{2} AD$,

$\therefore EK = 2 = BC$,

又 $\because BC \parallel AD$,

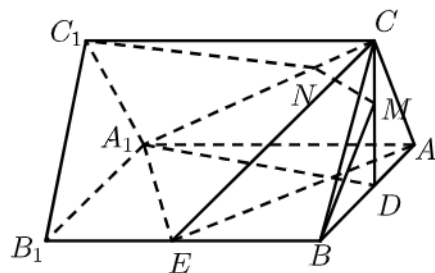
$\therefore EK \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $BCEK$ 为平行四边形 ,
 $\therefore CE // BK$,
 $\therefore \angle KBA$ 为异面直线 AB 与 CE 所成角 ,
 $\tan \angle KBA = \frac{AK}{AB} = \frac{2}{2} = 1$,
 $\therefore \angle KBA = 45^\circ$.

(3) $\because DC \perp AC, DC \perp PA, AC \cap PA = A$,
 $\therefore DC \perp$ 平面 PAC ,
 又 $\because AF \subset$ 平面 PAC ,
 $\therefore DC \perp AF$,
 又 $\because AF \perp PC, DC \cap PC = C$,
 $\therefore AF \perp$ 平面 PCD ,
 $\because PD \subset$ 平面 PCD ,
 $\therefore PD \perp AF$,
 $\because PA = AD, E$ 为 PD 中点 ,
 $\therefore AE \perp PD$,
 $\because AF \cap AE = A$,
 $\therefore PD \perp$ 平面 AEF ,
 $\because EF \subset$ 平面 AEF ,
 $\therefore PD \perp EF$.

2. 课堂巩固

- 13 如图, 在三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 中, D 是棱 AB 的中点. 在 CD 上取一点 M , 过点 M 和 BC_1 做平面, 交平面 A_1CD 于 MN .



- (1) 证明: $BC_1 //$ 平面 A_1CD .

(2) 证明： $BC_1 // MN$.

(3) 若 E 是棱 BB_1 上的任意一点，且三棱柱 $A_1B_1C_1 - ABC$ 的体积为12，求三棱锥 $A - A_1CE$ 的体积 .

答案

(1) 证明见解析 .

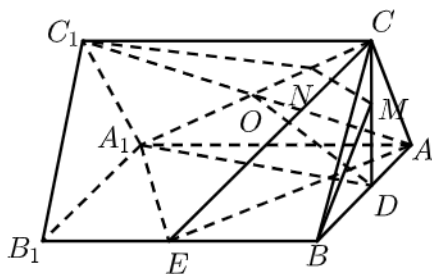
(2) 证明见解析 .

(3) 4 .

解析

(1) 连结 AC_1 交 A_1C 于 O ,

连结 OD ,



$\because$ 四边形 AA_1C_1C 为平行四边形 ,

$\therefore O$ 为 AC_1 中点 ,

$\because D$ 为 AB 中点 ,

$\therefore OD // BC_1$,

又 $\because OD \subset$ 平面 A_1CD ,

$BC_1 \not\subset$ 平面 A_1CD ,

$\therefore BC_1 //$ 平面 A_1CD .

(2) $\because BC_1 //$ 平面 A_1CD ,

由线面平行性质定理知 :

$MN =$ 平面 $BCM \cap$ 平面 A_1CD ,

$\therefore BC_1 // MN$.

(3) 设三棱柱高为 h ,

底面 $\triangle ABC$ 的面积为 S ,

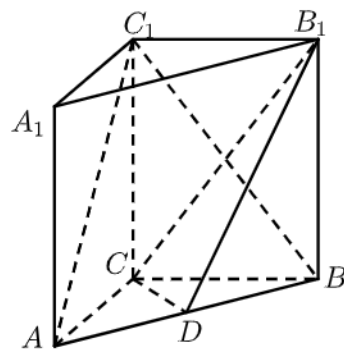
$V = Sh$,

$\therefore Sh = 12$,

又 $\because V_{A-A_1CE} = V_{C-AEA_1}$,

$$\begin{aligned}
 &= V_{C-ABA_1} \\
 &= V_{A_1-ABC} \\
 &= \frac{1}{3}Sh = 4.
 \end{aligned}$$

14 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $AC = BC = \sqrt{2}$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AA_1 = 2$ ， D 为 AB 的中点。



- (1) 求证： $AC \perp BC_1$ ；
- (2) 求证： $AC_1 \parallel$ 平面 B_1CD ；
- (3) 求异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值。

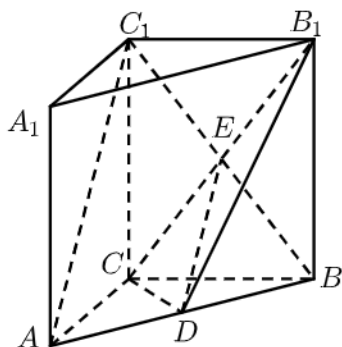
答案

- (1) 证明见解析。
- (2) 证明见解析。
- (3) $\frac{2}{3}$ 。

解析

- (1) $\because CC_1 \perp$ 平面 ABC ， $AC \subset$ 平面 ABC ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\therefore CC_1 \perp AC$ ， $BC \perp AC$ 。
 $\because CC_1 \cap BC = C$ ， $\therefore AC \perp$ 平面 BCC_1 。
 $\because BC_1 \subset$ 平面 BCC_1 ，
 $\therefore AC \perp BC_1$ 。

(2)



如图, 设 CB_1 与 C_1B 的交点为 E , 连接 DE .

$\because D$ 为 AB 的中点,

E 为 C_1B 的中点,

$\therefore DE \parallel AC_1$.

$\because DE \subset \text{平面} B_1CD$,

$AC_1 \not\subset \text{平面} B_1CD$,

$\therefore AC_1 \parallel \text{平面} B_1CD$.

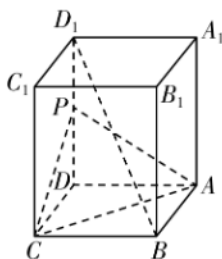
(3) 由 $DE \parallel AC_1$, 可知 $\angle CED$ 为 AC_1 与 B_1C 所成的角,

在 $\triangle CDE$ 中,

$$\begin{aligned} DE &= \frac{1}{2}AC_1 = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad CE = \frac{1}{2}B_1C = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + BB_1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \\ CD &= \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + BC^2} = 1. \quad \cos \angle CED = \frac{CE^2 + DE^2 - CD^2}{2CE \cdot DE} \\ &= \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 1}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 异面直线 AC_1 与 B_1C 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$.

15 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 1$, $AA_1 = 2$, 点 P 为 DD_1 的中点.



(1) 求证: 直线 $BD_1 \parallel \text{平面} PAC$.

(2) 求证: 平面 $PAC \perp \text{平面} BDD_1$.

(3) 求直线 PB_1 与平面 PAC 所成的角.

答案

(1) 见解析.

(2) 见解析.

(3) 90° .

解析

(1) 如图, 设 AC 和 BD 交于点 O , 连接 PO ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

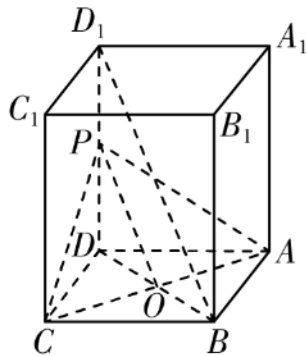
$$\therefore OD = OB ,$$

$\therefore P$ 为 DD_1 的中点 ,

$$\therefore OP // BD_1 ,$$

$\therefore OP \subset \text{平面} PAC , BD_1 \not\subset \text{平面} PAC ,$

$\therefore BD_1 // \text{平面} PAC .$



(2) $\because AB = AD , O$ 为 BD 的中点 ,

$$\therefore AC \perp BD ,$$

$\because DD_1 \perp \text{平面} ABCD , AC \subset \text{平面} ABCD ,$

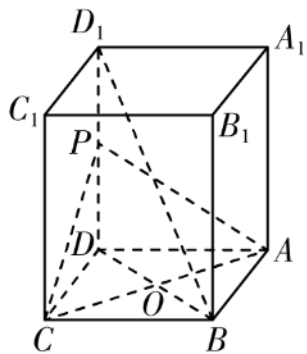
$$\therefore DD_1 \perp AC ,$$

$\because DD_1 \cap DB = D , DD_1 \subset \text{平面} BDD_1 , DB \subset \text{平面} BDD_1 ,$

$$\therefore AC \perp \text{平面} BDD_1 ,$$

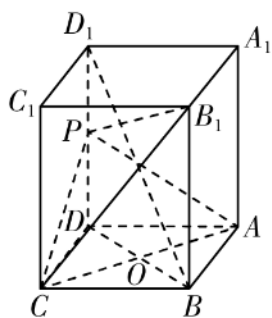
$\because AC \subset \text{平面} PAC ,$

$\therefore \text{平面} BDD_1 \perp \text{平面} PAC .$

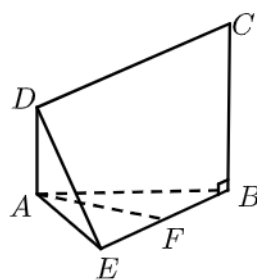


(3) 因为 $PC^2 = 2 , PB_1^2 = 3 , B_1C^2 = 5$, 所以 $\triangle PB_1C$ 是直角三角形 . 所以 $PB_1 \perp PC$,

同理 $PB_1 \perp PA$, 所以直线 $PB_1 \perp \text{平面} PAC$, 直线 PB_1 与平面 PAC 所成的角为 90° .



- 16 如图，在多面体 $ABCDE$ 中， $\triangle AEB$ 为等边三角形， $AD \parallel BC$ ， $BC \perp AB$ ， $CE = 2\sqrt{2}$ ， $AB = BC = 2AD = 2$ ，点 F 为边 EB 的中点．



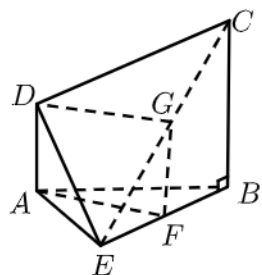
- (1) 求证： $AF \parallel$ 平面 DEC ．
- (2) 求证：平面 $DEC \perp$ 平面 EBC ．
- (3) 求直线 AB 与平面 DEC 所成角的正弦值．

答案

- (1) 证明见解析．
- (2) 证明见解析．
- (3) AB 与平面 DEC 所成角正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ．

解析

- (1) 连接 CE ． G 为 CE 中点，连接 FG ， DG ，



在 $\triangle EBC$ 中， $\because G$ 、 F 为中点，
 $\therefore GF \parallel BC$ 且 $GF = 1$ ，
 又 $AD \parallel BC$ 且 $AD = 1$ ，

$$\therefore AD \parallel GF,$$

$\therefore$ 四边形 $ADGF$ 是平行四边形,

$$\therefore DG \parallel AF,$$

又 $DG \subset \text{面} DEC$, $AF \not\subset \text{面} DEC$,

$$\therefore AF \parallel \text{面} DEC.$$

(2) 在 $\triangle EBC$ 中, $\because BC = 2$, $BE = 2$,

$$CE = 2\sqrt{2},$$

$$BE^2 + BC^2 = CE^2,$$

$\therefore BC \perp BE$, 又 $BC \perp AB$, $AB \cap BE = B$,

$\therefore BC \perp \text{面} ABE$,

$$\therefore BC \perp AF,$$

又 F 是中点, $AF \perp BE$,

$$BC \cap BE = B,$$

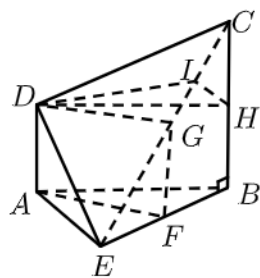
$\therefore AF \perp \text{面} BEC$,

又 $AF \parallel DG$, $DG \subset \text{面} DEC$,

$\therefore \text{面} DEC \perp \text{面} EBC$.

(3) 过 D 作 $DH \parallel AB$,

H 为 BC 中点, 过 H 作 $HI \perp EC$, 连接 DI ,



$\because \text{面} DEC \perp \text{面} EBC$, $HI \perp EC$,

$\therefore HI \perp \text{面} DEC$,

$\therefore \angle HDI$ 为 AB 与平面 DEC 所成角,

$$\sin \angle HDI = \frac{HI}{DH} = \frac{HI}{AB},$$

$$HI = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \sin \angle HDI = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

即 AB 与平面 DEC 所成角正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

- 答案

- ### 解析

$$\therefore AC \perp PC, AC \perp CE,$$

$PC \subset \text{面} PAC, CE \subset \text{面} ACE.$

$\Rightarrow \angle PCE$ 为二面角 $P-AC-E$ 的夹角.

取 BC 中点 F , 连接 EF ,

由 (1) 知 $PC \perp AC$, 同理 $PC \perp DC$,

$AC \cap DC = C \Rightarrow PC \perp \text{面} ABCD, BC \subset \text{面} ABCD.$

$\Rightarrow PC \perp BC,$

又 $\because E$ 为 PB 中点, F 为 BC 中点,

$\Rightarrow EF \perp BC.$

$$EF = \frac{1}{2}PC = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$CF = BF = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore PE = BE = \sqrt{EF^2 + BF^2} = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \angle PCE &= \frac{PC^2 + CE^2 - PE^2}{2 \cdot PC \cdot CE} \\ &= \frac{6 + 2 - 2}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$\therefore$ 二面角 $P-AC-E$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(3) 作 $PG \perp CE$ 交 CE 于点 G , 连接 AG ,

$\because$ 面 $EAC \perp$ 面 PCB , 面 $EAC \cap$ 面 $PCB = CE$,

$PG \perp CE, PG \subset \text{面} PCB.$

$\therefore PG \perp \text{面} EAC.$

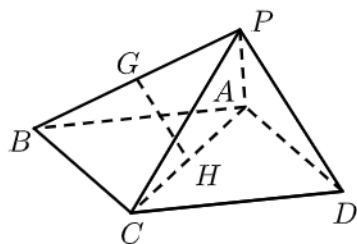
$\therefore \angle PAG$ 为 PA 与面 EAC 所成角,

$$PC \cdot CF = CE \cdot PG \text{ 得 } PG = \sqrt{2}.$$

又 $\because PG \perp AG$,

$$\therefore \sin \angle PAG = \frac{PG}{PA} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

18 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\triangle PCD$ 为等边三角形, 平面 $PAC \perp$ 平面 PCD , $PA \perp CD$. $CD = 2, AD = 3$.



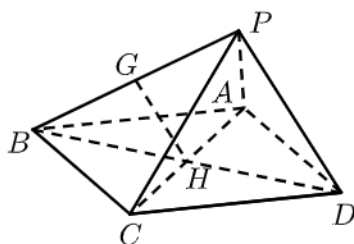
- (1) 设 G, H 分别为 PB, AC 的中点, 求证: $GH \parallel$ 平面 PAD .
- (2) 求证: $PA \perp$ 平面 PCD .
- (3) 求直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值.

答案

- (1) 证明见解析.
- (2) 证明见解析.
- (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解析

- (1) 连接 BD ,



易知 $AC \cap BD = H, BH = DH$.

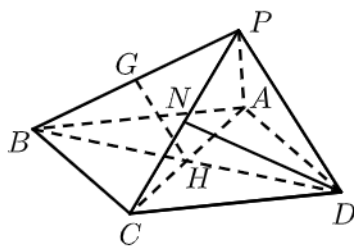
又由 $BG = PG$,

故 $GH \parallel PD$,

又因为 $GH \not\subset$ 平面 $PAD, PD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $GH \parallel$ 平面 PAD .

- (2) 取棱 PC 的中点 N , 连接 DN .



依题意, 得 $DN \perp PC$,

又因为平面 $PAC \perp$ 平面 PCD , 平面 $PAC \cap$ 平面 $PCD = PC$,

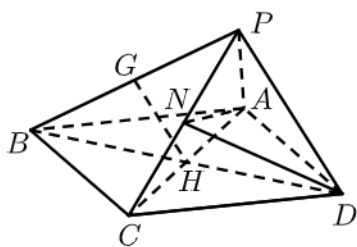
所以 $DN \perp$ 平面 PAC , 交 $PA \subset$ 平面 PAC ,

故 $DN \perp PA$.

又已知 $PA \perp CD, CD \cap DN = D$,

所以 $PA \perp$ 平面 PCD .

- (3) 连接 AN ,



由 (2) 中 $DN \perp$ 平面 PAC ，可知 $\angle DAN$ 为直线 AD 与平面 PAC 所成的角，

因为 $\triangle PCD$ 为等边三角形， $CD = 2$ 且 N 为 PC 的中点，

所以 $DN = \sqrt{3}$.

又 $DN \perp AN$ ，在 $\text{Rt}\triangle AND$ 中， $\sin \angle DAN = \frac{DN}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以，直线 AD 与平面 PAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.