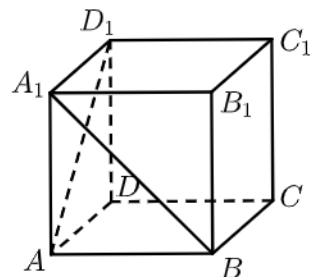


异面直线夹角与线面角练习题

一、异面直线夹角

1 如图的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 A_1B 与 B_1C 所成的角是 () .



A. 30°

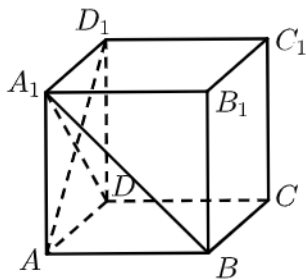
B. 45°

C. 60°

D. 90°

答案 C

解析 连接 A_1D ，由正方体的几何特征可得： $A_1D \parallel B_1C$ ，



则 $\angle BA_1D$ 即为异面直线 A_1B 与 B_1C 所成的角，

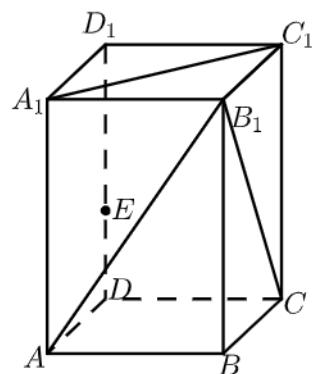
连接 BD ，易得：

$$BD = A_1D = A_1B,$$

$$\text{故 } \angle BA_1D = 60^\circ.$$

故选 C .

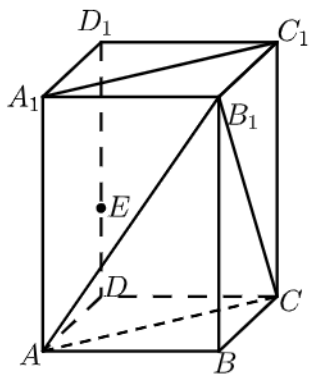
2 如图，在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 4$ ， $AA_1 = 8$ ， E 为 DD_1 的中点 .



求异面直线 B_1C 与 A_1C_1 所成角的大小；（用反三角函数形式表示）

答案 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$.

解析 连接 AC ，则 $AC \parallel A_1C_1$ ，



$\therefore \angle B_1CA$ 为异面直线 A_1C_1 与 B_1C 所成的角，

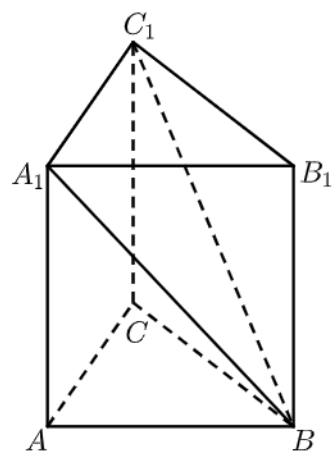
$\because AB = AD = 4, AA_1 = 8,$

$\therefore AC = 4\sqrt{2}, AB_1 = B_1C = 4\sqrt{5}.$

$\therefore \cos \angle B_1CA = \frac{B_1C^2 + AC^2 - AB_1^2}{2B_1C \cdot AC} = \frac{\sqrt{10}}{10},$

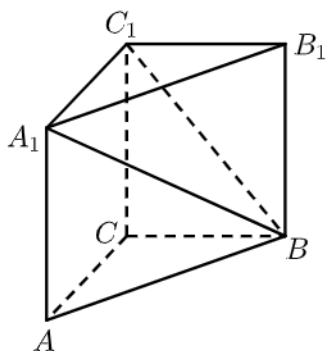
$\therefore$ 异面直线 B_1C 与 A_1C_1 所成角的大小为 $\arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$.

- 3 如图，在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AA_1 = 2$ ， $AC = BC = 1$ ，则异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值是 _____ .



答案 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

解析 连接 BC_1 ,



$\because AC \parallel A_1C_1$,

$\therefore \angle C_1A_1B$ 是异面直线 A_1B 与 AC 所成角 (或所成角的补角) ,

$\therefore$ 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中 ,

$\angle ACB = 90^\circ$, $AA_1 = 2$, $AC = BC = 1$,

$\therefore AB = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $A_1B = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$,

$B_1C = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $A_1C_1 = 1$,

$$\begin{aligned} \therefore \cos \angle C_1A_1B &= \frac{A_1C_1^2 + A_1B^2 - BC_1^2}{2 \times A_1C_1 \times A_1B} , \\ &= \frac{1+6-5}{2 \times 1 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} , \end{aligned}$$

$\therefore$ 异面直线 A_1B 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

4 设有平面 α 和任意直线 m , 则在 α 内必有直线 n , 使 n 与 m () .

A. 平行

B. 相交

C. 互为异面直线

D. 垂直

答案 D

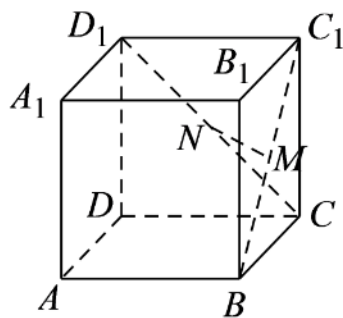
解析 对于任意的直线 m 与平面 α ，分两种情况

① m 在平面 α 内， m 与 n 共面直线，则存在直线 $n \perp m$ 或 $n // m$ ；

② m 不在平面 α 内，且 $m \perp \alpha$ ，则平面 α 内任意一条直线都垂直于 l ；若 l 于 α 不垂直，则它的射影在平面 α 内为一条直线，在平面 α 内必有直线 m 垂直于它的射影，则 n 与 m 垂直；若 $m // \alpha$ ，则存在直线 $n \perp m$ 。

故选D。

5 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M, N 分别是 BC_1, CD_1 的中点，则下列判断错误的是（ ）。



A. MN 与 CC_1 垂直

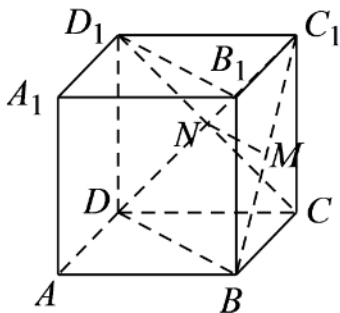
B. MN 与 AC 垂直

C. MN 与 BD 平行

D. MN 与 A_1B_1 平行

答案 D

解析 连接 C_1D, DB, D_1B_1 ，如图所示，



$\because M, N$ 分别是 BC_1, CD_1 的中点, 根据中位线定理知 $MN // DB$,

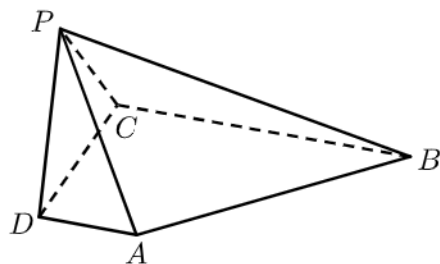
又 $\because$ 正方体中 $DB // D_1B_1$,

$\therefore MN // D_1B_1$,

而 $A_1B_1 \cap B_1D_1 = B_1$,

$\therefore MN$ 与 A_1B_1 平行是不可能的.

- 6 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \perp$ 平面 PDC , $AD // BC$, $PD \perp PB$, $AD = 1$, $BC = 3$, $CD = 4$, $PD = 2$.



- (1) 求异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值.
- (2) 求证: $PD \perp$ 平面 PBC .

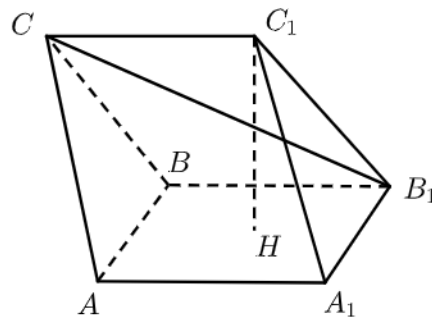
答案

- (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
- (2) 证明见解析.

解析

- (1) 如图, 由已知 $AD // BC$, 故 $\angle DAP$ 或其补角即为异面直线 AP 与 BC 所成的角, 因为 $AD \perp$ 平面 PDC , 线 $PD \subset$ 平面 PDC , 所以 $AD \perp PD$, 在 $Rt\triangle PDA$ 中, 由已知得 $AP = \sqrt{AD^2 + PD^2} = \sqrt{5}$, 所以 $\cos \angle DAP = \frac{AD}{AP} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以异面直线 AP 与 BC 所成的角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
- (2) 因为 $AD \perp$ 平面 PDC , 直线 $PD \subset$ 平面 PDC , 所以 $AD \perp PD$, 又因为 $BC // AD$, 所以 $PD \perp BC$, 又 $PD \perp PB$, $PB \cap BC = B$, 所以 $PD \perp$ 平面 PBC .

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, H 是正方形 AA_1B_1B 的中心, $AA_1=2\sqrt{2}$, $C_1H\perp$ 平面 AA_1B_1B ,且 $C_1H=\sqrt{5}$

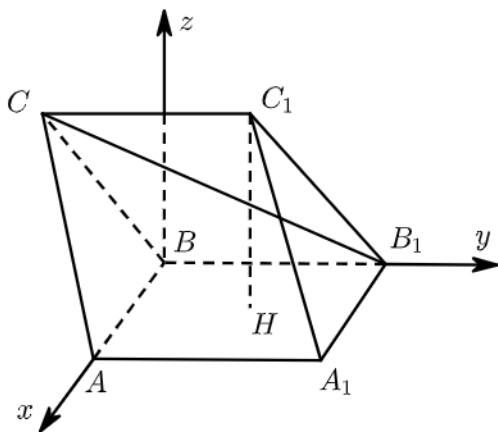


求异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值.

答案 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

解析 方法一:

如图所示,建立空间直角坐标系,点 B 为坐标原点.



依题意得 $A(2\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5})$

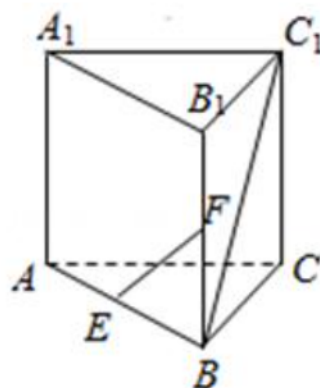
$A_1(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0)$, $B_1(0, 2\sqrt{2}, 0)$, $C_1(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{5})$

(I) 易得 $\overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{5})$, $\overrightarrow{A_1B_1} = (-2\sqrt{2}, 0, 0)$,

$$\text{于是} \cos \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A_1B_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{A_1B_1}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{A_1B_1}|} = \frac{4}{3 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

所以异面直线 AC 与 A_1B_1 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

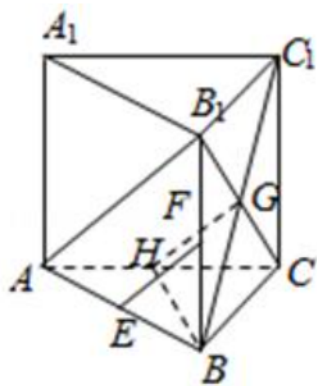
- 8 如图所示,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1\perp$ 底面 ABC , $AB=BC=AA_1$, $\angle ABC=90^\circ$,点 E 、 F 分别是棱 AB 、 BB_1 的中点,则直线 EF 和 BC_1 所成的角是() .



- A. 45° B. 60° C. 90° D. 120°

答案 B

解析 连接 AB_1 ，易知 $AB_1 \parallel EF$ ，连接 B_1C 交 BC_1 于点 G ，取 AC 的中点 H ，连接 GH ，则 $GH \parallel AB_1 \parallel EF$ 。设 $AB = BC = AA_1 = a$ ，连接 HB ，在三角形 GHB 中，易知 $GH = HB = GB = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，故两直线所成的角即为 $\angle HGB = 60^\circ$ 。
故选：B。



9 已知三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ ，底面是正三角形，侧棱和底面垂直，直线 B_1C 和平面 ACC_1A_1 成角为 30° 则异面直线 BC_1 和 AB_1 所成的角为 ()。

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

答案 C

解析

先补齐一个四棱柱，

$\because AA_1 \perp \text{面} A_1C_1, B_1O \in \text{面} A_1C_1, \therefore B_1O \perp AA_1$

由于 $B_1O \perp A_1C_1$ ，且 $AA_1 \cap A_1C_1 = A_1$

$\therefore B_1O \perp \text{面} AC_1$ ，故 $\angle B_1CO$ 即直线 B_1C 与面 AC_1 所成角，

$$\text{且 } \frac{B_1O}{B_1C} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

又 $B_1D_1 = 2B_1O, \therefore B_1D_1 = B_1C$

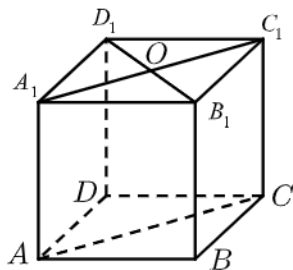
$\because A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1, \therefore D_1A = AB_1 = B_1C$

$\therefore D_1A = AB_1 = B_1D_1$ ，即 $\triangle D_1AB_1$ 为正三角形

由 $AB // C_1D_1$ 且 $AB = C_1D_1$ 知四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，

故 $BC_1 // AD_1$ ，则直线 BC_1 与直线 AB_1 所成角即直线 AD_1 与直线 AB_1 所成角，

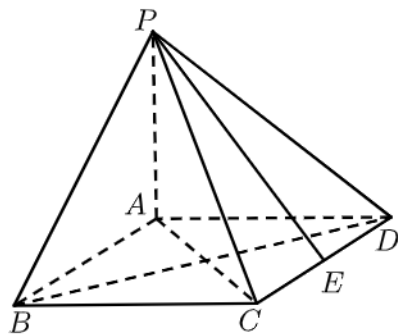
即 $\angle D_1AB_1$ ，而 $\triangle D_1AB_1$ 为正三角形，即 $\angle D_1AB_1 = \frac{\pi}{3}$



故选C.

二、线面角

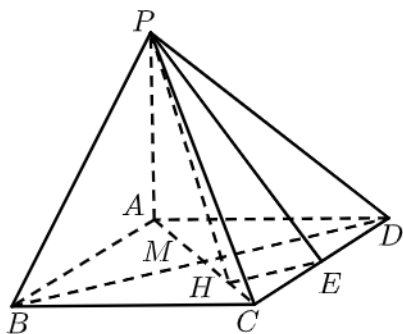
- 10 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $PA \perp \text{平面} ABCD$ ， $PA = AB$ ， E 为 CD 中点。



求 PE 与平面 PAC 所成角的正弦值。

答案 $\frac{\sqrt{21}}{14}$.

解析 取 AC, BD 交点为 M , 取 CM 中点 H , 连接 EH, PH ,



$\because E$ 为 CD 中点 ,

$\therefore EH \parallel BD$,

$\therefore EH \perp AC$,

又 $EH \subset$ 面 $ABCD$,

$\therefore EH \perp PA$,

$\therefore EH \perp$ 面 PAC ,

$\therefore \angle EPH$ 即为所求角 ,

令 $BC = 1$, 则 $BD = \sqrt{3}$,

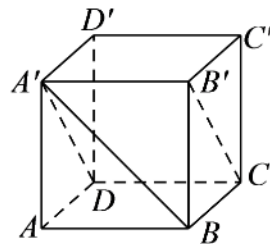
$\therefore EH = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $AH = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}$,

$\therefore PH = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{5}{4}$,

$\therefore PE = \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$,

$\therefore \sin \angle EPH = \frac{PH}{PE} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

11 如图正方形 $ABCD - A'B'C'D'$ 中 , 直线 $A'B$ 与平面 $A'B'CD$ 所成的角为 () .



A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

答案 A

解析 连接 BC' 交 $B'C$ 于 E ，连结 $A'E$ ，

易证： $BE \perp$ 平面 $A'B'CD$ ，

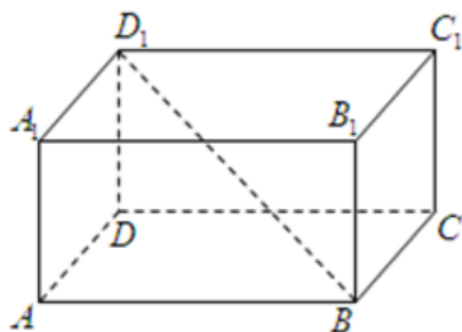
$\therefore \angle A'EB = 90^\circ$ ， $\angle BA'E$ 即为所求线面角，

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC' = \frac{1}{2}A'B,$$

$$\therefore \sin \angle BA'E = \frac{1}{2},$$

$$\angle BA'E = 30^\circ.$$

- 12 已知长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 2$ ， $AD = AA_1 = 1$ ，则直线 BD_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为（ ）。



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

- B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D. $\frac{1}{2}$

答案 C

解析 $\because$ 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 2$ ， $AD = AA_1 = 1$ ，

$$\therefore BD_1 = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}.$$

$\therefore$ 直线 BD_1 与平面 BCC_1B_1 所成角为 $\angle D_1BC_1$ 。

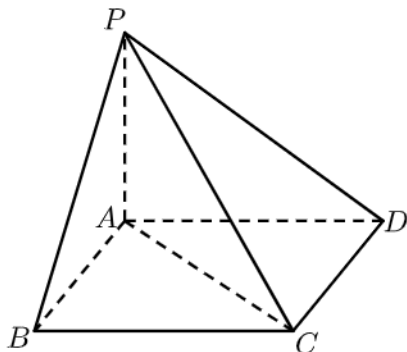
$$\therefore \text{直线 } BD_1 \text{ 与平面 } BCC_1B_1 \text{ 所成角的正弦值 } \sin \angle D_1BC_1 = \frac{D_1C_1}{BD_1} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ 故选 C.}$$

矩形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = 1$, 则 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角是 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

答案 A

解析 连接 AC , 如图所示:



因为 $PA \perp$ 面 $ABCD$,

所以 $\angle PAC$ 是 PC 与面 $ABCD$ 所成的角, 即为所求角.

因为在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$,

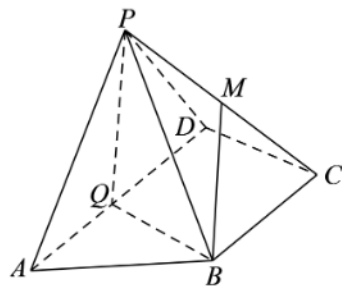
所以 $AC = \sqrt{3}$,

又因为 $PA = 1$,

$$\text{所以} \tan \angle PAC = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以 PC 与面 $ABCD$ 所成的角 $\angle PAC$ 是 30° .

- 14 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle ADC = 90^\circ$, $AD \parallel BC$, 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, $BC = \frac{1}{2}AD$, $PA = PD = AB = 2$, M, Q 为 AD, PC 的中点.



(1) 求证: $CD \parallel$ 平面 MBQ .

(2) 平面 $PQB \perp$ 平面 PAD .

(3) 若直线 PA 与 BC 所成的角为 60° , 求直线 MB 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值 .

答案

(1) 证明见解析 .

(2) 证明见解析 .

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解析

(1) $\because AD \parallel BC$, $BC = \frac{1}{2}AD$, Q 为 AD 的中点 ,

$\therefore$ 四边形 $BCDQ$ 为平行四边形 ,

$\therefore CD \parallel BQ$.

$\because BQ \subset$ 平面 MBQ , $CD \not\subset$ 平面 MQB ,

$\therefore CD \parallel$ 平面 MBQ .

(2) $\because \angle ADC = 90^\circ$,

$\therefore \angle AQB = 90^\circ$, 即 $QB \perp AD$.

又 $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$\therefore BQ \perp$ 平面 PAD .

$\because BQ \subset$ 平面 PQB ,

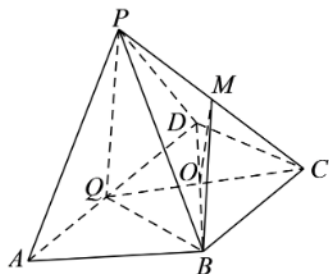
$\therefore$ 平面 $PQB \perp$ 平面 PAD .

(3) $\because PA = PD$, Q 为 AD 的中点 ,

$\therefore PQ \perp AD$. 又 $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$\therefore PQ \perp$ 平面 $ABCD$.

连结 CQ , BD 交于点 O , 则 O 为 CQ 的中点 ,



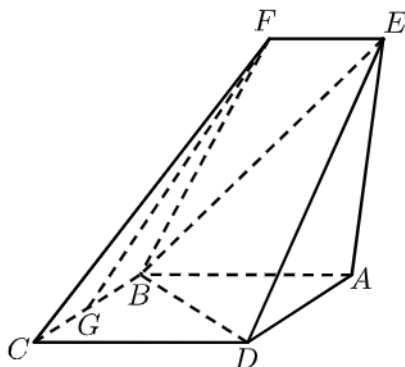
$\therefore OM \parallel PQ$,

$\therefore MO \perp$ 平面 $ABCD$.

$\therefore \angle MBO$ 是直线 MB 与底面 $ABCD$ 所成角 ,

$\because BC \parallel AD$,
 $\therefore \angle PAQ$ 为直线 PA 与 BC 所成的角 , 即 $\angle PAQ = 60^\circ$,
 $\because PA = 2$,
 $\therefore PQ = \sqrt{3}$, $AQ = DQ = 1$,
 $\therefore BQ = \sqrt{AB^2 - AQ^2} = \sqrt{3}$, $OM = \frac{1}{2}PQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BD = \sqrt{BQ^2 + DQ^2} = 2$,
 $\therefore OB = \frac{1}{2}BD = 1$,
 $\therefore \tan \angle MBQ = \frac{OM}{OB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\therefore$ 直线 MB 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- 15 如图 , 四边形 $ABCD$ 是平行四边形 , 平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel AB$, $AB = 2$, $BC = EF = 1$, $AE = \sqrt{6}$, $DE = 3$, $\angle BAD = 60^\circ$, G 为 BC 的中点 .



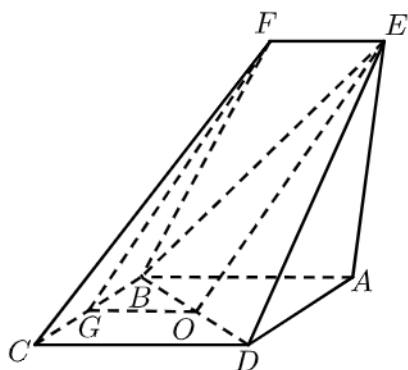
- (1) 求证 : $FG \parallel$ 平面 BED ;
- (2) 求证 : 平面 $BED \perp$ 平面 AED ;
- (3) 求直线 EF 与平面 BED 所成角的正弦值 .

答案

- (1) 证明见解析
- (2) 证明见解析
- (3) $\frac{\sqrt{5}}{6}$

解析

- (1) 取 BD 的中点为 O , 连结 OE , OG ,



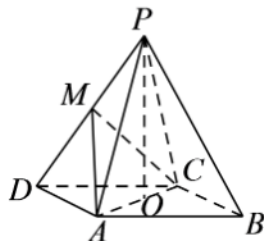
在 $\triangle BCD$ 中，因为 G 为 BC 的中点，
 所以， $OG \parallel DC$ ，且 $OG = \frac{1}{2}DC = 1$ ，
 又因为 $EF \parallel AB$ ， $AB \parallel CD$ ，
 所以， $EF \parallel OG$ 且 $EF = OG$ ，
 即四边形 $OGFE$ 为平行四边形，
 所以， $FG \parallel OE$ ，又 $FG \not\subset$ 平面 BED ， $OE \subset$ 平面 BED ，
 所以， $FG \parallel$ 平面 BED 。

- (2) 在 $\triangle ABD$ 中， $AD = 1$ ， $AB = 2$ ， $\angle BAD = 60^\circ$ ，
 由余弦定理可 $BD = \sqrt{3}$ ，进而可得 $\angle ADB = 90^\circ$ ，即 $BD \perp AD$ ，
 又因为平面 $AED \perp$ 平面 $ABCD$ ， $BD \subset$ 平面 $ABCD$ ；
 平面 $AED \cap$ 平面 $ABCD = AD$ ，
 所以 $BD \perp$ 平面 AED 。
 又因为 $BD \subset$ 平面 BED ，
 所以平面 $BED \perp$ 平面 AED 。

- (3) 因为 $EF \parallel AB$ ，
 所以直线 EF 与平面 BED 所成角即为直线 AB 与平面 BED 所成角。
 过点 A 作 $AH \perp DE$ 于点 H ，连接 BH ，
 又因为平面 $BED \cap$ 平面 $AED = ED$ ，
 由(II)知 $AH \perp$ 平面 BED ，
 所以直线 AB 与平面 BED 所成角即为 $\angle ABH$ 。
 在 $\triangle ADE$ 中， $AD = 1$ ， $DE = 3$ ， $AE = \sqrt{6}$ ，
 由余弦定理可得 $\cos \angle ADE = \frac{2}{3}$ ，所以 $\sin \angle ADE = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，
 因此 $AH = AD \cdot \sin \angle ADE = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，
 在 $Rt\triangle AHB$ 中， $\sin \angle ABH = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{6}$ ，

所以直线 AB 与平面 BED 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{6}$.

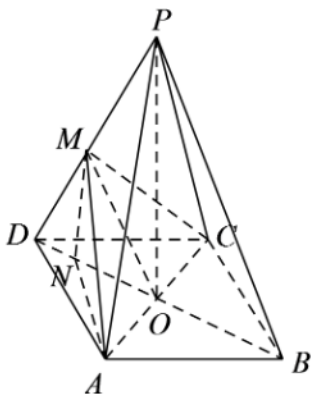
- 16 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle ADC = 45^\circ$, $AD = AC = 1$, O 为 AC 中点, $PO \perp$ 平面 $ABCD$, $PO = 2$, M 为 PD 中点.



求直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.

答案 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

解析 取 DO 中点 N , 连接 MN, AN ,



因为 M 为 PD 的中点, 所以 $MN \parallel PO$,

且 $MN = \frac{1}{2}PO = 1$, 由 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

得 $MN \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $\angle MAN$ 是直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成的角,

在 $\text{Rt}\triangle DAO$ 中, $AD = 1, AO = \frac{1}{2}$,

所以 $DO = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 从而 $AN = \frac{1}{2}DO = \frac{\sqrt{5}}{4}$,

在 $\text{Rt}\triangle ANM$ 中, $\tan \angle MAN = \frac{MN}{AN} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

即直线 AM 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

