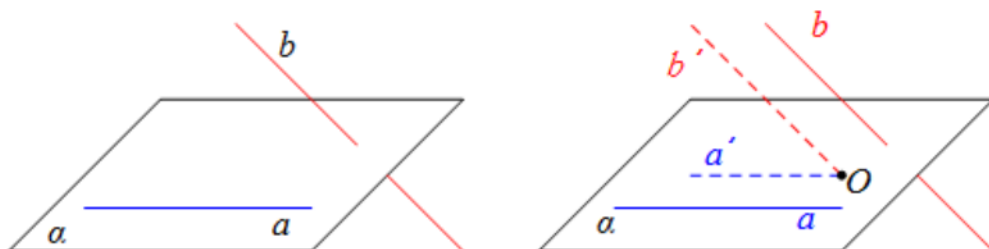


异面直线夹角与线面角

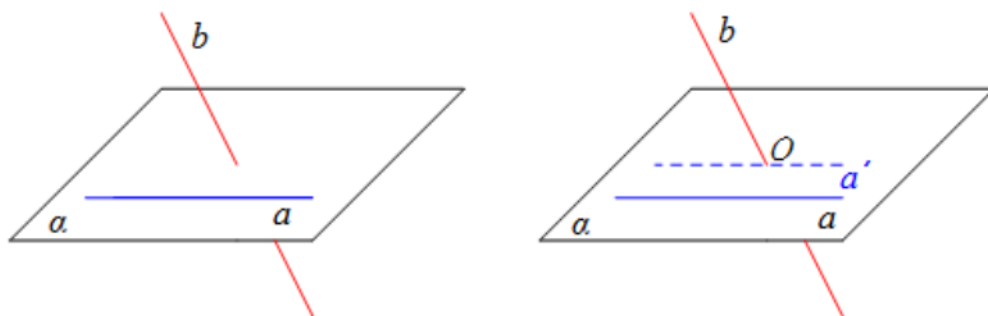
一、异面直线夹角

1. 知识讲解

已知两条异面直线 a, b ，经过空间任一点 O 作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$ ，我们把 a' 与 b' 所成的锐角（或直角）叫做异面直线 a 与 b 所成的角（或夹角），记作 $\langle a, b \rangle$ ，见下图：



为了简便，点 O 常取在两条异面直线中的一条上．例如取在直线 b 上，然后经过点 O 作直线 $a' \parallel a$ ， a' 和 b 所成的锐角（或直角）就是异面直线 a 与 b 所成的角，如下图：



如果两条异面直线所称的角是直角，那么我们就说这两条直线互相垂直．这条互相垂直的异面直线 a, b ，记作 $a \perp b$ ．

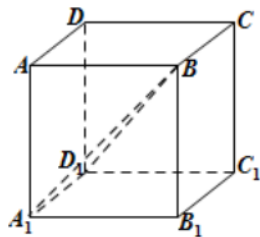
显然，由异面直线夹角的定义，两条异面直线的夹角的取值范围是 $(0, \frac{\pi}{2}]$ ．

2. 例题精讲

- 1 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，异面直线 AD, BD_1 所成角的余弦值为 _____ ．

答案 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

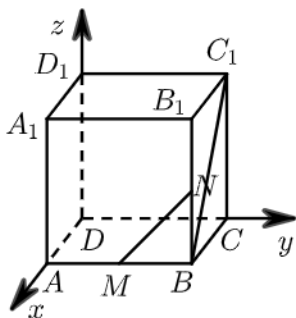
解析 AD, BD_1 所成角即为 A_1D_1, BD_1 所成角，
 设正方体棱长为 1，则 $A_1B = \sqrt{2}, BD_1 = \sqrt{3}$ ，
 所以三角形 ABD_1 为直角三角形，
 解得 $\cos \angle BD_1A = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。



2 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M, N 分别是 AB, BB_1 的中点，则异面直线 MN 与 BC_1 所成角的大小是 _____。

答案 60°

解析 以 D 为原点， DA 为 x 轴， DC 为 y 轴， DD_1 为 z 轴，建立空间直角坐标系，



设正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，
 则 $M(2, 1, 0), N(2, 2, 1), B(2, 2, 0), C_1(0, 2, 2)$ ，
 $\overrightarrow{MN} = (0, 1, 1), \overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 2)$ ，
 设异面直线 MN 与 BC_1 所成角为 θ ，
 $\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}} = \frac{1}{2}$ ，
 $\therefore \theta = 60^\circ$ ，
 $\therefore$ 异面直线 MN 与 BC_1 所成角的大小是 60° 。
 故答案为： 60° 。

$ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是正方体，若 E 、 F 分别是棱 AB 和棱 BB_1 的中点，则 A_1E 和 CF 所成的角的余弦值为 () .

A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{3}{5}$

答案 A

解析 设 $AB = 4$,

取 A_1B_1 的中点 H , HB_1 的中点 G ,

连接 GF 、 GC ,

GF 、 GC 所成的角即为 A_1E 与 CF 所成的角 .

利用勾股定理得 : $GF = \sqrt{5}$, $CF = 2\sqrt{5}$, $GC = \sqrt{21}$,

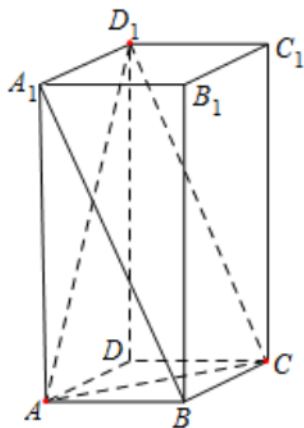
在 $\triangle GFC$ 中利用余弦定理 $\cos \angle GFC = \frac{GF^2 + CF^2 - GC^2}{2GF \cdot CF} = \frac{2}{5}$.

3. 课堂巩固

4 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 , $AA_1 = 2$, $AB = 1$, 则异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角的余弦值为 _____ .

答案 $\frac{4}{5}$

解析 如图 , 连结 D_1C , AC .



$\therefore A_1B // D_1C$,

$\therefore \angle AD_1C$ 即为所求角.

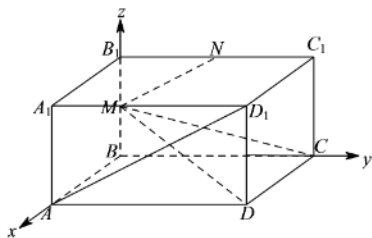
$$AD = \sqrt{5}, D_1C = \sqrt{5}, AC = \sqrt{2},$$

$$\cos \angle AD_1C = \frac{5+5-2}{2 \times 5} = \frac{4}{5}.$$

- 5 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, M, N 分别是棱 BB_1, B_1C_1 的中点, 若 $\angle CMN = 90^\circ$, 则异面直线 AD_1 与 DM 所成的角为 _____.

答案 90°

解析 建立空间直角坐标系,



设 $AB = a, BC = b, BB_1 = c$,

则 $M(0, 0, \frac{c}{2}), N(0, \frac{b}{2}, c), C(0, b, 0)$,

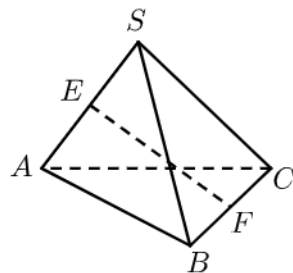
$A(a, 0, 0), D_1(a, b, c), D(a, b, 0)$,

则 $\overrightarrow{MC} = (0, b, -\frac{c}{2}), \overrightarrow{MN} = (0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$,

由 $\angle CMN = 90^\circ$, 可知 $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 0$, 解得 $2b^2 = c^2$.

所以 $\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DM} = -b^2 + \frac{1}{2}c^2 = 0$, 所以异面直线 AD_1 与 DM 所成的角为 90° .

- 6 如图, 在三棱锥 $S - ABC$ 中, $SC = AB = 2$, E, F 分别是 SA, BC 的中点, 且满足 $EF = \sqrt{3}$, 则异面直线 SC 与 AB 所成的角等于 ().



A. 60°

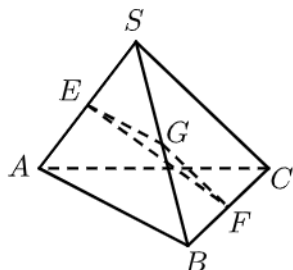
B. 120°

C. 120° 或者 60°

D. 30°

答案 A

解析 取 SB 中点 G ，连接 EG ， FG ，



则 EG ， FG 为 $\triangle SAB$ 与 $\triangle BCS$ 的中位线， $EG = GF = 1$ ，

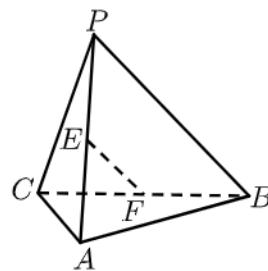
在 $\triangle EFG$ 中，由余弦定理： $\cos \angle EGF = \frac{EG^2 + GF^2 - EF^2}{2 \cdot EG \cdot GF} = -\frac{1}{2}$ ，

$\therefore \angle EGF = 120^\circ$ ，但直线成角只能为锐角，

$\therefore SC$ 与 AB 成角为 $\angle EGF$ 的补角 60° 。

故选A。

7 如图， E ， F 分别是三棱锥 $P-ABC$ 的棱 AP ， BC 的中点， $PC = 10$ ， $AB = 6$ ， $EF = 7$ ，则异面直线 AB 与 PC 所成的角为（ ）。



A. 120

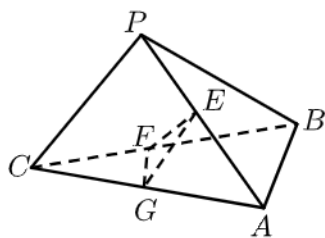
B. 60

C. 45

D. 30

答案 B

解析 取 AC 中点 G ，连 FG ， EG ，



则 FG, EG 为中位线.

$$EG = 5, FG = 3,$$

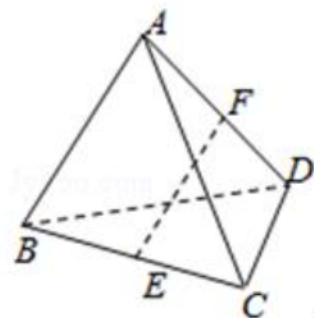
$$\text{且推定理, } \cos \angle EGF = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle EGF = 120^\circ.$$

但直线夹角不能为钝角, AB 与 PC 夹角 60° .

故选 B.

- 8 如图, 空间四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, AB 与 CD 所成角为 $\frac{\pi}{3}$, 点 E, F 分别为 BC, AD 的中点, 则直线 AB 与 EF 所成角为 ().



- A. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{6}$
C. $\frac{\pi}{3}$

- B. $\frac{\pi}{6}$
D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{2}$

答案 A

解析 取 BD 中点 O , 链接 EO, FO ,

$\therefore$ 空间四边形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, AB 与 CD 所成角为 $\frac{\pi}{3}$, 点 E, F 分别为 BC, AD 的中点,

$\therefore OF \parallel AB, OE \parallel CD$,

$\therefore \angle EOF$ 是 AB 与 CD 所成角 (或所成角的补角), $\angle EFO$ 是直线 AB 与 EF 所成角 (或所成角的补角),

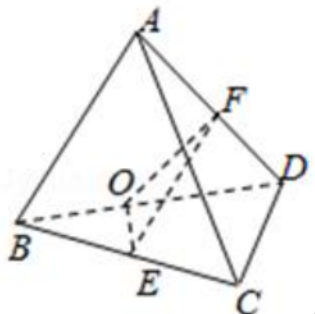
$$\therefore \angle EOF = \frac{\pi}{3}, \text{ 或 } \angle EOF = \frac{2\pi}{3},$$

$\because AB = CD,$

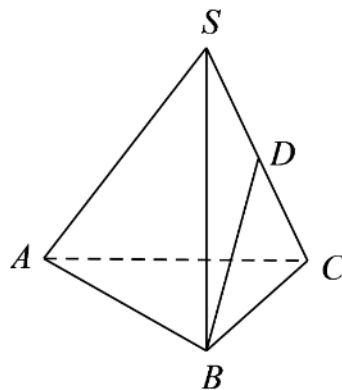
$\therefore$ 当 $\angle EOF = \frac{\pi}{3}$ 时, $\angle EFO = \frac{\pi}{3},$

当 $\angle EOF = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\angle EFO = \frac{\pi}{6}.$

故选: A.



- 9 如图所示, 棱长皆相等的四面体 $S-ABC$ 中, D 为 SC 的中点, 则 BD 与 SA 所成角的余弦值是 () .



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

- B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

答案 C

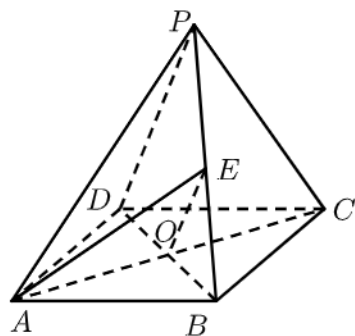
解析 取 AC 中点 E , 连接 DE 、 BE ,
则 $DE \parallel SA$,
 $\therefore \angle EDB$ 或其补角为 BD 与 SA 所成角,
设四面体的棱长为 2,

则在 $\triangle BDE$ 中, $DE = 1$, $BD = \sqrt{3}$, $BE = \sqrt{3}$,

$$\therefore \cos \angle BDE = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

故选C.

- 10 如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的侧棱长与底面边长都相等, 且 $ABCD$ 是正方形, 点 E 是 PB 的中点, 则异面直线 AE 与 PD 所成角的余弦值为().



- A. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

- B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$
D. $\frac{2}{3}$

答案 C

解析

$$\because PA = PB = AB,$$

$\therefore \triangle PAB$ 为正三角形,

$$\therefore AE = \frac{\sqrt{3}}{2} AB,$$

取 BD 中点为 O ,

$\therefore O$ 为 BD 中点,

E 为 PB 中点,

$$\therefore OE \parallel \frac{1}{2} PD,$$

$$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2} AB,$$

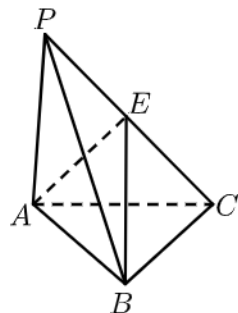
$$AO^2 = AE^2 + OE^2 - 2AE \times OE \cos \theta,$$

$$\frac{1}{2} AB^2 = \frac{3}{4} AB^2 + \frac{1}{4} AB^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} AB \times \frac{1}{2} AB \cos \theta,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- 11 如图所示，在三棱锥 $P-ABC$ 中， $PA \perp$ 平面 ABC ， $\angle BAC = 60^\circ$ ， $PA = AB = AC = 2$ ， E 是 PC 的中点。



- (1) 求证： AE 与 PB 是异面直线。
- (2) 求异面直线 AE 和 PB 所成角的余弦值。

答案

(1) 证明见解析。

(2) $\frac{1}{4}$ 。

解析

(1) 假设 AE 与 PB 共面，

设平面为 α 。

因为 $A \in \alpha$ ， $B \in \alpha$ ， $E \in \alpha$ ，

所以平面 α 即为平面 ABE ，

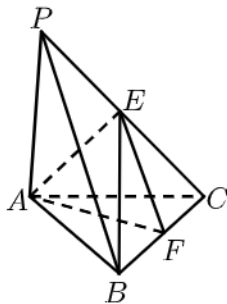
所以 $P \in$ 平面 ABE ，

这与 $P \notin$ 平面 ABE 矛盾，

所以假设不成立，

即 AE 与 PB 是异面直线。

(2) 取 BC 的中点 F ，连接 EF 、 AF ，



则 $EF \parallel PB$ ，

所以 $\angle AEF$ （或其补角）就是异面直线 AE 和 PB 所成的角。

因为 $\angle BAC = 60^\circ$,

$PA = AB = AC = 2$,

$PA \perp$ 平面 ABC ,

所以 $AF = \sqrt{3}$, $AE = \sqrt{2}$, $EF = \sqrt{2}$,

所以 $\cos \angle AEF = \frac{AE^2 + EF^2 - AF^2}{2 \cdot AE \cdot EF} = \frac{2 + 2 - 3}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{4}$,

所以异面直线 AE 和 PB 所成角的余弦值为 $\frac{1}{4}$.

二、空间线面成角

1. 知识讲解

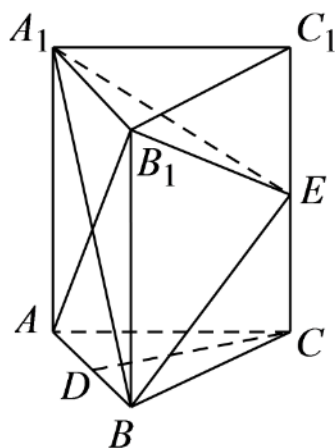
(1) 概念：平面的斜线与它在平面上的射影所成的角叫做这条斜线与平面所成的角.

(2) 取值范围： $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$

2. 例题精讲

定义法

12 如图，在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，每个侧面均为正方形， D 为底边 AB 的中点， E 为侧棱 CC_1 的中点.

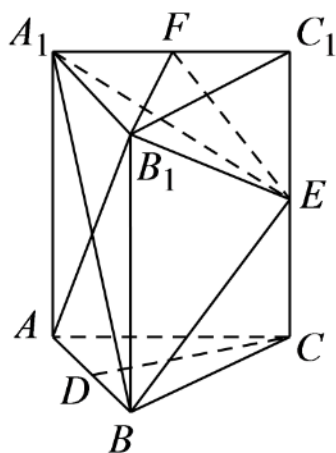


求直线 B_1E 与平面 AA_1C_1C 所成角的正弦值.

答案

$\frac{\sqrt{15}}{5}$.

解析 取 A_1C_1 中点 F , 连接 B_1F , EF .



在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 因为 $BB_1 \perp$ 平面 ABC ,

所以侧面 $ACC_1A_1 \perp$ 底面 $A_1B_1C_1$.

因为底面 $A_1B_1C_1$ 是正三角形, 且 F 是 A_1C_1 中点,

所以 $B_1F \perp A_1C_1$, 所以 $B_1F \perp$ 侧面 ACC_1A_1 .

所以 EF 是 B_1E 在平面 ACC_1A_1 上的射影.

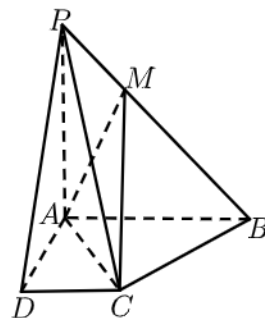
所以 $\angle FEB_1$ 是 B_1E 与平面 AA_1C_1C 所成角.

$$\sin \angle BE_1F = \frac{B_1F}{B_1E} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$



利用已知垂直

13 如图, 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB \perp AD$, $AB = AD = AP = 2CD = 2$.



(1) 若平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 在(2)的条件下, 求 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值.

答案

(1) 证明见解析.

(2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

解析

(1) $\because$ 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$, $AB \perp AD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$

$\therefore AD \perp$ 平面 PAB ,

$\because PA \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore AD \perp PA$,

同理可证 $AB \perp PA$,

又 $AB \subset$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, $AB \cap AD = A$,

$\therefore PA \perp$ 平面 $ABCD$.

(2) 由 (2) 知, $PA \perp$ 平面 $ABCD$,

$\therefore \angle PCA$ 为 PC 与平面 $ABCD$ 所成的角,

$\because PA = AD = 2$, $CD = 1$,

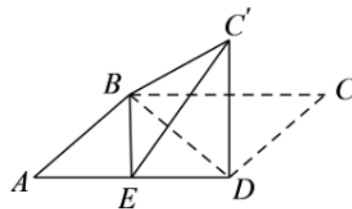
$\therefore AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{5}$,

$\therefore \tan \angle PCA = \frac{PA}{AC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore PC$ 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

等体积法

14 已知平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $AD = 10$, $BD = 8$, E 是线段 AD 的中点, 沿直线 BD 将 $\triangle BCD$ 翻折成 $\triangle BC'D$, 使得平面 $BC'D \perp$ 平面 ABD .



求直线 BD 与平面 BEC' 所成角的正弦值.

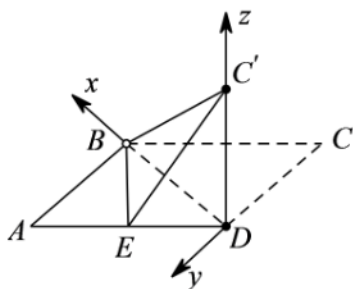
答案

$\frac{3\sqrt{41}}{41}$.

解析

由 (1) 知 $C'D \perp$ 平面 ABD , 且 $CD \perp BD$,

如图，以 D 为原点，建立空间直角坐标系 $D-xyz$ ，



则 $D(0,0,0)$ ， $A(8,6,0)$ ， $B(8,0,0)$ ， $C'(0,0,6)$ ，

$\because E$ 是线段 AD 的中点，

$\therefore E(4,3,0)$ ， $\overrightarrow{BD} = (-8,0,0)$ ，

在平面 BEC' 中， $\overrightarrow{BE} = (-4,3,0)$ ， $\overrightarrow{BC'} = (-8,0,6)$ ，

设平面 BEC' 法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -4x + 3y = 0 \\ -8y + 6z = 0 \end{cases}$$

令 $x = 3$ ，得 $y = 4$ ， $z = 4$ ，故 $\vec{n} = (3,4,4)$ ，

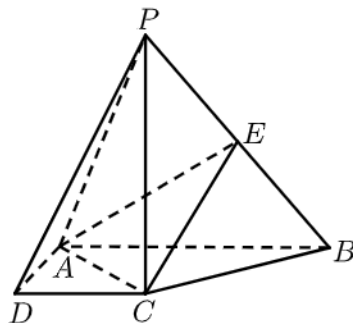
设直线 BD 与平面 BEC' 所成角为 θ ，

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{BD} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{BD}|} = \frac{3\sqrt{41}}{41}$$

$\therefore$ 直线 BD 与平面 BEC' 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{41}}{41}$ 。

3. 课堂巩固

- 15 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是直角梯形， $AB \perp AD$ ， $AB \parallel CD$ ， $PC \perp$ 底面 $ABCD$ ， $PC = AB = 2AD = 2CD = 2$ ， E 是 PB 的中点。



- (1) 求证：平面 $EAC \perp$ 平面 PBC 。

(2) 求直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值.

答案

(1) 证明见解析.

(2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

解析

(1) $\because PC \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore AC \perp PC$.

$\because AB = 2$, $AD = CD = 1$,

$\therefore AC = BC = \sqrt{2}$.

$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$\therefore AC \perp BC$.

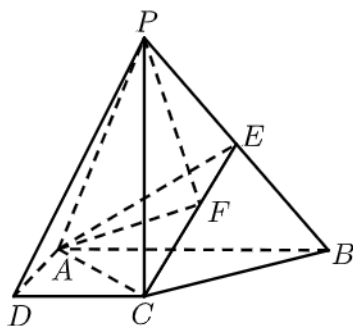
又 $BC \cap PC = C$,

$\therefore AC \perp$ 平面 PBC .

$\because AC \subset$ 平面 EAC ,

$\therefore$ 平面 $EAC \perp$ 平面 PBC .

(2) 作 $PF \perp CE$, F 为垂足.



由 (1) 知平面 $EAC \perp$ 平面 PBC ,

$\therefore$ 平面 $EAC \cap$ 平面 $PBC = CE$,

$\therefore PF \perp$ 平面 EAC , 连接 AF ,

则 $\angle PAF$ 就是直线 PA 与平面 EAC 所成角.

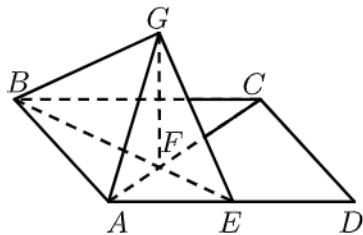
由 (2) 知 $CE = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

$\therefore PF = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \sin \angle PAF = \frac{PF}{PA} = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

即直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

- 16 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB=1$ ， $AD=\sqrt{2}$ ， E 是 AD 的中点， BE 与 AC 交于点 F ， $GF\perp$ 平面 $ABCD$ 。



若 $AF=FG$ ，求直线 EG 与平面 ABG 所成角的正弦值。

答案 直线 EG 与平面 ABG 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ 。

解析 方法一：在 $\text{Rt}\triangle AGF$ 中， $AG = \sqrt{AF^2 + GF^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BGF$ 中， $BG = \sqrt{BF^2 + GF^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 1$ ，

在 $\triangle ABG$ 中， $AG = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $BG = AB = 1$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{6}，$$

设点 E 到平面 ABG 的距离为 d ，则

$$\frac{1}{3} S_{\triangle ABG} \cdot d = \frac{1}{3} S_{\triangle ABF} \cdot GF，$$

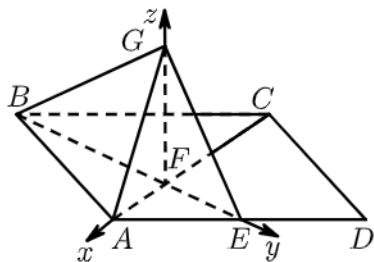
$$\therefore d = \frac{S_{\triangle ABF} \cdot GF}{S_{\triangle ABG}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{10}，$$

$$EG = \sqrt{GF^2 + EF^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}，$$

设直线 EG 与平面 ABG 所成角的大小为 θ ，

$$\text{则} \sin \theta = \frac{d}{EG} = \frac{\frac{\sqrt{30}}{10}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}。$$

方法二：由(1)得 AD ， BE ， FG 两两垂直，以点 F 为原点， FA ， FE ， FG 所在直线分别为 x 轴， y 轴， z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



$$\text{则 } A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right), B\left(0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), G\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), E\left(0, \frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right),$$

$$\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), \overrightarrow{AG} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \overrightarrow{EG} = \left(0, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 是平面 ABG 的法向量, 则

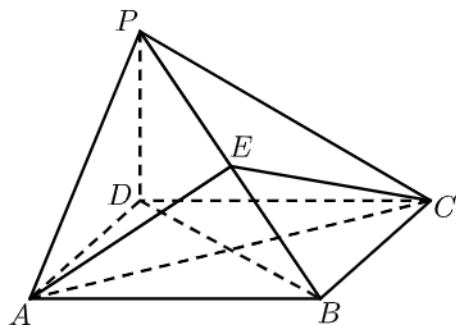
$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{AG} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{6}}{3}y = 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 取 } x = \sqrt{2}, \text{ 得 } \vec{n} = (\sqrt{2}, -1, \sqrt{2}),$$

设直线 EG 与平面 ABG 所成角的大小为 θ , 则

$$\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{EG} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{EG}| |\vec{n}|} = \frac{|0 \times \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{6} \times (-1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{2}|}{\sqrt{0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}} \cdot \sqrt{2 + 1 + 2}} = \frac{\sqrt{15}}{5},$$

$\therefore$ 直线 EG 与平面 ABG 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

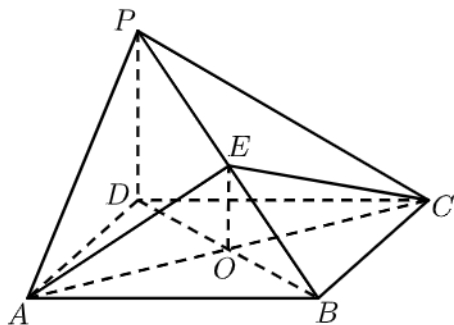
17 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 点 E 在棱 PB 上.



当 $PD = \sqrt{2}AB$, 且 E 为 PB 的中点时, 求 AE 与平面 PDB 所成的角的大小.

答案 $\frac{\pi}{4}$ (或 45°).

解析 设 $AC \cap BD = O$, 连接 OE ,



由 (1) 可知 $AC \perp$ 平面 PDB ,

$\therefore \angle AEO$ 为 AE 与平面 PDB 所成的角,

又 $\because O, E$ 分别为 BD, BP 中点,

$$\therefore OE \parallel PD, OE = \frac{1}{2}PD,$$

又 $\because PD \perp$ 底面 $ABCD$,

$\therefore OE \perp$ 底面 $ABCD$,

$\therefore OE \perp AO$,

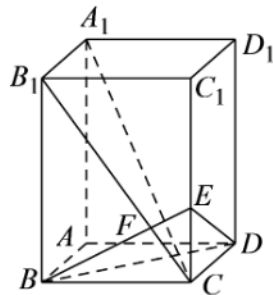
在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中,

$$OE = \frac{1}{2}PD = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = OA,$$

$$\therefore \angle AEO = 45^\circ,$$

即 AE 与平面 PDB 所成的角的大小为 45° .

- 18 已知长方体 AC_1 中, 棱 $AB = BC = 1$, 棱 $BB_1 = 2$, 连接 B_1C , 过 B 点作 B_1C 的垂线交 CC_1 于 E , 交 B_1C 于 F .



求平面 A_1B_1C 与直线 DE 所成角的正弦值.

答案 $\frac{1}{5}$.

解析 连接 DF ,

$$\because A_1C \perp BE, B_1C \perp BE, A_1C \cap B_1C = C,$$

$$\therefore BE \perp \text{平面} A_1B_1C,$$

$\therefore DF$ 是 DE 在平面 A_1B_1C 上的射影, $\angle EDF$ 是 DE 与平面 A_1B_1C 所成的角,

$$\text{设 } F(1, y, z), \text{ 那么 } \overrightarrow{BF} = (0, y, z), \overrightarrow{CF} = (-1, y-1, z), \overrightarrow{B_1C} = (0, 1, -2),$$

$$\therefore \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{B_1C} = 0$$

$$\therefore y - 2z = 0 \text{ ①},$$

$$\therefore \overrightarrow{CF} \parallel \overrightarrow{B_1C},$$

$$\therefore z = 2 - 2y \text{ ②由①、②得 } y = \frac{4}{5}, z = \frac{2}{5}, \overrightarrow{DE} = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{EF} = \left(0, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{10}\right)$$

$$\text{在Rt } \triangle FDE \text{ 中, } DE = \frac{\sqrt{5}}{2}, EF = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

$$\therefore \sin \angle EDF = \frac{EF}{ED} = \frac{1}{5}, \text{ 因此, } DE \text{ 与平面 } A_1B_1C \text{ 所成的角的正弦值是 } \frac{1}{5}.$$